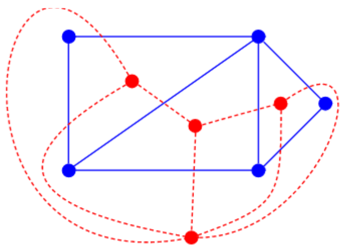
<u>תרגול 9: גרפים מישוריים</u>

<u>הגדרות</u>

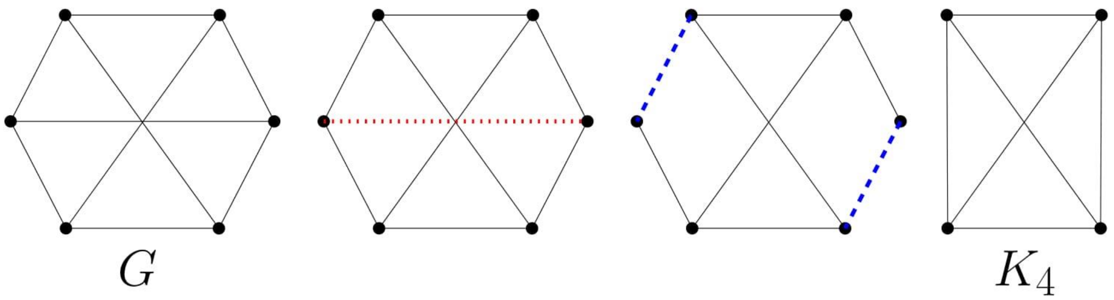
- גרף G נקרא **מישורי** אם ניתן לייצג אותו במישור ללא צלעות החותכות זו את זו.
- יהי G גרף מישורי. כל אזור החסום ע"י צלעות הגרף נקרא **פאה**. האזור שאינו חסום ע"י צלעות הגרף נקרא **הפאה החיצונית**, או **הפאה האינסופית** של G.
- **גרף דואלי** G^* של גרף מישורי G הוא (מולטי) גרף שקדקודיו הם פאות G, שלכל קשת e בגרף מתאימה קשת דואלית e^* המחברת בין הפאות ש- e חלה בהן.



<u>דוגמא</u>: כיצד נראה הגרף הדואלי של עץ על n קדקודים?
קדקוד אחד עם $n-1$ צלעות עצמיות (לולאות).

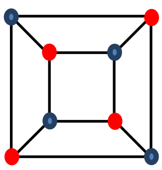
<u>נוסחת אוילר</u>: יהי G גרף מישורי <u>קשיר</u>, ויהיו n מספר הקדקודים בגרף, m מספר הצלעות, ו - f מספר הפאות.
אז $n+f-m=2$.
<u>מסקנה:</u> בכל גרף פשוט מישורי עם $n \geq 3$ קודקודים, יש לכל היותר $3n-6$ צלעות.

גרף G' נקרא <u>מינור</u> של גרף G אם G' מתקבל מ-G על ידי הסרת קודקודים וצלעות וכיווץ של צלעות. כיווץ של צלע מלכד את שני קודקודי הקצה לקודקוד אחד.



<u>משפט (Wagner)</u>: גרף G מישורי אם ורק אם אין לו מינור K_5 ומינור $K_{3,3}$.

<u>תרגיל 1:</u>
יהי G גרף פשוט דו-צדדי ומישורי, כך שלכל קדקוד דרגה $\leq d$. מהם הערכים האפשריים עבור d?



<u>פתרון:</u>
עבור $d \leq 3$ ניתן לקחת את גרף הקוביה Q_d,
כל דרגותיו הן d, הוא דו"צ ומישורי עבור $d \leq 3$:

נראה שלא ייתכן כי $d \geq 4$. נניח בשלילה כי קיים גרף כזה ונסתכל על רכיב קשירות מסוים בו C' עם קבוצת קודקודים V', קבוצת צלעות E', וקבוצת פאות F'.
נשים לב שכיוון שהגרף מישורי ודו-צדדי אז גם C' מישורי ודו צדדי.

