אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

בוחן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061	ד״ר סיגל אורן, ד״ר עופר נימן, ד״ר סטוארט סמית, ד״ר נתן רובין, גב׳ יעל שטיין
4.5.2018	גלי בר-און, רחל סבן, מני סדיגורסקי, נתי פטר, ארנולד פילצר, גיל מלניק, יאיר אשלגי
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שעתיים וחצי

<u>הנחיות חשובות:</u>

- **ענו על 8 מתוך 10 השאלות הבאות.**
- **משקל כל שאלה הוא 13 נקודות, כך שניתן לצבור לכל היותר 104 נקודות.**
- **בכל שאלה בדיוק אחת מבין ארבעת האפשרויות היא נכונה.**
- **רשמו את תשובותיכם בטבלה למטה <u>בכתב ברור</u> ובעט.**
- **במידה ותענו על יותר מ- 8 שאלות, רק 8 השאלות הראשונות עליהן עניתם תיבדקנה.**
- **בדיקת הבוחן לא תתחשב בחישובים ו/או הסברים על גבי טופס המבחן ובמחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה										

<u>ציון</u>	

1. נתונה נוסחת הנסיגה $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$
ונתונים תנאי ההתחלה $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 9$. מהו a_{30}?

א. $61 + 2^{30}$

ב. $1 + 2^{30} + 30 \cdot 2^{30}$

ג. 32

ד. $2^{30} + 3^{30}$

הסבר: נחשב את הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$. השורשים של הפולינום הם $x = 1$ בריבוי 2, ו-$x = 2$ בריבוי 1. לכן נקבל את המשוואה $a_n = (A + nB)1^n + C \cdot 2^n$. מהצבת תנאי ההתחלה נקבל כי $a_n = 1 + 2n + 2^n$.

2. כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש לאי-השוויון: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 31$
עבורם מתקיימים שני התנאים הבאים: $2 \leq x_1 \leq 7$, $x_2 \leq 12$:

א. $\binom{35}{6} - \binom{21}{5} - \binom{28}{5} + \binom{15}{5}$

ב. $\binom{37}{6} - \binom{24}{6} - \binom{31}{6} + \binom{18}{6}$

ג. $\binom{35}{6} - \binom{22}{6} - \binom{29}{6} + \binom{16}{6}$

ד. $\binom{34}{5} - \binom{21}{5} - \binom{28}{5} + \binom{15}{5}$

הסבר: השאלה שקולה לכמות הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 29$ תחת התנאים $x_1 \leq 5$ ו-$x_2 \leq 12$. ללא התנאים יש $\binom{29+7-1}{7-1} = \binom{35}{6}$ אפשרויות.
נחשב כמה אפשרויות יש לחריגה בתנאי x_2: $\binom{29-13+7-1}{7-1} = \binom{22}{6}$.
נחשב כמה אפשרויות יש לחריגה בתנאי x_1: $\binom{29-6+7-1}{7-1} = \binom{29}{6}$.
נחשב כמה אפשרויות יש לחריגה בשני התנאים x_2, x_1: $\binom{29-13-6+7-1}{7-1} = \binom{16}{6}$.
לכן מעקרון הכלה והדחה התשובה היא: $\binom{35}{6} - \binom{22}{6} - \binom{29}{6} + \binom{16}{6}$.

3. התפלגות ציונים היא פונקציה המתאימה לכל אחד מ-101 הציונים האפשריים (ציון הוא מספר שלם בין 0 ל-100) את מספר הסטודנטים שקיבלו ציון זה. כמה התפלגויות שונות ישנן אם יש בכיתה 150 סטודנטים?

א. 150^{101}

ב. $\binom{150}{101}$

ג. $\binom{250}{100}$

ד. 101^{150}

הסבר: ניתן לחשוב על הבעיה כמספר הדרכים לחלק 150 כדורים (ציוני הסטודנטים) אל 101 תאים מובחנים. זו בחירה עם חזרות ללא חשיבות לסדר, לכן מספר האפשרויות הוא

$$\binom{150+101-1}{101-1}=\binom{250}{100}$$

4. תהי S={1,2,...,11}. מהו ה-n המינימלי כך שמובטח שכל תת-קבוצה של S מגודל n תכיל 3 זוגות שונים (אבל לא בהכרח זרים) שיש להם אותו ההפרש? (למשל הקבוצה $A=\{2,5,6,8,9\}$ מגודל 5 מכילה שלושה זוגות $\{2,5\},\{5,8\},\{6,9\}$ עם הפרש 3).

