

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

ד"ר סיגל אורן, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, ד"ר נתן רובין, גבי יעל שטיין	מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א' סמסטר אביב
יאיר אשלגי, גלי בר-און, גיל מלניק, רחל סבן, מני סדיגורסקי, נתי פטר, ארנולד פילצר	8.7.2017 13:30
אסור	חומר עזר
שלוש שעות	משך הבחינה

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק.** משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

אי-שוויון מרקוב: $\Pr(X \geq \lambda E[X]) \leq \frac{1}{\lambda}$, ל- X אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב: $\Pr(|X - E[X]| \geq C) \leq \frac{V[X]}{C^2}$

בהצלחה !

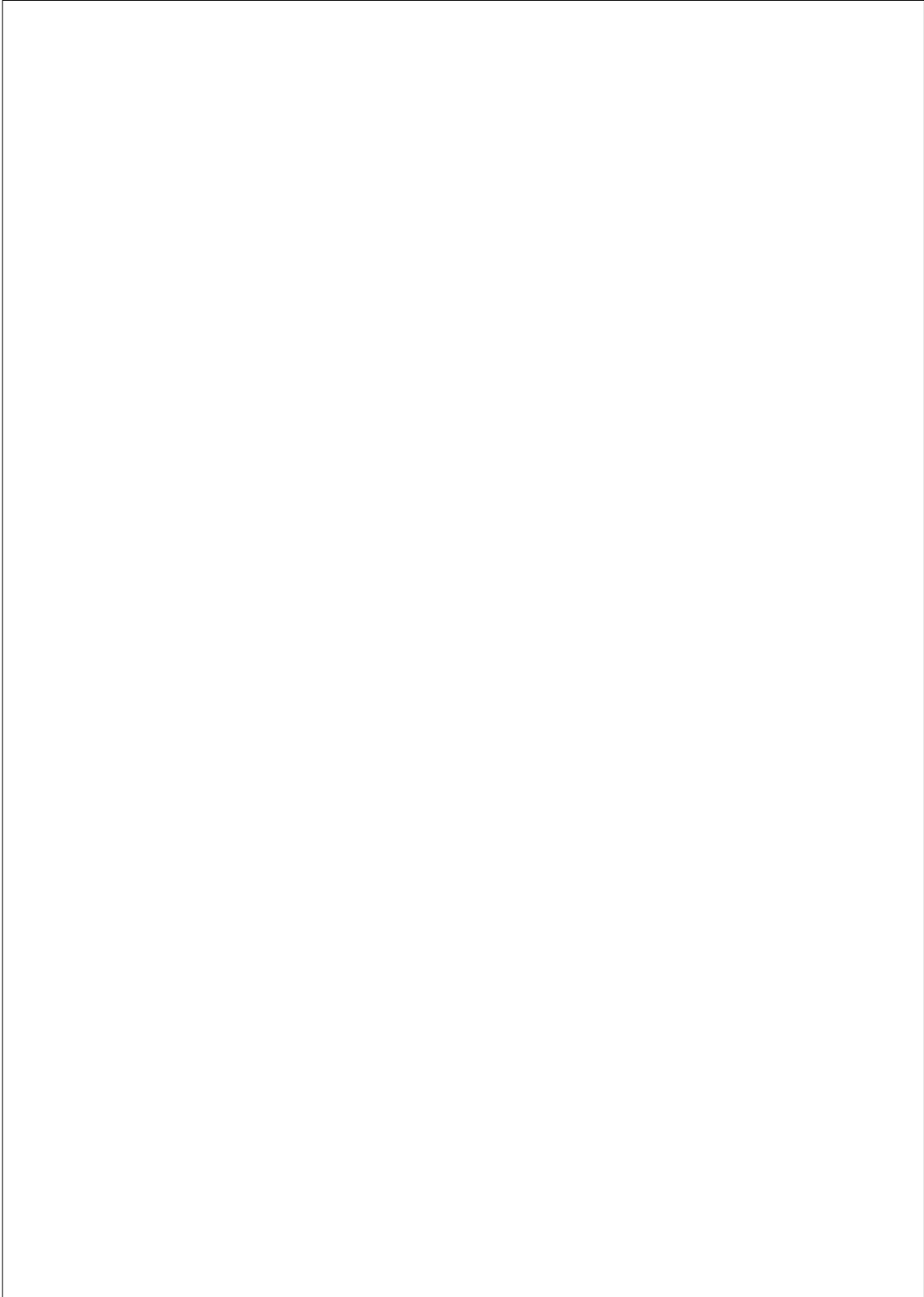
8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
								ציון