דרגת כל קדקוד היא לפחות 4, לכן מתקיים $4|V'| \le \sum_{v\in V'} d(v) = 2|E'|$, כלומר $|V'| \le \frac{|E'|}{2}$.

עבור פאה $f \in F'$ נסמן ב - *t(f)* את מספר הצלעות שמקיפות אותה. בגרף מישורי דו-חלקי, כל פאה תחומה ע"י 4 צלעות לפחות (לא ייתכנו מעגלים אי-זוגיים) וכל צלע חלה בשתי פאות לכל היותר, לכן,

$4|F'| \le \sum_{f\in F'} t(f) \le 2|E'|$, כלומר $|F'| \le \frac{|E'|}{2}$.

כעת, מנוסחת אוילר עבור C':

$2 = |V'| + |F'| - |E'| \le \frac{|E'|}{2} + \frac{|E'|}{2} - |E'| = 0$, סתירה.

<u>תרגיל 2:</u>

יהא $G = (V, E)$ גרף קשיר 3-רגולרי ומישורי שכל פאותיו משולשים או משושים (גם הפאה האינסופית).
כמה משולשים ישנם ב-G ?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב-F את קבוצת הפאות של G, וב-k את מספר המשולשים בגרף.

כיוון שהגרף 3-רגולרי נקבל ממשפט הדרגות $2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = 3|V|$ ולכן $|V| = \frac{2}{3}|E|$

הגרף מישורי וקשיר, לכן ניתן להשתמש בנוסחת אוילר ונקבל

$2 = |V| + |F| - |E| = |F| - \frac{|E|}{3}$.

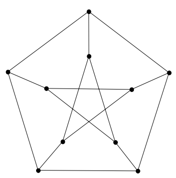
עבור פאה $f \in F'$ נסמן ב - *t(f)* את מספר הצלעות שמקיפות אותה. כיוון שכל פאה היא משולש או משושה, כל צלע חלה ב-2 פאות בדיוק, ולכן נקבל $2|E| = \sum_{f\in F} t(f) = 3k + 6(|F| - k) = 6|F| - 3k$

כלומר $|E| = 3|F| - \frac{3}{2}k$.

נציב בנוסחה שקיבלנו קודם לכן ונקבל $2 = |F| - \left(|F| - \frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2}$, כלומר מספר המשולשים הינו *k=4*.

<u>תרגיל 3:</u>

הוכח כי גרף פטרסון אינו מישורי (מופיע משמאל):



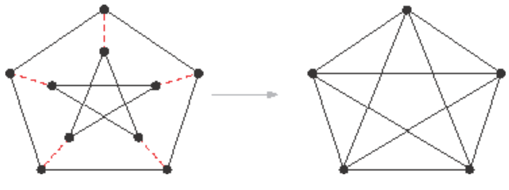
א. באמצעות נוסחת אוילר.

ב. באמצעות משפט *Wagner*.

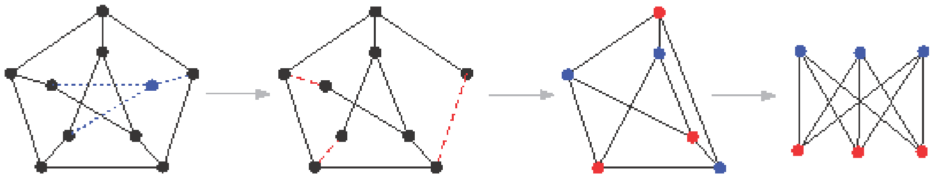
<u>פתרון:</u>

א. נניח בשלילה שגרף פטרסון מישורי. בגרף פטרסון $|V| = 10, |E| = 15$.
כיוון שגרף פטרסון קשיר, נובע מנוסחת אוילר: $|V| + |F| - |E| = 10 + |F| - 15 = 2$, כלומר $|F| = 7$. כל צלע בגרף מישורי חלה ב - 2 פאות לכל היותר, לכן $\sum_{f\in F} t(f) \le 2|E| = 30$.
לכן, מספר הצלעות שחלות בפאה בממוצע הוא $\frac{\sum_{f\in F} t(f)}{7} \le \frac{30}{7} < 5$. כלומר, יש פאה שמוקפת ע"י 3 או 4 צלעות. אך בגרף פטרסון כל המעגלים הם באורך לפחות 5, סתירה.

