

**אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב**

פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, ד"ר נתן רובין, יעל שטיין	מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א' סמסטר אביב
טל באומל, גלי בר-און, רחל סבן, מני סדיגורסקי, זיו עמרם, נתי פטר, ארנוולד פילצר	3.7.2017 9:00
אסור	חומר עזר
שלוש שעות	משך הבחינה

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק.** משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטייטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטייטה.**

$\Pr(f \geq \lambda E[f]) \leq \frac{1}{\lambda}$ אי-שוויון מרקוב:

$\Pr(|f - E[f]| \geq C) \leq \frac{Var[f]}{C^2}$ אי-שוויון צ'בישב:

בהצלחה !

8	7	6	5

4	3	2	1

שאלה
ציון

סה"כ

חלק א – ענו על 3 מבין השאלות 1-4

שאלה 1

יהי $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ מסלול פשוט עם n קדקודים.
א. (7 נק') בכמה דרכים ניתן לצבוע את קדקודי המסלול ב-5 צבעים (אדום, כחול, ירוק, צהוב ושחור), כך שלא תתקבל צלע מונוכרומטית (כלומר צלע ששני קדקודיה נצבעו באותו הצבע)?

ב. (10 נק') יהי a_n מספר הדרכים לצבוע את קדקודי P כך שלא תתקבל צלע מונוכרומטית וגם לא תתקבל צלע שאחד מקדקודיה אדום והשני כחול. יהי c_n מספר הדרכים לצבוע את קדקודי P עפ"י שתי הדרישות הללו וכך שצבעו של הקדקוד האחרון אינו אדום ואינו כחול.
בטאו את a_n באמצעות c_n ומצאו נוסחת נסיגה עבור c_n (אין צורך לפתור אותה).

שאלה 2

יהיו n ו- k מספרים שלמים חיוביים כך ש- $k \leq n$, תהי $A = \{1, 2, \dots, k\}$ ותהי $B = \{1, 2, \dots, n\}$. פונקציה עולה ממש $\omega : A \rightarrow B$ היא פונקציה המקיימת שלכל $i, j \in A$, אם $i > j$ אז $\omega(i) > \omega(j)$. תהי Ω קבוצת כל הפונקציות העולות ממש $\omega : A \rightarrow B$, עם התפלגות אחידה. Pr

א. (7 נק') מצאו את העוצמה של Ω .

ב. (10 נק') נגדיר משתנה מקרי $f : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ כך שלכל $\omega \in \Omega$, הערך של $f(\omega)$ הוא מספר נקודות השבת של הפונקציה ω . חשבו את התוחלת $E[f]$.

שאלה 3

בקורס בקומבינטוריקה יש 200 סטודנטים שצריכים להגיש פתרון לעבודת בית. לכל סטודנט, ההסתברות שהגיש פתרון לעבודה 1 בניילונית היא $2/3$. אם סטודנט הגיש את עבודה 1 עם ניילונית, אז ההסתברות שהגיש את עבודה 2 בניילונית היא $3/4$ (גדולה יותר).^(*)

אם סטודנט הגיש את עבודה 1 בלי ניילונית, אז ההסתברות שהגיש את עבודה 2 בניילונית היא 0.3. יהי X משתנה מקרי שערך מספר הפתרונות לעבודה 2 שהוגשו בניילונית, הוכיחו $\Pr[X < 150] \geq \frac{1}{5}$

שאלה 4

הוכיחו שבגרף 4-רגולרי קשיר, ניתן לצבוע את הצלעות בשני צבעים, אדום וכחול, כך שכל קודקוד יהיה מוכל בבדיוק 2 צלעות מכל צבע.

