# **תרגול 10: מסלולי ומעגלי אוילר והמילטון**

<u>הגדרות</u>

- ***מסלול אוילר*** הינו מסלול בגרף שעובר בכל צלע בדיוק פעם אחת.
- **מעגל אוילר** הוא מסלול אוילר שהינו מעגל.

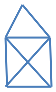
<u>משפטים</u>

א. גרף <u>לא מכוון</u> <u>קשיר</u> מכיל **מעגל אוילר** אם"ם דרגות כל קדקודיו זוגיות.

ב. גרף <u>לא מכוון</u> <u>קשיר</u> מכיל **מסלול אוילר** אם"ם דרגות כל קדקודיו זוגיות למעט אולי 2 קדקודים. במקרה שבגרף 2 דרגות אי זוגיות והיתר זוגיות, מסלול אוילר מתחיל ומסתיים בקדקודים שדרגתם אי זוגית.

ג. גרף <u>מכוון</u> ו<u>קשיר</u> (חזק) מכיל **מעגל אוילר** אם"ם דרגת הכניסה של כל קדקוד שווה לדרגת היציאה שלו.

<u>שאלה 1</u>

האם ניתן לצייר את האיור  מבלי להרים את העט מהנייר?

<u>פתרון</u>

נסתכל על הציור כגרף. בגרף 5 קדקודים עם הדרגות 2,3,3,4,4, כלומר דרגת כל הקדקודים למעט 2 זוגית. לכן קיים מסלול אוילר בגרף (המסלול מתחיל מאחד הקדקודים בבסיס ומסתיים בשני).

מסלול זה ניתן לשרטוט מבלי להרים את העט.

<u>שאלה 2</u>

יהי $G = (V, E)$ גרף בעל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר (לפחות אחד). יש להוכיח שניתן להוסיף ל $G -$ קדקוד בודד ומספר צלעות, ולקבל גרף חדש בו כל רכיב קשירות מכיל מעגל אוילר.

<u>פתרון</u>

ידוע שגרף מכיל מעגל אוילר אם"ם לכל קדקוד בו דרגה זוגית. לכן כל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר, מכיל קדקודים בעלי דרגה אי זוגית. מספרם של קדקודים אלה בכל רכיב קשירות זוגי, כי סכום דרגות הקדקודים בכל רכיב קשירות זוגי.

נוסיף ל $G -$ קדקוד $s$, ממנו נחבר צלעות לכל קדקוד בעל דרגה אי זוגית ב - $G$. בגרף $G'$ שהתקבל, לכל קדקוד $v \in V$ דרגה זוגית בברור. בנוסף, מכך שבכל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר מספר הקדקודים מדרגה אי זוגית הוא זוגי, הרי שגם דרגת $s$ זוגית. אם כן, לכל קודקודי הגרף $G'$ דרגה זוגית, ולכן כל רכיב קשירות בגרף מכיל מעגל אוילר.

<u>שאלה 3</u>

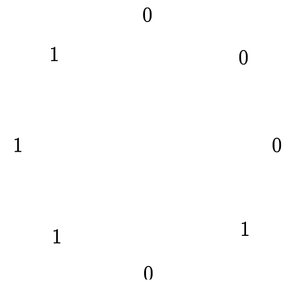
באולימפיאדה מתמטית 20 שאלות ומשתתפים בה 20 תלמידים. ידוע שכל אחד מהתלמידים פתר 2 שאלות בדיוק, וכל אחת מהשאלות נפתרה על ידי שני תלמידים בדיוק. לאחר האולימפיאדה, קיבלו התלמידים משימה: להכין ספרון עם הפתרונות של כל תרגילי התחרות. הוכיחו שניתן לחלק את העבודה כך שכל תלמיד יכתוב פתרון לאחת מהשאלות שפתר בתחרות, וגם לכל שאלה ייכתב פתרון אחד בדיוק.