ב. נוכיח בעזרת משפט *Wagner*:
<u>הוכחה 1:</u> נראה כי לגרף פטרסון יש מינור K_5. נתחיל מגרף פטרסון, נכווץ את 5 הצלעות (המקווקוות באיור) המחברות בין הקודקודים ה"חיצוניים" לקודקודים ה"פנימיים" ונקבל את המינור K_5.



<u>הוכחה 2</u>: נראה כי גרף פטרסון את $K_{3,3}$ כמינור. ראשית נסיר 3 מהצלעות וקדקוד אחד (בכחול מנוקד), אח"כ נכווץ 3 צלעות (באדום מקווקו) ונקבל את המינור $K_{3,3}$.



<u>תרגיל 4:</u>
האם קיים גרף קשיר 3-רגולרי על 8 קודקודים שאינו מישורי?

<u>פתרון:</u>
כן. נתבונן בגרף המתקבל מ-$K_{3,3}$ באופן הבא: נפצל שתיים מצלעותיו למסלול באורך 2. כעת, נוספו 2 קדקודים חדשים מדרגה 2 וכל שאר הדרגות לא השתנו. נחבר את שני הקדקודים מדרגה 2 בצלע ונקבל גרף קשיר 3-רגולרי על 8 קדקודים. גרף זה בעל מינור $K_{3,3}$ ולכן אינו מישורי.

<u>תרגיל 5:</u>
גרף נקרא $outerplanar$ אם הוא גרף מישורי וקיים ציור שלו במישור כך שכל הקדקודים נמצאים על השפה של הפאה החיצונית.
הוכיחו שאם הגרף הוא $outerplanar$, אזי <u>אין לו</u> מינור K_4 או מינור $K_{2,3}$.

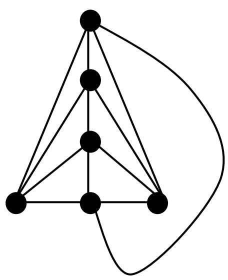
<u>הוכחה:</u>
יהא גרף $outerplanar$, נניח בשלילה שיש לו מינור K_4 או $K_{2,3}$. נוכל להוסיף קדקוד נוסף ולחבר אותו לכל קודקודי הגרף (שנמצאים על הפאה החיצונית) ולקבל גרף מישורי ולו מינור K_5 או $K_{3,3}$ בהתאמה, סתירה.

<u>תרגיל 6:</u>
K_6 הוא כאמור הגרף המלא על 6 קדקודים.
א. האם בהסרת 2 צלעות מ - K_6 נוכל לקבל גרף מישורי?
ב. האם בהסרת 3 צלעות מ - K_6 נוכל לקבל גרף מישורי?

<u>פתרון</u>
א. לא ניתן. אם נוריד 2 צלעות ששכנות לאותו קודקוד, אזי נשאר עם K_5 כתת – גרף. אם נוריד 2 צלעות שאינן חלות באותו הקודקוד, נסמן אותן $e_1 = \{u,v\}$ ו - $e_2 = \{x,y\}$, אזי נקבל כתת גרף את $K_{3,3}$ (כאשר vu, יחד עם קדקוד נוסף בצד אחד ו $x,y-$ יחד עם הקדקוד שנותר בצד השני).

<u>דרך נוספת</u>: כפי שראינו בכיתה, בגרף מישורי קשיר עם $n \geq 3$ קדקודים ו $m-$ צלעות, מתקיים $m \leq 3n-6$. ב K_6- יש $\binom{6}{2} = 15$ צלעות; אם נסיר שתי צלעות נישאר עם $m = 13$, אבל $3n-6 = 18-6 = 12 < 13$ ולכן הגרף אינו מישורי.