חלק ב – ענו על 3 מבין השאלות 5-8

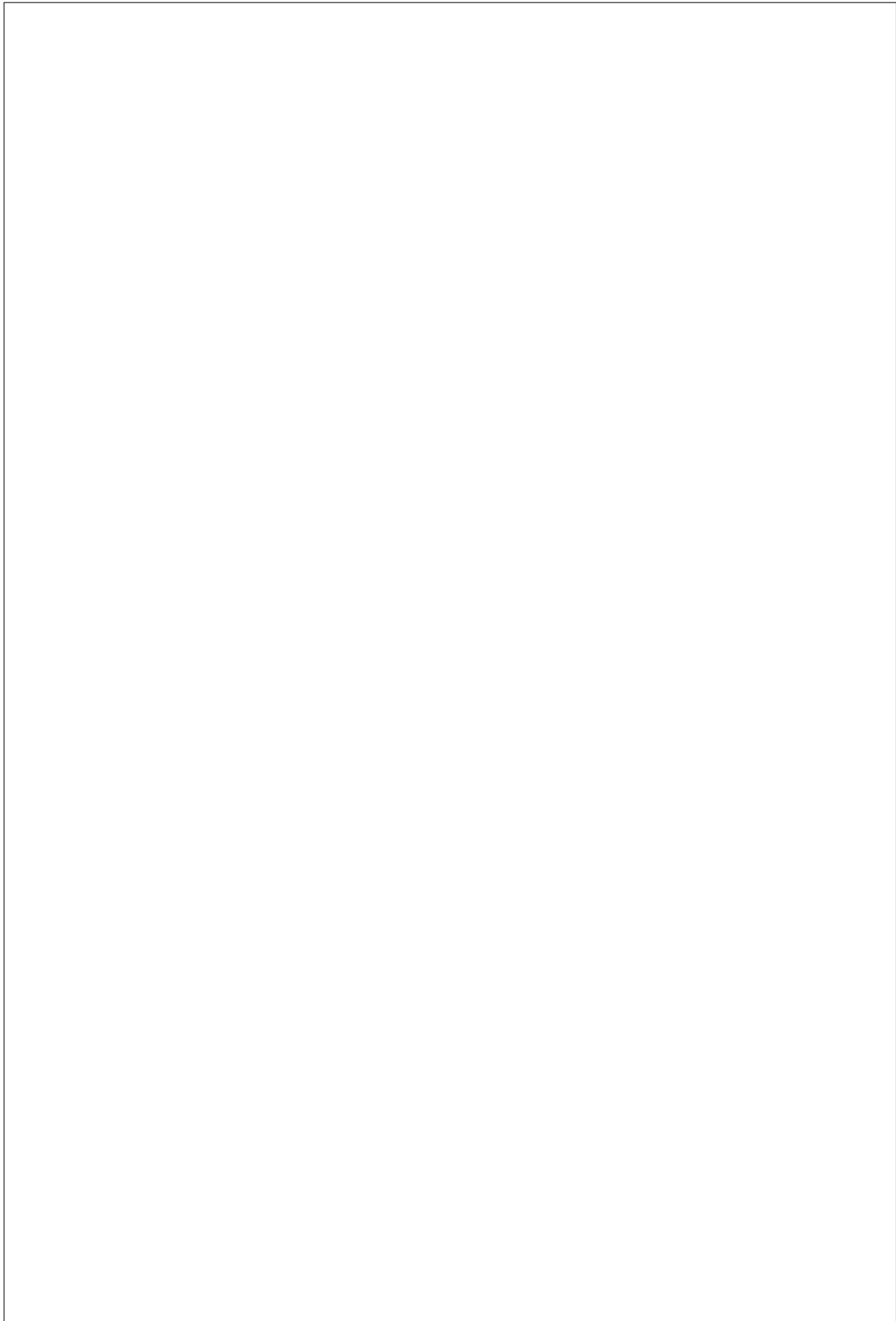
שאלה 5

הוכיחו כי בגרף עם n קודקודים שלא מכיל K_4 כתת גרף, יש לכל היותר $\frac{n^2}{3}$ צלעות.