א. 4

ב. 7

ג. 8

ד. 9

הסבר: נשים לב כי עבור תת קבוצה מגודל n ישנם $\binom{n}{2}$ זוגות שונים של הפרשים. מכיוון שישנם 10 הפרשים אפשריים שונים לזוגות מספרים בין 1 ל-11 (הפרשים שבין 1 ל-10). אם יתקיים ש-$\binom{n}{2}>20$, נקבל מעקרון שובך היונים כי עבור כל n מספרים שונים שנבחר בין 1 ל-11 חייב להיות תא הפרשים בו נאכסן לפחות 3 זוגות של מספרים. ה-n הקטן ביותר עבורו תנאי זה מתקיים הינו $n=7$: $\binom{7}{2}=\frac{7*6}{2}=21>20$. בעוד עבור $n=6$ נוכל לבחור את הקבוצה $\{1,2,4,8,10,11\}$.

5. ל-3 מהבעיות הבאות ישנם פתרונות השווים בערכם. מהי הבעיה יוצאת הדופן?

א. מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים לאי השוויון $x_1+x_2+\cdots+x_{40}\le 20$

ב. בכמה אופנים ניתן לבחור 20 נציגים לתחרות, מתוך כיתה של 30 בנות ו-30 בנים?

ג. בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים זהים ל-20 תאים מובחנים?

ד. בכמה דרכים ניתן לחלק 800 כדורים זהים ל-41 תאים מובחנים כך שבכל תא יש לכל היותר 20 כדורים?

הסבר: אפשרות ג שקולה לבחירה עם חזרות וללא חשיבות לסדר ולכן שווה ל- $\binom{59}{19}$.

אפשרות א שקולה למספר הפתרונות למשוואה $x_1+\cdots+x_{41}=20$ ולכן שווה ל- $\binom{60}{40}$.

אפשרות ב הינה בחירה של 20 תלמידים מתוך 60 אפשריים, כלומר $\binom{60}{40}=\binom{60}{20}$.

אפשרות ד שקולה למספר הדרכים לחלק 20 כדורים זהים ל-41 תאים מובחנים מכיוון שניתן להכניס 20 כדורים לכל אחד מ-41 התאים (סה״כ להכניס 820 כדורים) ולשאול כמה דרכים יש להוצאת 20 כדורים מ-41 תאים (על מנת להגיע ל800 כדורים). מכיוון שבכל תא ישנם 20 כדורים ואנו מוציאים רק 20 סה״כ אין סכנה שנשאיר בתא כלשהו מספר שלילי של כדורים.

על כן אפשרות ד שווה ל- $\binom{60}{40}$.

6. 23 חניכים של תנועת הצופים נדרשו להתחלק ל-4 שבטים: שבט צוקים מגודל 5, שבט גבעה מגודל 5, שבט רכסים מגודל 6 ושבט פסגות מגודל 7. מהו מספר החלוקות האפשריות של החניכים?

א. $\binom{23}{7,6,5,5}$

ב. $7\cdot 6\cdot 5\cdot 5\cdot \binom{23}{7,6,5,5}$

ג. $\frac{1}{2}\cdot \binom{23}{7,6,5,5}$

ד. $2\cdot \binom{23}{7,6,10}\cdot \binom{10}{5}$

הסבר: מקדמים מולטינומיים. מספר הדרכים לחלק 23 אנשים לקבוצות בגודל 7,6,5,5 (נשים לב כי 7+6+5+5 = 23).

7. שיכור הולך במישור, כאשר הוא מתחיל את הליכתו מנקודה (0,0) ומסיים את הליכתו בנקודה (2n,0). בכל שלב השיכור יכול לבצע אחד משני סוגי הצעדים הבאים:

1) $(x,y) \rightarrow (x+1,y+1)$

2) $(x,y) \rightarrow (x+1,y-1)$

בנוסף, ידוע כי בשום שלב הוא לא יורד מתחת לציר ה-x.
מהו מספר המסלולים השונים האפשריים לשיכור תחת תנאים אלו?

