אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

בוחן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, גב' יעל שטיין
8.5.2015 09:00	טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר, גיל קרן
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שעתיים וחצי

<u>הנחיות חשובות:</u>

- הבוחן מורכב משני חלקים.

  בחלק א' **<u>עליכם לענות על 2 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 3. משקלה של כל שאלה הוא 30 נקודות. בכל שאלה ישנם שני סעיפים עליהם נדרשת תשובה מפורטת ומנומקת.

  בחלק ב' **<u>עליכם לענות על 4 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 10 נקודות. בחלק זה אין לכתוב נימוק באף שאלה.

- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו או לשאלה כלשהי, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף או השאלה.** אין לכתוב "לא יודעים" על חלק מסעיף.

- רצוי לפתור את הבוחן תחילה במחברת הטיוטה ולאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת הבוחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	**א1**		**א2**		**א3**		**ב1**	**ב2**	**ב3**	**ב4**	**ב5**
ציון											

<u>סה"כ</u>	

<u>חלק א:</u> ענו על 2 מתוך 3 השאלות הבאות. <u>נמקו</u> את תשובותיכם:

<u>שאלה 1</u> (30%)

א. (15%) הוכיחו <u>קומבינטורית</u> את הזהות הבאה: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

בכמה דרכים ניתן לבחור שני נציגים מתוך קבוצה בת n נשים ו- n גברים?
אגף שמאל: כמספר הדרכים לבחור שני אנשים מתוך קבוצה בת 2n אנשים.
אגף ימין: כמספר הדרכים לבחור שתי נשים (מתוך n הנשים) ועוד מספר הדרכים לבחור שני גברים (מתוך n הגברים) ועוד מספר הדרכים לבחור זוג (מתוך 2n האנשים) המורכב מאישה אחת וגבר אחד.

ב. (15%) בהינתן מצולע בעל 12 קדקודים מובחנים, בכמה דרכים ניתן לבחור 3 מקדקודיו מבלי שייבחרו שניים סמוכים?

דרך 1:
נתייחס תחילה לבעייה כאילו יש חשיבות לסדר הבחירה.
יש 12 אפשרויות לבחירת הקודקוד הראשון. לאחר מכן, יש 9 אפשרויות לבחירת הקודקוד השני המתחלקות ל2. ב2 מתוך 9 האפשרויות האלה, הקודקוד הנבחר הוא במרחק בדיוק 2 מהקודקוד הראשון. במקרה זה יש 7 אפשרויות לבחירת הקודקוד השלישי. בשאר האפשרויות (7) הקודקוד השני הנבחר במרחק גדול מ2 מהקודקוד הראשון. במקרה זה יש 6 אפשריות לבחירת הקודקוד השלישי.
את התוצאה צריך לחלק במספר הסידורים הפנימיים של הבחירות כיוון שאין חשיבות לסדר. סה"כ:

$$\frac{12*(2*7+7*6)}{3!}=112$$

דרך 2:
סך כל האפשרויות לבחור 3 קודקודים מתוך 12 ללא חשיבות לסדר הוא $\binom{12}{3}$
נסמן A_i – מספר הסידורים בהם קיים זוג המספרים i,i+1 (כאשר אם i=12 הכוונה לזוג 12,1)

$$|A_i|=10$$

כיוון שצריך לבחור קודקוד נוסף מתוך עשרת הקודקודים בנוסף ל i,i+1.
כמו כן, מספר הקבוצות כנ"ל הוא 12 (אחת לכל i).
אם j=i+1 (או j=1 ו i=12) אזי:

$$|A_i\cap A_j|=1$$

כיוון שזו בעצם בחירה של השלשה *i,i+1,i+2*.
קיימות 12 שלשות כאלה ובכל מקרה אחר

$$|A_i\cap A_j|=0$$

כעת לפי עיקרון ההכלה וההדחה, מספר האפשרויות לבחירה הנ"ל הוא:

$$\binom{12}{3}-12*10+12*1=220-120+12=112$$

אפשר גם לספור כמה מקרים יש שבהם **בדיוק 2 קודקודים סמוכים נבחרו ו**בדיוק** 3 קודקודים סמוכים נבחרו ולחסר את שניהם מסך כל המקרים.