<u>פתרון</u>

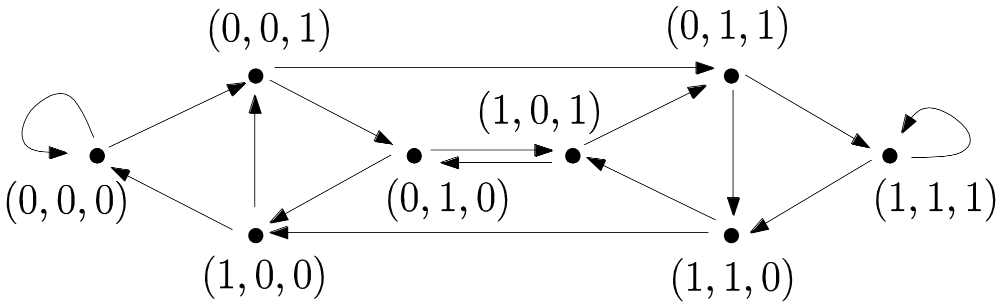
נגדיר גרף דו חלקי: קדקודי צד אחד יהיו התלמידים וקדקודי הצד השני יהיו הבעיות. קדקוד המייצג תלמיד וקדקוד המייצג בעיה יהיו מחוברים בצלע אם הבעיה נפתרה על ידי התלמיד. דרגת כל קדקוד בגרף היא 2, ולכן בכל רכיב קשירות קיים מעגל אוילר המבקר בכל קדקוד פעם אחת, כמו כן, הגרף דו-חלקי ולכן אורכו של כל מעגל זוגי.

כעת, נצבע צלעות כל מעגל באדום וכחול לחלופין. בגלל שאורכו של כל מעגל זוגי, בכל קדקוד חלה צלע אחת אדומה ואחת כחולה. נקבע כי כל תלמיד יכתוב פתרון לשאלה אליה מחובר בצלע כחולה. נבחין כי כל תלמיד מחובר בצלע כחולה לשאלה אחת בדיוק וכל שאלה מחוברת בצלע כחולה לתלמיד אחד בדיוק ולכן נקבל את השיוך הנדרש.

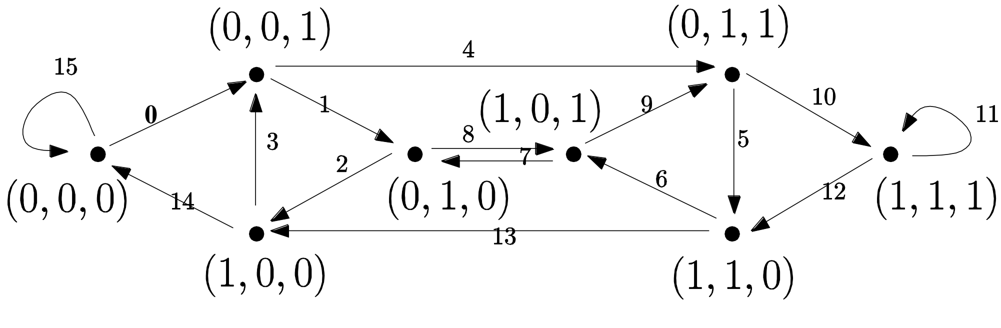
<u>שאלה 4</u>
יש לבנות סדרה מעגלית של אפסים ואחדות באורך $2^n$, כך שכל סדרה בינארית באורך $n$ תופיע כתת סדרה של הסדרה המעגלית. סדרה מעגלית כזו נקראת סדרת **דה-ברוין**.
<u>דוגמא</u>: המעגל עבור $n = 3$:




<u>פתרון</u>
נגדיר גרף מכוון עם $2^{n-1}$ קדקודים, המייצגים את כל הסדרות הבינאריות באורך $n-1$. כעת לכל קדקוד $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ נוסיף צלעות מ - $x$ לשני הקדקודים $(x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ ו - $(x_2, \dots, x_{n-1}, 1)$. לדוגמא, עבור $n = 4$:




הגרף קשיר חזק (יש <u>לבדוק</u>), ודרגות היציאה והכניסה של כל קדקוד הן 2, כלומר זהות. לכן קיים בגרף מעגל אוילר (צלעותיו ממוספרות באיור מ-0 עד 15). נבנה את סדרת **דה-ברוין** מתוך מעגל האוילר:
נתחיל בקדקוד כלשהו (נניח ב - (0,0,...,0,0)), ונרשום במעגל את הספרה האחרונה בכל קדקוד אליו מגיעים, כלומר נעבור לקדקוד הבא במעגל אוילר הנתון - $(0,0, \dots, 0, x_1)$, ($x_1 \in \{0,1\}$) ונוסיף בהמשך קטע המעגל הקיים (שנבנה עד כה) את $x_1$, וכך הלאה. לדוגמא, עבור המעגל:




נקבל את הסדרה: 1001101011110000 (הצעד הראשון מסומן ב - 0).

נראה כעת שסדרה זו היא אכן סדרת דה-ברוין הרצויה.
ראשית, נשים לב כי יש התאמה חח"ע ועל בין צלעות הגרף לבין הסדרות הבינאריות באורך $n$:
הסדרה $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ מותאמת לצלע המחברת את הקדקוד $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ לקדקוד $(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$.
מכיוון שמעגל אוילר מבקר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת, ובעת מעבר על צלע $e$ הביט הנכתב לסדרה משלים את כתיבת הסדרה הבינארית באורך $n$ המתאימה ל-$e$, הסדרה שאנו בונים מכילה כל סדרה באורך $n$ בדיוק פעם אחת.

## מסלולי ומעגלי המילטון

הגדרות:

- **מסלול המילטון** הוא מסלול בגרף שעובר בכל קדקוד בדיוק פעם אחת.
- **מעגל המילטון** הוא מעגל בגרף שעובר בכל קדקוד בדיוק פעם אחת, למעט הקדקוד שממנו התחיל ובו מסתיים.

משפט *Ore*: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון פשוט על $n\geq 3$ קדקודים. אם לכל שני קדקודים לא סמוכים $u,v\in V$ מתקיים $deg(u)+deg(v)\geq n$, אז יש ב - $G$ מעגל המילטון.

שאלה 5

לאלו ערכי $p,q$ יש בגרף הדו חלקי השלם $K_{p,q}$:

א. מעגל המילטון.

ב. מסלול המילטון.

פתרון:

א. נסמן את קבוצות הקדקודים של חלקי הגרף ב - $P,Q$, כך ש - $|P|=p, |Q|=q$.
אזי, קיים מעגל המילטון $p=q>1 \Leftrightarrow$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח כי קיים מעגל המילטון, מכאן ש-$p,q>1$ כי עבור $p,q\leq 1$ הגרף $K_{p,q}$ לא מכיל מעגל.
מכיוון שהגרף דו-חלקי, אורכו של המעגל בהכרח זוגי וכך גם מספר הקדקודים בו. כמו כן, הקדקודים בו הם מ-$P$ ומ-Q לסירוגין. כלומר, יש בו מספר זהה של קדקודים מ-$P$ ומ-Q ומכיוון שמעגל המילטון מכיל את כל קדקודי הגרף הרי ש- $p=q$.

$\Rightarrow$ אם $p=q>1$ אזי הגרף מכיל לפחות 4 קדקודים וכן כל הדרגות הן $\frac{n}{2}$, כלומר, סכום הדרגות של כל שני קדקודים הוא $n$ וממשפט *Ore* נובע כי מכיל מעגל המילטון.

ב. קיים מסלול המילטון $|p-q|\leq 1 \Leftrightarrow$ .