א. $\frac{1}{n+1}\cdot \binom{2n}{n}\cdot \frac{1}{2}$

ב. $\frac{1}{n+1}\cdot \binom{2n}{n}$

ג. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} - \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

ד. $2\cdot \frac{1}{n+1}\cdot \binom{2n}{n}$

הסבר: $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ הינו מספר הפתרונות האפשריים לטיולים שלא יורדים מתחת לציר ה-x מהנקודה (0,0) לנקודה (2n,0), כי זהו מספר הסידורים המאוזנים של סדרה עם n אפסים ו-n אחדות, כאשר אפס מתייחס לעלייה ואחד לירידה.

8. בכמה דרכים ניתן להכניס $2n$ $(n \geq 1)$ כדורים זהים ל-5 תאים מובחנים, כך שבשלושה תאים **בדיוק** תהיה כמות זוגית של כדורים?

א. $10\cdot (n-1)!$

ב. $\binom{5}{2}\cdot \binom{2n+2}{4}$

ג. $\binom{5}{2}\cdot \binom{n+3}{4}$

ד. $\binom{2n+4}{4} - \binom{n+4}{4} - \binom{n}{4}$

הסבר: רוצים בדיוק שלושה תאים זוגיים, כלומר בדיוק שני תאים אי-זוגיים.
אבחנה: כל חלוקה כנדרש, מתאימה לחלוקה של $2n-2$ כדורים כך שכל התאים **זוגיים**, ובחירת שני התאים **האי-זוגיים** - $\binom{5}{2}$.
אבחנה: כל חלוקה של $\mathbf{2n-2}$ כדורים לחמישה תאים כך ש**כל התאים זוגיים** מתאימה לחלוקה **כלשהי** של $\boldsymbol{n-1}$ כדורים לחמישה תאים (נחלק חצי מהכמות בין התאים בדרך כלשהי, ונכפיל את הכמות בכל תא כך שנקבל חלוקה של כל הכמות המקורית וגם כל התאים זוגיים).

9. מה הקשר בין שלושת הביטויים הבאים?

(a) $2^{n-m} \cdot \binom{n}{m}$

(b) $\sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{i}$

(c) $\sum_{i=m}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{m}$

א. $(a) = (b) \neq (c)$

ב. $(a) \neq (b) = (c)$

ג. כולם שונים זה מזה.

ד. כולם שווים.

הסבר: נחשוב על מספר הדרכים לבחור שתי קבוצות A, B מתוך קבוצה X בעלת n איברים כך ש $|A| = m$ ו-$A \cap B = \emptyset$.
עבור ביטוי (a) נבחר תחילה קבוצה A ולאחר מכן עבור כל איבר ב- $X \backslash A$ (זוהי קבוצה בגודל $n - m$) ישנן 2 אפשרויות (לבחור ל-B או להשמיט).
עבור ביטוי (b), לכל גודל אפשרי i של הקבוצה B, נבחר את אברי A תחילה ואז מתוך מה שנשאר את אברי B.
עבור ביטוי (c), כעת i מציין את גודל $A \cup B$, נבחר תחילה את האיחוד, ומתוכו את m אברי A.

10. תמורה על $\{1, \dots, n\}$ תיקרא יורדת-עולה אם קיים $1 \leq k \leq n$ כך ש:

$\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots > \sigma(k) < \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$.

נסמן ב-$F(n)$ את מספר התמורות היורדות-עולות על $\{1, \dots, n\}$. מהי נוסחת הנסיגה המגדירה את $F(n)$?

א. $F(n) = n \cdot F(n-1); F(1) = 1$.

ב. $F(n) = 2 \cdot F(n-1) \cdot F(n-2); F(1) = 1, F(2) = 2$

ג. $F(n) = F(n-1) + F(n-2) + 1; F(1) = 1, F(2) = 2$

ד. $F(n) = 2 \cdot F(n-1); F(1) = 1$

הסבר: נשים לב שכל תמורה יורדת-עולה באורך n מתקבלת מתמורה יורדת-עולה באורך $n - 1$ באמצעות הוספת n לפני האיבר הראשון או לאחר האחרון. לכן מספר התמורות היורדות-עולות מאורך n הוא פי 2 ממספר התמורות היורדות-עולות מאורך n-1.