דרך 3:
נחשוב על הבעיה כעל סידור 3 מחיצות ו9 כדורים בשורה כאשר כל מחיצה מסמלת מספר שנבחר וכל כדור מסמן מספר שלא נבחר. נשים את 3 המחיצות ונשים כדור בין המחיצה הראשונה לשנייה ובין המחיצה השנייה לשלישית. כעת נותר לנו לסדר 7 כדורים ב4 תאים עם חזרות וללא חשיבות לסדר:

$$\binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120$$

אולם מקרה זה מחשיב גם את המקרים בהם אין כדורים בשני התאים הקיצוניים - כלומר מקרים בהם גם 1 וגם 12 ייבחרו אך אף שכן נוסף שלהם לא. לכן נספור כמה מקרים כאלה קיימים --> 8 מקרים כאלה קיימים(בחירת קודקוד נוסף שאינו שכן שלהם). אם כך הפתרון:

$$120-8=112$$

<u>שאלה 2</u> (30%)

א. (15%) תהי $B = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$ קבוצה של 10 מספרים טבעיים כך ש-
$1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_{10} \le 100$.
הוכיחו כי קיימות שתי תתי-קבוצות שונות של B שסכום האיברים שלהן שווה.

ל-B יש 2^{10} תתי קב' שונות.
סכום תת קב' הוא מס' שלם בין 0 (תת הקב' הריקה) לבין 955 (הסכום של אברי הקב' $\{91,92,\dots,100\}$, שזו קב' בגודל 10).
נגדיר את תתי הקב' של B להיות היונים ואת 956 הסכומים האפשריים להיות השובכים, ונתאים בין תת קב' לתא המתאים לערך סכום אברי תת הקב'.
אז בהכרח קיים שובך שבו יש לפחות 2 יונים, כלומר 2 תתי קב' של B שסכום אבריהן זהה.

טעויות נפוצות:
- סכום אברי B הוא בין 55 ל955, ולכן סכום תתי קב' של B הוא בטווח הזה גם כן.
- התעלמות מהקב' הריקה ע"י אמירה שבעצם הטווח הוא 1-955.

* היו סטודנטים שנתנו חסמים גסים יותר, כלומר סכום תת קב' קטן ממש מ1000. זה בסדר גמור לטעון זאת! זו ממש לא טעות.

ב. (15%) בכיתה יש סטודנטים מ-4 מסלולים שונים: מדעי המחשב, מתמטיקה, הנדסת תוכנה וביואינפורמטיקה. לכל מסלול משתייכים בדיוק n סטודנטים. כמו כן, לכל מסלול מוקצה ספסל בכיתה. יש לבחור k סטודנטים ($k \leq n$) מתוך כלל הסטודנטים, להוציאם מהכיתה ואת הסטודנטים שנותרו בכיתה להושיב על 4 הספסלים, כל סטודנט בספסל המוקצה למסלול הלימודים שלו (יש חשיבות לסדר הישיבה על הספסל). בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

יש להציג את התשובה כביטוי סגור. תשובה כסכום תקבל ניקוד חלקי (10%).

רמז: על מנת לעבור מסכום לביטוי סגור יש להיעזר במשפט המולטינום:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot {x_1}^{n_1} \cdot {x_2}^{n_2} \cdots {x_k}^{n_k}$$

אם היינו יודעים שצריכים להבחר k_1, k_2, k_3, k_4 אנשים מתוך המסלולים השונים אז: קיימות $\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n}{k_2} \cdot \binom{n}{k_3} \cdot \binom{n}{k_4}$ אפשרויות לבחירה זאת. לאחר מכן, בתוך כל קבוצה נסדר את שאר האנשים על ספסל, לכך יש $(n-k_i)!$ אפשרויות בקבוצה ה-i. סה"כ קיבלנו

$$\binom{n}{k_1}\binom{n}{k_2}\binom{n}{k_3}\binom{n}{k_4}(n-k_1)!\,(n-k_2)!\,(n-k_3)!\,(n-k_4)!$$

אפשרויות.