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח כי קיים מסלול המילטון, אזי הוא מבקר בקדקודים מ-$P$ ומ-Q לסירוגין, ולכן ההפרש בין מספר הקדקודים מ- $P$ ומ-Q במסלול הוא לכל היותר 1. מכיוון שמסלול זה מכיל את כל קדקודי הגרף, הרי ש $|p-q|\leq 1$ .

$\Rightarrow$ אם $p=q$ אזי כפי שהוכח ב-א' יש מעגל המילטון ובפרט מסלול המילטון.
אחרת, נניח בה"כ ש - $p>q$, כלומר, $p=q+1$. נסמן, $Q=\{v_1,\dots,v_q\}$
ו- $P=\{u_1,\dots,u_q,u_{q+1}\}$, אזי ישנו מסלול המילטון המתחיל בקדקוד של $P$, מסתיים בקדקוד של $P$ ועובר בכל קדקודי הגרף, מ- $P$ ומ- $Q$ לסירוגין: $(u_1,v_1,u_2,v_2,\dots,u_q,v_q,u_{q+1})$, כנדרש.

שאלה 6

הוכיחו שאם בגרף על $n\geq 2$ קדקודים $G=(V,E)$, סכום הדרגות של כל שני קדקודים הוא לפחות $n-1$ אז יש בגרף מסלול המילטון.

פתרון:

נוסיף לגרף $G$ קדקוד חדש $u$, ונחבר אותו בצלע לכל הקדקודים הקיימים; יתקבל הגרף $G'=(V\cup\{u\},E')$ כך ש - $E'=E\cup\{\{u,v\}:v\in V\}$. נשים לב שב - $G'$ ישנם $n+1$ קדקודים וכל שני קדקודים לא סמוכים $x,v$ מקיימים $deg_{G'}(x)+deg_{G'}(v)=deg_G(x)+1+deg_G(v)+1\geq n-1+2=n+1$ ( $x,v\neq u$ שכן $u$ סמוך לכל הקדקודים). מספר הקדקודים ב-$G'$ הוא $n+1$ ולכן לפי משפט *Ore* קיים ב- $G'$ מעגל המילטון. ע"י השמטת $u$ והצלעות המחוברות אליו ננתק את מעגל המילטון במקום אחד, כלומר נקבל מסלול שמכיל את כל קדקודי V ואותם בלבד ולכן מהווה מסלול המילטון בגרף $G$, כנדרש.

<u>הגדרה:</u> **גרף תחרות** הוא גרף מכוון שבו לכל שני קדקודים $x, y$ קיימת אחת הצלעות $(x, y)$ או $(y, x)$ אך לא שתיהן.

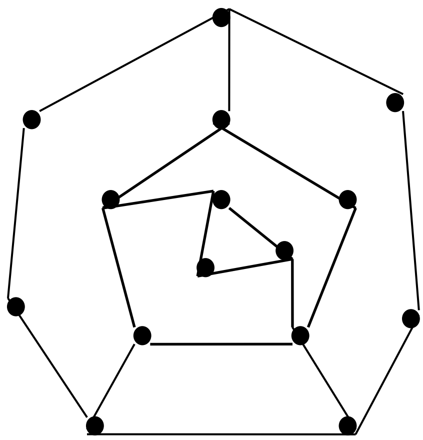
<u>שאלה 7</u>
הוכיחו שבגרף תחרות $G = (V, E)$ שבו לפחות 2 קדקודים קיים מסלול המילטון.

<u>פתרון:</u>
יהי $P = \langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ מסלול פשוט בעל אורך מקסימלי ב - $G$; נוכיח שמכיל את כל קדקודי הגרף. נניח בשלילה שישנו קדקוד $u \in V$ שאינו שייך ל- $P$ .
$G$ תחרות, לכן יש צלע מ- $u$ ל - $v_k$ או מ-$v_k$ ל-$u$ .
אם הצלע מכוונת מ- $v_k$ ל $- u$, אז $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, u \rangle$ מסלול פשוט ארוך יותר מ-$P$ , בסתירה למקסימליות אורכו של $P$. לכן הצלע בהכרח מ - $u$ ל - $v_k$.