ב. ניתן. נבחין כי בגרף המבוקש $\binom{6}{2} - 3 = 15 - 3 = 12$ צלעות ו-6 קדקודים ומתקיים $m = 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$. מכאן שהגרף הינו טריאנגולציה. הגרף הבא עונה על הדרישות:



הגדרות

- יהי $G=(V,E)$ גרף. צביעה חוקית של G ב – k צבעים היא פונקציה $c:V\to\{1,\dots,k\}$ כך שלכל $\{u,v\}\in E$ מתקיים $c(u)\neq c(v)$.
- אם קיימת צביעה חוקית של גרף G ב – k צבעים, G נקרא k-צביע.

תרגיל 7:

יהי G גרף מישורי כך שכל צלע מפרידה בין שתי פאות (כלומר כל צלע היא חלק ממעגל פשוט).
הוכיחו כי G^* 2-צביע ⇔ כל קדקודי G הם מדרגה זוגית.

הוכחה

$\Leftarrow$: נניח G^* 2-צביע, ונניח בשלילה שקיים $v\in V$ עם דרגה אי-זוגית k. יהיו $e_1,e_2,\dots,e_k$ הצלעות החלות ב-v ויהיו $f_1,f_2,\dots,f_k$ פאות כך ש-v על היקפן כך ש- f_i הפאה שצמודה מימין לצלע e_i (יתכן כי אותה פאה מופיעה מספר פעמים). נסמן את קודקודי הגרף הדואלי המייצגים את הפאות $f_1,f_2,\dots,f_k$ ב- $u_1,u_2,\dots,u_k$, בהתאמה. המסלול $u_1,u_2,\dots,u_k,u_1$ הוא מסלול מאורך אי זוגי בגרף הדואלי שמתחיל ומסתיים באותו קודקוד, כלומר מעגל מאורך אי-זוגי ולכן לא ניתן לצבוע את $u_1,u_2,\dots,u_k$ בשני צבעים באופן חוקי ו- G^* לא 2-צביע.

$\Rightarrow$: נניח כי כל קדקודי G הם מדרגה זוגית ונוכיח ש - G^* 2-צביע.
נעשה זאת באינדוקציה שלמה על מספר הפאות $|F|$ ב -G.
בסיס: נבחין כי אין צלעות המוכלות בפאה ב-G ולכן אין ב- G^* צלעות עצמיות. אם $|F|=1$ אז G^* מולטי-גרף עם קדקוד יחיד, אם $|F|=2$ אז G^* מולטי-גרף בעל שני קדקודים, והטענה נכונה.
הנחה: נניח נכונות עבור גרף בעל k פאות לכל $k<|F|$,
צעד: נוכיח עבור גרף בעל $|F|$ פאות. תהי f פאה כלשהי בגרף G. נוריד מ - G את כל צלעות התוחמות את הפאה, ונקבל את הגרף G'.

- ב - G' יש לכל היותר $|F|-1$ פאות.
- דרגות G' זוגיות: דרגת כל קדקוד ב - G' שאינו על שפת f נשארה כמו שהייתה ב - G, כלומר זוגית. כמו כן, הצלעות התוחמות פאה יוצרות מעגל (לא בהכרח פשוט) ודרגות כל קדקודי מעגל הן בהכרח זוגיות, לכן בהסרת המעגל דרגת כל קדקוד על שפת f ירדה בערך זוגי ונותרה זוגית.
- נראה כי ב - G' אין צלעות המוכלות בפאה. נניח בשלילה שיש צלע $e=\{u,v\}$ המוכלת בפאה (נוצרה לאחר הורדת הצלעות התוחמות את f). דרגות u,v זוגיות כאמור ולכן לפחות 2. מכך ש - $\{u,v\}$ מוכלת בפאה, הסרתה מפרידה את הגרף שהתקבל לשני רכיבי קשירות, שבכל אחד מהם קדקוד יחיד עם דרגה אי זוגית (u באחד מהם, v בשני), בסתירה למשפט הדרגות.

לכן תנאי הנחת האינדוקציה מתקיימים, ומהנחת האינדוקציה ניתן לצבוע את פאות G' ב - 2 צבעים. נתבונן בצביעה כזו. תהי f' הפאה ב - G' המכילה את f, ונניח שהיא צבועה אדום. נבחין כי כל הפאות השכנות ל - f ב - G מוכלות גם הן ב - f' , וצבועות באדום. נצבע את f בכחול וקיבלנו צביעה חוקית.