אך ה- k_iים לא ידועים. אז נעבור על כל הבחירות האפשריות של רביעיות k_1, k_2, k_3, k_4 ונקבל

$$\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=k} \binom{n}{k_1}\binom{n}{k_2}\binom{n}{k_3}\binom{n}{k_4}(n-k_1)!\,(n-k_2)!\,(n-k_3)!\,(n-k_4)!$$

$$= (n!)^4 \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=k} \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot k_4!}$$

נשים לב כי הביטוי דומה לפיתוח המולטינום של 4^k, ואכן

$$\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=k} \frac{1}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!} 1^{k_1}1^{k_2}1^{k_3}1^{k_4}$$

$$= \frac{(1+1+1+1)^k}{k!} = \frac{4^k}{k!}$$

סה"כ מספר האפשרויות הנדרש הוא $\frac{(n!)^4 \cdot 4^k}{k!}$.

טעויות נפוצות:

הרבה סטודנטים הציעו לבחור k מתוך 4n הסטודנטים ולכך יש לכאורה $\binom{4n}{k}$ אפשרויות, אך אז מקבלים

$$\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=k} \binom{4n}{k}(n-k_1)!\,(n-k_2)!\,(n-k_3)!\,(n-k_4)!$$

ויש פה חזרות, כי בעצם כבר החלטנו כמה יצאו מכל מסלול (k_i) אך במניה $\binom{4n}{k}$ אנו מאפשרים כל חלוקה של k ל-4 המסלולים.

יש סטודנטים שניסו לחלק את k ל-4 המסלולים ע"י פתרון המשוואה $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k$, אך גם כאן קיבלו ספירות כפולות.

הרבה סטודנטים לא בחרו בנוסחה הנכונה לסידור אנשים בשורה. ראיתי ביטויים של n^{k_i}.

יש סטודנטים שלא הסבירו איך הגיעו לביטויים השונים. גם על זה ירדו נק'.

טעות חמורה נוספת שחזרה על עצמה: תשובה סופית שתלויה במשתנים שאינם חלק מנתוני השאלה. לדוג' ביטוי שתלוי בk_iים.

<u>שאלה 3</u> (30%)

א. (15%) סדרת מספרים באורך k נקראת "יונימודאלית" אם קיים ערך $1 \le i \le k$ כך שהרישא של הסדרה עד המקום ה- i (כולל) היא סדרה עולה והסיפא שלה החל מהמקום ה- i (כולל) היא סדרה יורדת.
לדוגמא: הסדרה 1,4,6,8,5,3 היא סדרה יונימודאלית עבור $i = 4$, $k = 6$.
בכמה דרכים ניתן לבנות סדרה יונימודאלית באורך k המורכבת מ-k מספרים שונים מבין $\{1, \dots, n\}$?

יש להציג את התשובה <u>כביטוי סגור</u>.

קודם כל נחשב את מספר הסדרות היונימודאליות שניתן לבנות מ- k מספרים שונים נתונים.

דרך I: האיבר הגדול ביותר M מבין k המספרים יכול להופיע במקום i כלשהו בסדרה, $1 \le i \le k$. נתון i, יש $\binom{k-1}{i-1}$ דרכים לבחור בקבוצת $i-1$ המספרים שיופיעו ברישא של איברים לפני M, ויש רק דרך אחת לסדר אותם בסדר עולה. הבחירה הזאת גם קובעת את קבוצת $k-i$ האיברים שמופיעים אחרי M בסדרה, ויש כמובן רק דרך אחת לסדר אותם בסדר יורד. לכן יש $\binom{k-1}{i-1}$ סדרות יונימודאליות מאורך k שבהן האיבר הגדול ביותר מופיע במקום ה- i. אז מספר הסדרות היונימודיאליות מאורך k הוא $\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}$. הסכום הזה שווה ל- $\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j} = 2^{k-1}$.

דרך II: שוב נסמן ב- M את האיבר הגדול ביותר בקבוצת k המספרים. יש 2^{k-1} אפשרויות עבור קבוצת המספרים שיופיעו לפני M בסדרה ויש דרך אחת לסדר אותם בסדר עולה. יש גם רק דרך אחת לסדר את שאר האיברים בסדר יורד בסיפא של הסדרה אחרי M. לכן יש 2^{k-1} סדרות יונימודיאליות באורך k.

עכשיו נניח ש- n מספר שלם חיובי. לכל מספר שלם חיובי k כך ש- $1 \le k \le n$, יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור בתת-קבוצה של k איברים מתוך $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$, ולאחר מכן יש 2^{k-1} דרכים לסדר אותם בסדרה יונימודיאלית. לכן יש $\binom{n}{k}2^{k-1}$ דרכים לבנות סדרה יונימודיאלית באורך k שמורכבת מ- k מספרים שונים מבין $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

ב. (15%) מה מספר הפונקציות $f:\{1,\dots,10\}\to\{1,2,3\}$ שהן 'על' ובהן 1 ו-2 אינן נקודות שבת?