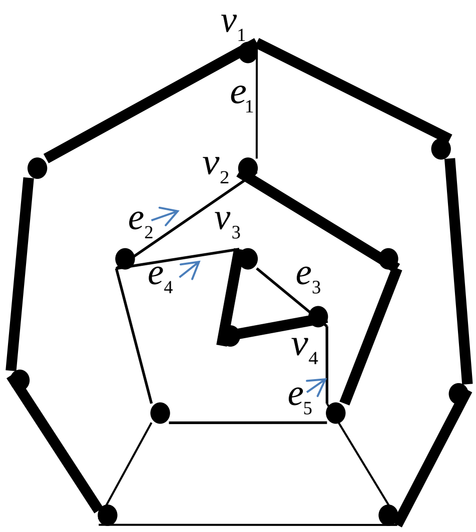
באותו אופן בדיוק, בהכרח יש צלע מ-$v_0$ ל-$u$ .

נסתכל על האינדקס $i$ הקטן ביותר כך שכיוון הצלע בין $u$ ל - $v_i$ היא מ - $u$ ל - $v_i$.
משתי הצלעות שכבר הכרחנו, נקבל בהכרח $k \geq i > 0$.
סה"כ נקבל $i - 1 \geq 0$ , וכן, יש צלע $\langle v_{i-1}, u \rangle$ (ממינימליות $i$),
כלומר, $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, u, v_i, \dots, v_k \rangle$ מסלול פשוט ארוך יותר מ-$P$ , סתירה.
מכאן שלא קיים קדקוד $u \in V$ שאינו שייך ל-$P$.

<u>שאלה 8</u>
יהי $G$ הגרף הבא. יש להראות ש - $G$ אינו מכיל מעגל המילטון.



<u>פתרון:</u>
א. קל לראות שאם $v$ קדקוד כלשהו מדרגה 2, אז שתי הצלעות שחלות בו חייבות להופיע בכל מעגל המילטון בגרף. לכן הצלעות המודגשות בדיאגרמה הבאה חייבות להיות בכל מעגל המילטון.



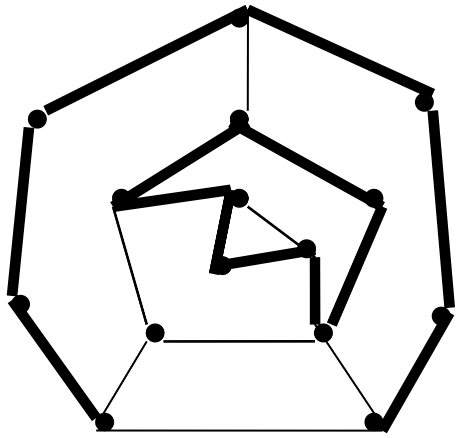
ב. בכל מעגל המילטון, דרגת $v_1$ במעגל חייבת להיות 2, לכן $e_1$ אינה יכולה להיות במעגל.

ג. כעת, על מנת שדרגתו של $v_2$ תהיה 2, $e_2$ חייבת להיות במעגל.

ד. נשים לב ש $e_3$ אינה יכולה להיות במעגל, היות והיא סוגרת מעגל שלא ניתן להרחיב למעגל המילטון ע"י תוספת צלעות.

ה. כעת, על מנת שדרגת $v_3$ תהיה 2, $e_4$ חייבת להשתתף במעגל. כמו כן, על מנת שדרגת $v_4$ תהיה 2, $e_5$ חייבת להשתתף במעגל.

אם כן, הצלעות שחייבות להיות במעגל המילטון הן המודגשות בדיאגרמה הבאה:



אך אם כך, אין דרך להרחיב ע"י הוספת צלעות את המעגל באורך 7 שהתקבל באמצע לכדי מעגל המילטון. לכן לא קיים מעגל המילטון ב - $G$.