<u>סה"כ</u>

חלק א – ענו על 3 מבין השאלות 1-4

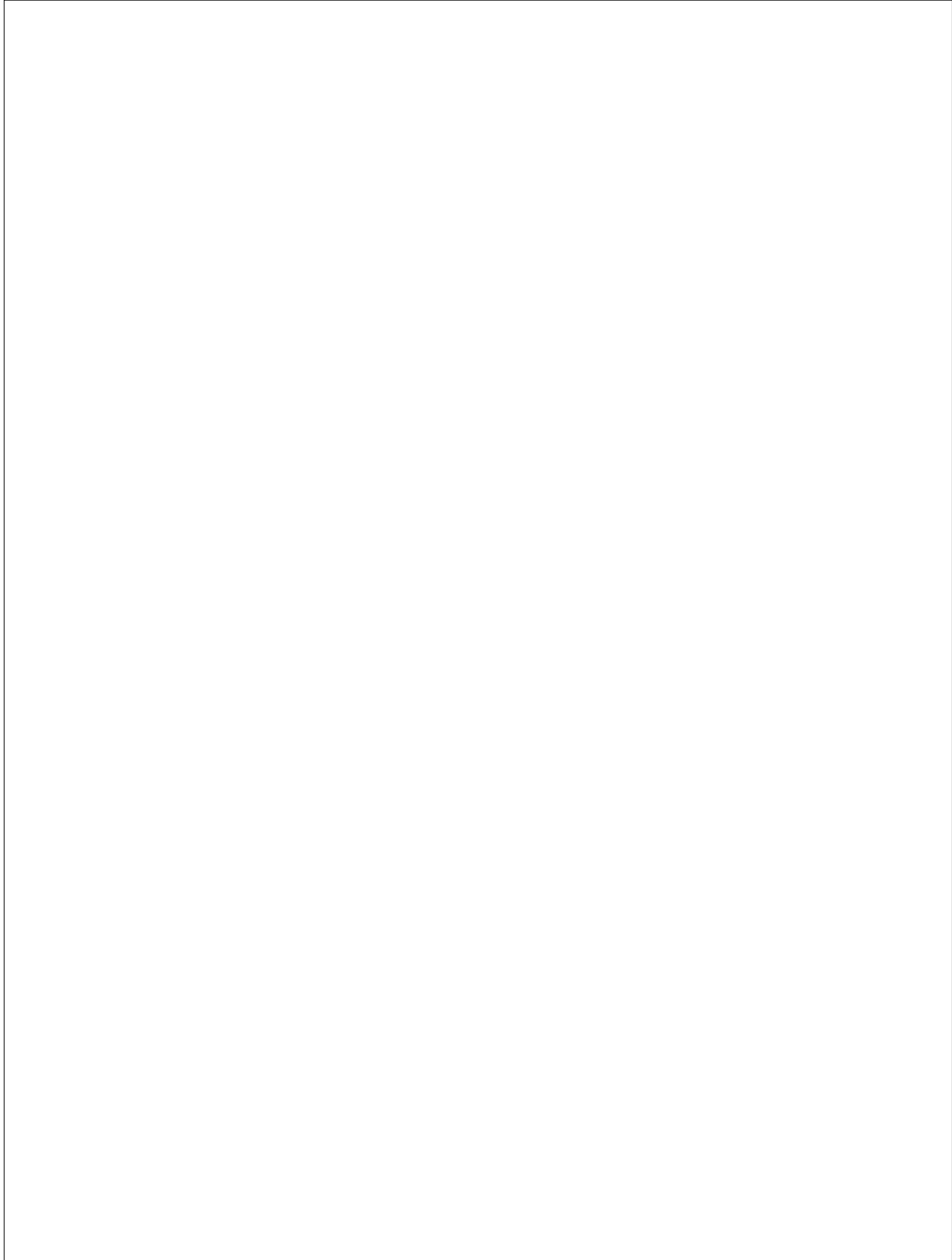
שאלה 1

יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי לא מכוון עם 30 קדקודים. נתון כי כל המעגלים ב- G הם באורך לפחות 5. הוכיחו כי מספר הצלעות הינו לכל היותר 46.



שאלה 2

עבור גרף $G = (V, E)$ נאמר כי פונקציה $C: E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ הינה k-צביעה חוקית של צלעות G אם לכל זוג צלעות $e_1, e_2 \in E$ שונות עבורן $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ (כלומר קיים להן קדקוד משותף) מתקיים כי $C(e_1) \neq C(e_2)$.
יהי G גרף 3-רגולרי המכיל מעגל המילטון, הראו כי קיימת 3-צביעה חוקית של צלעות G.



שאלה 3

יהי n המספר המינימלי המקיים: לכל גרף G על n קדקודים, או שהגרף G מכיל משולש (כלומר את (K_3) , או שהגרף המשלים \bar{G} מכיל מסלול מאורך 2 (כלומר את (P_3) . הוכיחו כי $n = 5$.

שאלה 4

יהי G גרף דו צדדי עם $2n$ קדקודים, כך שהקבוצה הבלתי-תלויה הגדולה ביותר שלו היא מגודל n . הראו כי ב- G יש זיווג מושלם.

חלק ב – ענו על 3 מבין השאלות 5-8

שאלה 5

הוכיחו באופן קומבינטורי כי לכל n טבעי חיובי, $\sum_{i=1}^n i(n-i+1) = \binom{n+2}{3}$.

