מס' נבחן:________________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' סמסטר אביב	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית ד"ר נתן רובין, יעל שטיין
27.7.2016 9:00	טל באומל, ד"ר לילך הייטמן-ירושלמי, ד"ר סטוארט סמית, נתי פטר, ארנולד פילצר, עמית רוקה
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק**. משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8
ציון								

סה"כ	

מס' נבחן:________________

חלק א – ענה על 3 מבין השאלות 1-4

שאלה 1

הוכיחו כי בגרף חסר משולשים עם n קדקודים קיימת קבוצה בלתי-תלויה מגודל לפחות $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

לפי משפט Erdös-Szekeres מתקיים $R(3,\lfloor\sqrt{n}\rfloor) \leq \binom{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+3-2}{3-1} = \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor\cdot(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)}{2} \leq n$
ולכן בכל גרף עם n קודקודים יש קליקה מגודל 3 או קבוצה בת"ל מגודל $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. כיוון שהגרף הנתון חסר משולשים, תהיה בו קבוצה בת"ל מגודל $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 2</u>

יהי T עץ שקוטרו לפחות 5. הוכיחו כי הגרף המשלים $\bar{T}$ בהכרח מכיל מעגל המילטון.

נרצה להשתמש במשפט Ore. נביט בזוג קודקודים u,v שאינם שכנים בגרף $\bar{T}$, כלומר הם שכנים בעץ T. אין להם שכנים משותפים בעץ (אחרת היה מעגל ב-T). כמו כן, לגרף המושרה על u,v ושכניהם יש קוטר לכל היותר 3, ולכן נובע שישנם לפחות 2 קודקודים אחרים x,y שאינם שכנים של u או v. נקבל כי $deg_T(u) + deg_T(v) \leq n - 2$: הצלע ביניהם תורמת 2 לסכום הדרגות, ויש רק n-4 קודקודים אחרים (שאינם u,v,x,y) שעשויים להיות שכניהם.

בגרף $\bar{T}$ מתקיים כי $deg_{\bar{T}}(u) = n - 1 - deg_T(u)$ ובאופן דומה עבור v, לכן

$$deg_{\bar{T}}(u) + deg_{\bar{T}}(v) \geq 2(n-1) - (n-2) = n$$

קיבלנו כי תנאי Ore מתקיים, לכן יש מעגל המילטון ב-$\bar{T}$.

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 3</u>

כמה עצים מתויגים על n קדקודים ישנם עם בדיוק 3 עלים?

בהינתן עץ מתוייג T, וקוד פרופר המתאים לעץ $\pi(T)$, קודקוד $i\in[n]$ הוא עלה אם"ם אינו מופיע בקוד פרופר. כלומר, אם בעץ יש בדיוק 3 עלים, אז יש בדיוק 3 מספרים שלא מופיעים בקוד פרופר. לעומת זאת, אם בקוד פרופר יש בדיוק 3 מספרים שלא מופיעים, אז בעץ המתאים לקוד יש בדיוק 3 עלים.

לסיכום: אנחנו צריכים לספור כמה סדרות יש מעל המספרים $\{1,2,\dots,n\}$ באורך $n-2$ (קודי פרופר) בהם ישנם <u>בדיוק</u> 3 מספרים שאינם מופיעים.

תחילה נבחר איזה קודקודים יופעו בקוד: $\binom{n}{n-3}$ אפשרויות. עכשיו יש $n-2$ מקומות, כל קודקוד מופיע לפחות פעם אחד, ולכן יש בדיוק קודקוד בודד המופיע פעמיים. לכן יש לנו $n-2$ מקומות לסדר בהם $n-3$ קבוצות, כאשר כולן מגודל 1 ורק אחת מקודל 2. סך האפשרויות הינו $\binom{n-2}{2,1,\dots,1}$. סה"כ קיבלנו:

$\binom{n}{n-3}\bullet(n-3)\bullet\binom{n-2}{2,1,\dots,1}=\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\bullet\frac{(n-2)!}{2}\bullet(n-3)=\frac{n!}{6}\bullet\binom{n-2}{2}$ אפשרויות.

שאלה 4

יהי G גרף 4-רגולרי מישורי, בו כל פאה היא משולש או מרובע (ולכן כל צלע חלה בבדיוק 2 פאות). כמה משולשים ישנם?

נשים לב כי הגרף בהכרח קשיר, זאת מכיוון שבמידה והגרף אינו קשיר, ישנם לפחות 2 רכיבי קשירות. נתבונן בפאה f המכילה צלעות מ2 רכיבי קשירות. מכיוון שהגרף הוא 4 רגולרי, כל רכיב קשירות תורם ל f לפחות 3 צלעות (או יותר). בפרט f חלה על לפחות 6 צלעות, סתירה לנתון.

נסמן ב-F את קבוצת הפאות של G, וב-k את מספר המשולשים בגרף.
כיוון שהגרף 4-רגולרי נקבל ממשפט הדרגות $2|\mathrm{E}| = \sum_{\mathrm{v}\in\mathrm{V}} \deg(\mathrm{v}) = 4|V|$ ולכן $|\mathrm{V}| = \frac{1}{2}|E|$.
הגרף מישורי וקשיר, לכן ניתן להשתמש בנוסחת אוילר ונקבל
$2 = |V| + |F| - |E| = |F| - \frac{|E|}{2}$.
עבור פאה $f \in F$ נסמן ב - *t(f)* את מספר הצלעות שמקיפות אותה. כיוון שכל פאה היא משולש או מרובע, כל צלע חלה ב-2 פאות בדיוק, ולכן נקבל
$2|E| = \sum_{f\in F} t(f) = 3k + 4(|F| - k) = 4|F| - k$ כלומר $|E| = 2|F| - \frac{1}{2}k$.
נציב בנוסחה שקיבלנו קודם לכן ונקבל $2 = |F| - \left(|F| - \frac{k}{4}\right) = \frac{k}{4}$, כלומר מספר המשולשים הינו *k=8*.