כל מנייה של פונקציות בפתרון מתייחסת כמובן רק לפונקציות מ-$\{1,\dots,10\}$ ל-$\{1,2,3\}$.
נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. נסמן:

S - פונקציות בהן 1,2 אינן נקודות שבת.
A_1 - פונקציות בהן 1,2 אינן נקודות שבת, ו-1 אינו בתמונה.
A_2 - פונקציות בהן 1,2 אינן נקודות שבת, ו-2 אינו בתמונה.
A_3 - פונקציות בהן 1,2 אינן נקודות שבת, ו-3 אינו בתמונה.
נרצה למצוא את $|S\setminus(A_1UA_2UA_3)|$.
נחשב את גודל הקבוצות:
$|S|=2\cdot 2\cdot 3^8$ משום שישנן 2 אפשרויות עבור $f(1)$, ישנן 2 אפשרויות עבור $f(2)$, ועבור כל היתר ישנן 3 אפשרויות.
$|A_1|=|A_2|=2^9$ כי ישנו מספר אחד עבורו יש רק אפשרות אחת (למשל במקרה של $|A_1|$ חייב להתקיים ש$f(2)=3$), ועבור כל היתר ישנן שתי אפשרויות.
$|A_3|=2^8$ כי עבור $f(1),f(2)$ ישנה רק אפשרות אחת, ועבור כל היתר שתי אפשרויות.
$|A_1\cap A_2|=1$ כי 3 הוא המספר היחיד שנשאר בטווח.
$|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=0$ כי במקרה זה לא יתכן ש1 או 2 לא יהיו נקודות שבת.
החיתוכים של 3 קבוצות ריקים גם הם, כי לא נשאר אף איבר אפשרי בטווח.
לכן סה"כ נקבל: $|S\setminus\{A_1UA_2UA_3\}|=4\cdot 3^8-2\cdot 2^9-2^8+1$.

טעות מאוד נפוצה היתה בחישוב מספר הפונקציות על שקיימות מ$\{1,\dots,10\}$ ל$\{1,2,3\}$, כמו בדוגמא הבאה:
על מנת להבטיח שהפונקציה תהיה על, נבחר מספר שתמונתו תהיה 1 (יש 10 אפשרויות, אנחנו לא מתחשבים כעת בנקודות שבת). נבחר מספר אחר שתמונתו תהיה 2 (יש לכך 9 אפשרויות), ומספר אחד שתמונתו תהיה 3 (יש 8 אפשרויות). יתר המספרים יכולים לקבל כל ערך (לכן 3^7 אפשרויות).
סה"כ $10\cdot 8\cdot 9\cdot 3^7$ פונקציות על.
הפתרון הזה אינו נכון, משום שישנן הרבה פונקציות שנספרות יותר מפעם אחת. לדוגמא, את הפונקציה עבורה $f(1)=1,f(2)=2$ וגם $f(x)=3$ עבור $x\neq 1,2$, אנחנו סופרים בשני המקרים הבאים (וגם בעוד מקרים מלבדם):
א) בחרנו את 1 להיות זה שתמונתו 1, בחרנו את 2 להיות זה שתמונתו 2, בחרנו את 3 להיות זה שתמונתו 3, ובחרנו את תמונת כל היתר להיות 3.
ב) בחרנו את 1 להיות זה שתמונתו 1, בחרנו את 2 להיות זה שתמונתו 2, בחרנו את 4 להיות זה שתמונתו 3, ובחרנו את תמונת כל היתר להיות 3.

<u>חלק ב:</u> ענו על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.

<u>שאלה 1</u> (10%)

למה שווה הסכום $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-3)^{2k+1}$?