הוכחה נוספת לכיוון $\Rightarrow$:
אבחנה: כל פאה בגרף G^* תחומה ע"י מספר זוגי של צלעות (ייתכן כי תחומה ע"י 2 צלעות כי G^* מולטי גרף).
הוכחה: כל פאה בגרף G^* מייצגת קדקוד בגרף המקורי G. נניח בשלילה כי G^* מכיל פאה F^* התחומה ע"י מספר אי-זוגי של צלעות (נזכור כי אין צלעות המוכלות בפאה), אז F^* הינו קדקוד מדרגה אי זוגית ב – G בסתירה להנחה.
טענת עזר: אם כל פאה ב- G^* תחומה ע"י מספר זוגי של צלעות אז כל המעגלים הפשוטים ב- G^* באורך זוגי.
הוכחה: נתבונן במעגל פשוט ב- G^*, נבחין כי כל פאה מוכלת כולה בתוך המעגל או מחוצה לו. יהיו $f_1,f_2,\dots,f_k$ הפאות המוכלות במעגל. נסמן ב - $t(f)$ את מספר הצלעות שתוחמות פאה f, אזי $\sum_{i=1}^{k} t(f_i)$ זוגי. נבחין כי בסכום הנ"ל כל הצלעות שאינן על היקף המעגל נספרות פעמיים ולכן נסכמות לערך זוגי ומכאן שמספר הצלעות על ההיקף זוגי גם כן.

לפי טענת העזר כל המעגלים הפשוטים ב- G^* באורך זוגי ולכן G^* דו-חלקי ו-2-צביע.

תרגיל 8:

הוכחה נוספת לנוסחת אוילר (מתוך הספר *proofs from the book*):

יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי קשיר ויהי T עץ פורש של G.

יהי G^* גרף דואלי של G (ייתכן ש- G^* הוא מולטי גרף), ויהי $(E\backslash T)^*$ תת גרף פורש של G^* המכיל רק צלעות המתאימות לקבוצת הצלעות $E\backslash T$.

טענה: $(E\backslash T)^*$ עץ.

הוכחה:

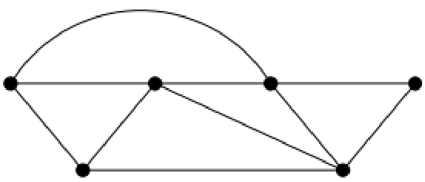
1. $(E\backslash T)^*$ קשיר - T עץ, בפרט איננו מכיל מעגלים, כלומר, אין ב – G קבוצת פאות שצלעות T מפרידות בינה לבין שאר הפאות ולכן אין קבוצת קדקודים של G^* שמופרדים מהשאר.
2. $(E\backslash T)^*$ לא מכיל מעגל - באופן סימטרי, אם היה מכיל מעגל זה היה גורר ש- T לא קשיר.

לכן $(E\backslash T)^*$ קשיר וחסר מעגלים, כלומר עץ פורש של G^*.

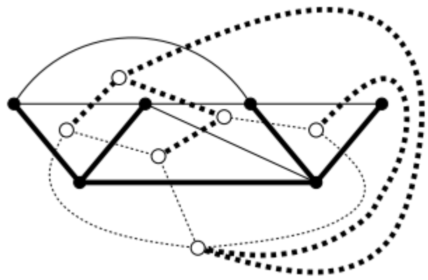
נסמן ב –F את פאות G. כעת: $|E(T)|=|V|-1$ וכן $|E((E\backslash T)^*)|=|V(G^*)|-1=|F|-1$.

כיוון שכל צלע ב - $(E\backslash T)^*$ מתאימה לצלע ב - $E\backslash T$, מתקיים ש – $|E((E\backslash T)^*)|+|E(T)|=|E|$.

לכן נוכל לסכם ולקבל: $|E|=(|V|-1)+(|F|-1)$, וע"י העברת אגפים נקבל את המשפט.



A plane graph G: $n=6$, $e=10$, $f=6$



Dual spanning trees in G and in G^*