מס' נבחן:_______________

<u>חלק ב – ענה על 3 מבין השאלות 5-8</u>

<u>שאלה 5</u>

נסחו נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה עבור מספר הסדרות מאורך n מעל {0,1} המכילות לפחות זוג אחד של 0-ים סמוכים.

נגדיר: a_n – מספר הסדרות מאורך n המכילות לפחות זוג אחד של אפסים סמוכים.
נבחן את האפשרויות השונות עבור הרישא של סדרה כנ"ל:
<u>עבור הרישא 1</u> – יש להשלים לסדרה כנ"ל ע"י שרשור של סדרה באורך $n-1$ עם לפחות זוג אחד של אפסים סמוכים, ויש לכך a_{n-1} סדרות אפשריות.
<u>עבור הרישא 01</u> - יש להשלים לסדרה כנ"ל ע"י שרשור של סדרה באורך $n-2$ עם לפחות זוג אחד של אפסים סמוכים, ויש לכך a_{n-2} סדרות אפשריות.
<u>עבור הרישא</u> 00 – כבר יש לנו זוג אחד של אפסים סמוכים, לכן כל סדרה באורך $n-2$ שנשרשר תהיה סדרה כנ"ל, ויש לכך 2^{n-2} סדרות אפשריות.
<u>בסה"כ קיבלנו:</u> $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$.
<u>תנאי ההתחלה:</u> $a_0 = 0, a_1 = 0$.

מס' נבחן:_______________

שאלה 6

הוכיחו את משפט Ore. יהי $G=(V,E)$ גרף עם n קדקודים, $n \geq 3$, המקיים את התכונה: לכל $u \neq v \in V$ כך ש $\{u,v\} \notin E$, $\deg(u)+\deg(v) \geq n$. אזי G מכיל מעגל המילטון.

הוכח בהרצאה

שאלה 7

נניח כי m קשתים יורים לעבר n מטרות, כל קשת יורה לעבר מטרה אחת, אותה הוא בוחר באופן מקרי ואחיד (אין תלות בין בחירות הקשתים). יהי X משתנה מקרי שערכו מספר המטרות שלא נורה לעברן חץ, חשבו את $\mathbb{E}[X]$.

עבור $1 \leq i \leq n$, נגדיר את X_i להיות אינדיקטור עבור המאורע A_i, שהוא שלא נורה חץ לעבר המטרה ה-i .
נבחין כי מתקיים $X = X_1 + \cdots + X_n$, לכן מלינאריות התוחלת $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$.
בנוסף מפני שכל קשת יורה לעבר מטרה אחת, אותה הוא בוחר באופן מקרי ואחיד, ההסתברות שקשת מסויים יפגע במטרה ה-i היא $\frac{1}{n}$, לכן ההסתברות שהוא לא יפגע בה היא $1 - \frac{1}{n}$.
מכך נסיק כי $E(X_i) = \Pr(A_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$, שכן לא נורה חץ למטרה ה-i אם אף קשת לא פגע בה.
<u>**בסה"כ נקבל:**</u> $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$.

שאלה 8

סטודנט נבחן באחת מבין הכיתות 101,102,103,104,105, בהסתברויות הבאות:

$$p(101) = 0.15 \quad p(102) = 0.2 \quad p(103) = 0.05 \quad p(104) = 0.5 \quad p(105) = 0.1$$

בכל כיתה יש הסתברות מסוימת שהבחינה תלך לאיבוד במהלך איסוף המחברות. להלן ההסתברויות שהבחינה תלך לאיבוד:

$$p(101) = 0.2 \quad p(102) = 0.6 \quad p(103) = 0.4 \quad p(104) = 0.2 \quad p(105) = 0.1$$

מה ההסתברות שהסטודנט נבחן בכיתה 102, אם מחברת הבחינה שלו לא נמצאה בכיתה 104 לאחר איסוף המחברות?

נסמן את המאורע שסטודנט נבחן בכתה i ע"י exam=i,
ואת המאורע שהמחברת איננה בין מחברות כיתה i ע"י not in i.

אנו נדרשים לחשב את: $pr(exam = 102\ |not\ in\ 104)$.

נשים לב ש: $pr(exam = 102\ |not\ in\ 104) = \frac{pr(not\ in\ 104\ |\ exam=102)\cdot pr(exam=102)}{pr(not\ in\ 104)}$

כעת, $pr(exam = 102) = 0.2$, $pr(not\ in\ 104\ |\ exam = 102) = 1$.

נשאר לחשב את $pr(not\ in\ 104)$.

$$\begin{aligned} pr(not\ in\ 104) &= \\ &pr(not\ in\ 104 \cap exam = 104) + pr(not\ in\ 104 \cap exam \neq 104) \\ &= pr(not\ in\ 104|exam = 104) \cdot pr(exam = 104) \\ &+ pr(not\ in\ 104|exam \neq 104) \cdot pr(exam \neq 104) \\ &= 0.2 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.6 \end{aligned}$$

נציב את המספרים:

$$pr(exam = 102\ |not\ in\ 104) = \frac{pr(not\ in\ 104\ |\ exam=102)\cdot pr(exam=102)}{pr(not\ in\ 104)} = \frac{1\cdot 0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

בהצלחה !