שאלה 6

יהי $G = (V, E)$ גרף עם קב' קדקודים $V = \{1, \dots, n\}$.
 א. (7 נק') תהי π תמורה של V , תהי $\{u, v\} \in E \Rightarrow \pi(v) < \pi(u)$.
 $S = \{v \in V : \forall u \in V, \{u, v\} \in E \Rightarrow \pi(v) < \pi(u)\}$.
 (הקבוצה S היא אוסף כל הקדקודים המופיעים בתמורה π לפני כל שכניהם). הוכיחו כי S קבוצה בת"ל.

ב. (10 נק') הוכיחו כי קיימת ב- G קבוצה בת"ל בגודל לפחות $\sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)+1}$. (רמז: הגרילו תמורה של קבוצת הקדקודים V בהתפלגות אחידה והיעזרו בסעיף א' ולינאריות התוחלת).

מס' נבחן: _____

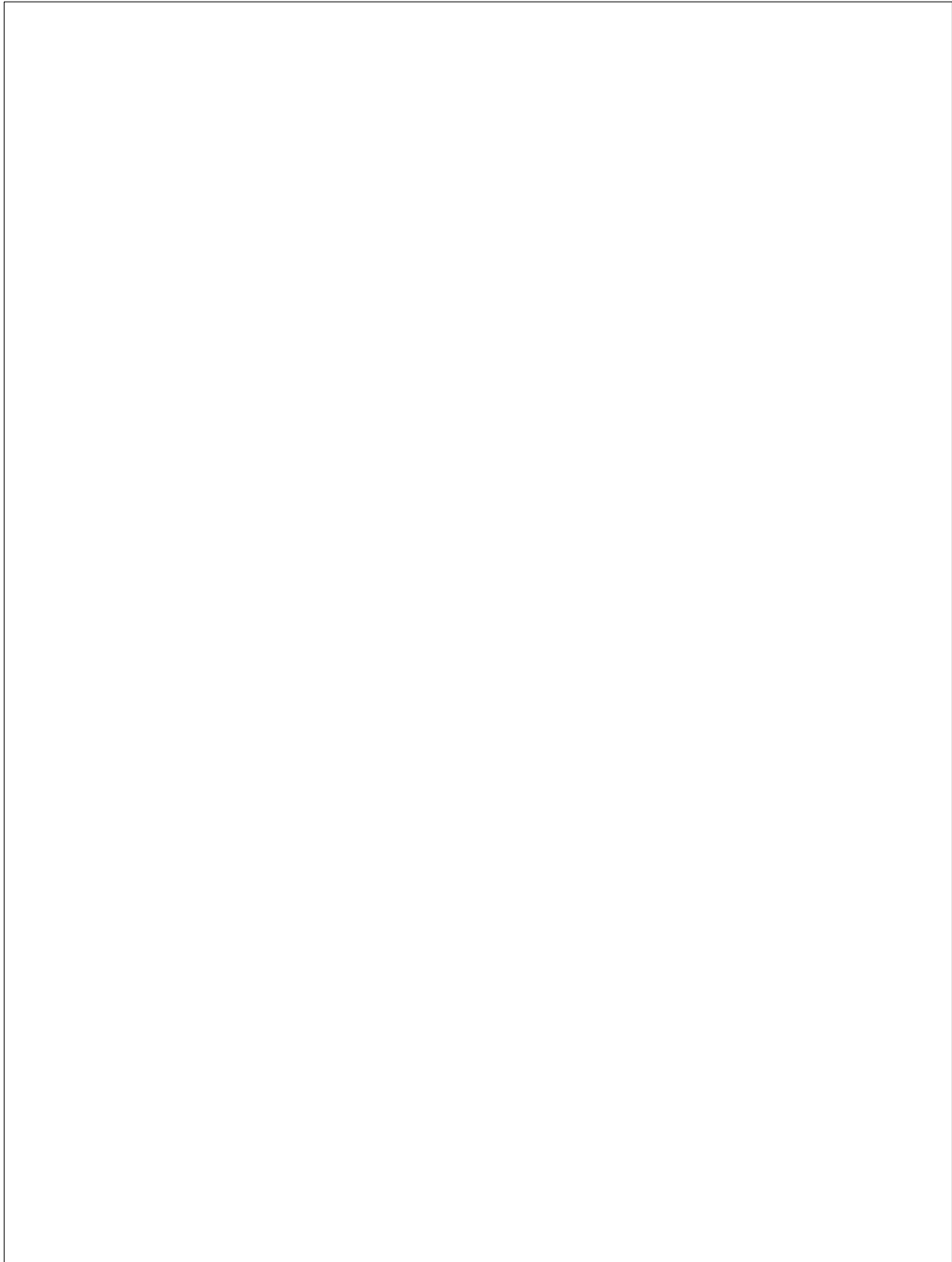
שאלה 7

נגריל עץ מתויג על n קדקודים בהתפלגות אחידה. מהי תוחלת מספר העלים בעץ?

מס' נבחן: _____

שאלה 8

הוכיחו את נוסחת אוילר: בגרף מישורי קשיר עם n קדקודים, m צלעות ו- f פאות מתקיים $n+f-m=2$.



בהצלחה !