מס' נבחן: _____

שאלה 6

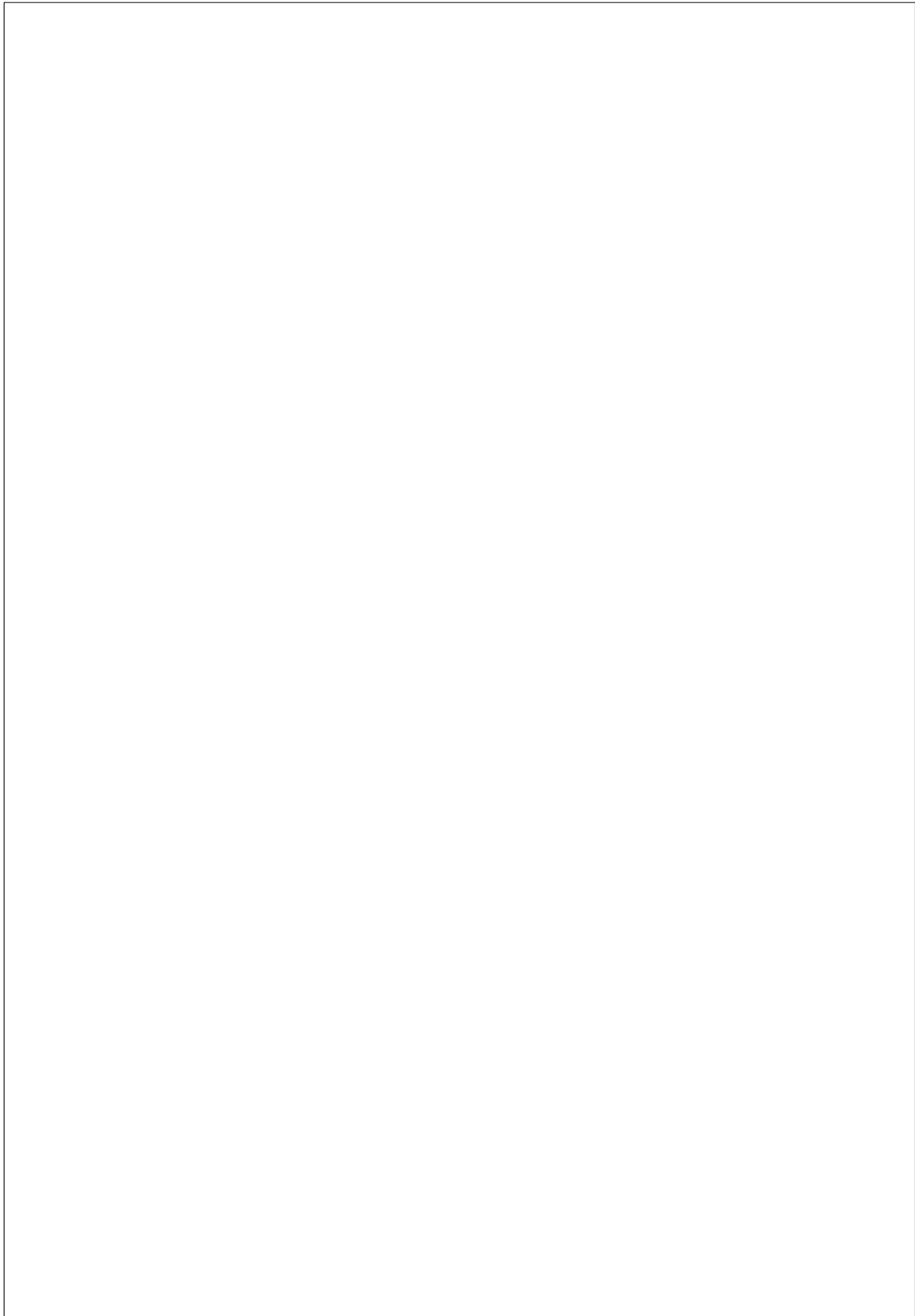
הוכיחו שבכל גרף פשוט על 100 קודקודים שדרגת כל קודקוד בו היא לפחות 10, יש מעגל שאורכו לכל היותר 4.



מס' נבחן: _____

שאלה 7

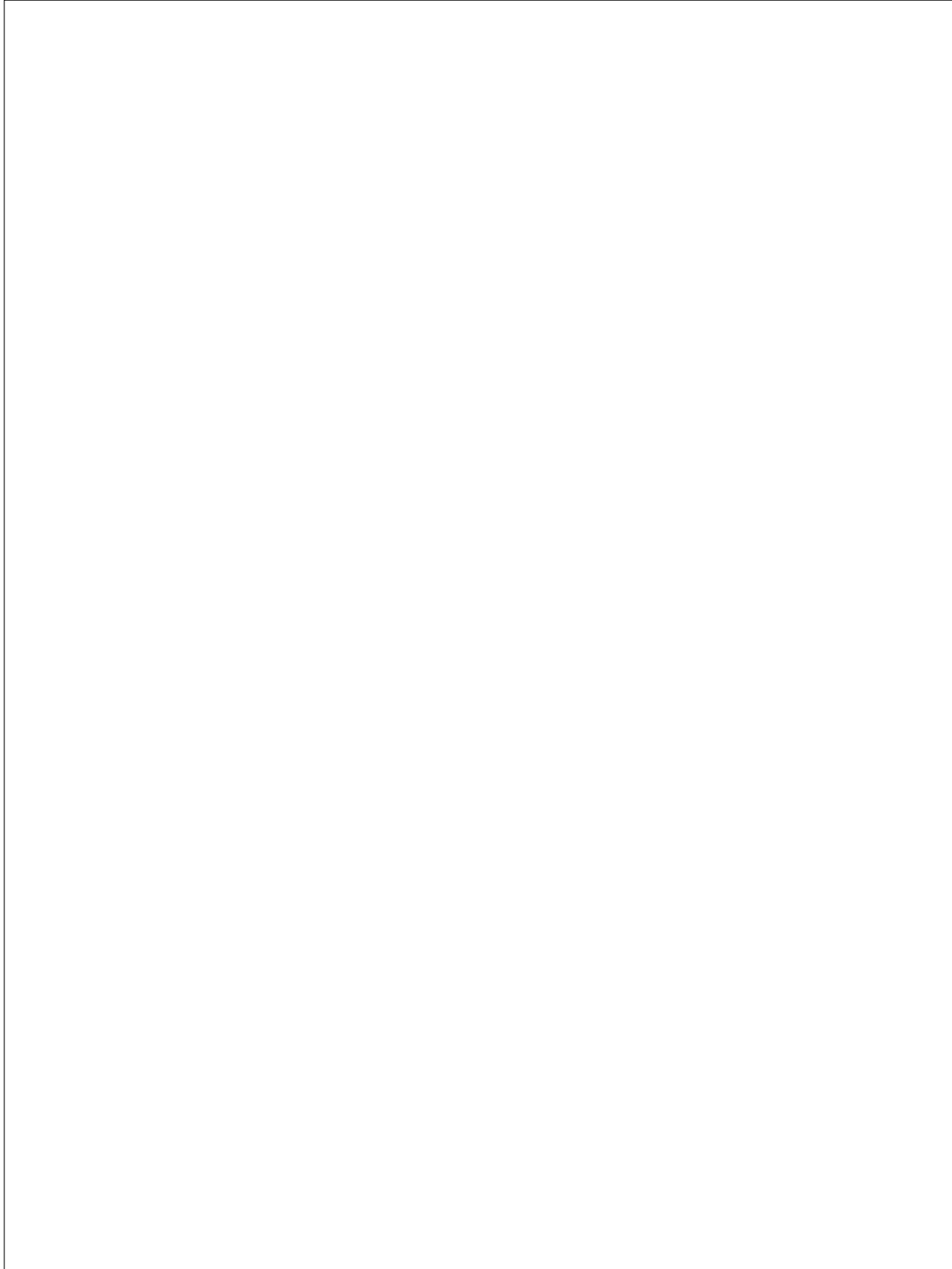
יהי $G = (V_1, V_2, E)$ גרף דו צדדי, ונניח כי $|V_1| = |V_2|$.
הוכיחו כי אם הגרף הוא d -רגולרי אז קיימים בגרף d זיווגים מושלמים זרים בזוגות.



שאלה 8

הוכיחו את הכיוון "המעניין" של משפט Hall:

יהי $G = (V_1, V_2, E)$ גרף דו-צדדי בו $|V_1| = |V_2|$. אם לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$, אזי יש ב- G שידוך מושלם.



בהצלחה !