1. $2(1-3)^6$
2. $-3{,}000{,}000$
3. $-3\cdot 9{,}000{,}000$
4. $(1-3)^{12}$

<u>פתרון:</u>

$$\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-3)^{2k+1} = -3\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-3)^{2k} * (-3) = -3\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-3)^{2k}$$

$$= -3\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(9)^k\, 1^{n-k} \overset{\text{ניוטון}}{\triangleq} -3*10^6 = -3{,}000{,}000$$

<u>שאלה 2</u> (10%)

יהא $n\geq 0$, נתונים שלושת הביטויים הבאים:

א. $\sum_{0\leq i\leq m\leq n}\binom{m}{i}\binom{n}{m}$

ב. $\sum_{n_1+n_2+n_3=n}\binom{n}{n_1,n_2,n_3}$

ג. $\sum_{m=0}^{n}\left[\binom{n}{m}2^{n-m}\right]$

אילו מבין הביטויים שווה ל-3^n ?

1. ביטויים א' ו-ב' בלבד.
2. ביטויים א' ו-ג' בלבד.
3. ביטויים ב' ו-ג' בלבד.
4. ביטויים א', ב' ו-ג'.

<u>פתרון:</u>

שלושת הביטויים מתארים את מספר האפשרויות לפיזור n עצמים מובחנים ב-3 תאים מובחנים, תא 1,תא 2 ותא 3.

א - נסמן ב-m את מספר העצמים בתאים 1 ו-2 יחד, וב-i את מספר העצמים בתא 1. נעבור על כל הקומבינציות האפשריות לערכים, כלומר, $0\leq i\leq m\leq n$ ונמנה את מספר האפשרויות לבחור m מתוך n העצמים עבור תאים 1,2 ואז לבחור i מתוך m העצמים שנבחרו עבור תא 1.

ב - נסמן ב- n_1,n_2,n_3 את מספר העצמים בתאים 1,2,3, בהתאמה. נעבור על כל הקומבינציות האפשריות לערכים, כלומר, $n_1+n_2+n_3=n$ ונמנה את מספר האפשרויות לבחירת n_1 עצמים לתא 1, n_2 עצמים לתא 2 ו-n_3 עצמים לתא 3, מתוך n העצמים.

ג – נסמן ב-m את מספר העצמים בתא 1, נעבור על כל הערכים האפשריים של m ונמנה את מספר האפשרויות לבחירת m מתוך n העצמים לתא 1, וחלוקת שאר העצמים בין שני התאים הנותרים.

שאלה 3 (10%)

בדוכן הסנדוויצ'ים בנמל התעופה מחיר סנדוויץ' בשקלים הוא 5 ₪ ומחיר סנדוויץ' באירו הוא 1 אירו.
בתור לדוכן עומדים 40 אנשים. 10 מהם מתכוונים לשלם במטבע של 10 ₪, 10 במטבע של 5 ₪, 10 במטבע של 1 אירו ו- 10 במטבע של 2 אירו. כמו כן, קופת דוכן הסנדוויצ'ים ריקה עד לקבלת התשלום מהאדם הראשון.
בכמה דרכים ניתן לסדר את האנשים בתור כך שכל אדם יוכל לקבל עודף בעת הקניה (כשעודף למשלם בשקלים ניתן בשקלים ועודף למשלם באירו ניתן באירו) ?

1. $\frac{40!}{(10!)^4 11^2}$
2. $\frac{20!^2}{(10!)^4 11^2}$
3. $\frac{40!}{(10!)^2 21}$
4. $\frac{40!}{11^2}$

פתרון:

נחשב את מספר האפשרויות לסידור הפנימי של 20 האנשים המשלמים בשקלים:

נקבע מקומות עבור אנשים עם מטבע של 10 ₪ ומקומות עבור אנשים עם מטבע של 5 ₪ . מספר הדרכים לעשות זאת הוא מספר קטלן, $C_{10} = \frac{1}{11}\binom{20}{10}$. כעת, מספר האפשרויות לסידור פנימי של המשלמים במטבע של 5 ₪ הוא !10 וכמוהו מספר האפשרויות לסידור פנימי של המשלמים במטבע של 10 ₪. סך הכל: $\frac{1}{11}\binom{20}{10} 10!^2$.

זהו גם מספר האפשריות לסדר את 20 האנשים המשלמים באירו.

עלמנת לסדר את כל האנשים בתור אחד, נבחר את המקומות עבור המשלמים בשקלים (המשלמים באירו יהיו במקומות הנותרים). מספר האפשרויות לכך הוא $\binom{40}{20}$.

אם כך התשובה לשאלה היא:

$$10!^4\left(\frac{1}{11}\binom{20}{10}\right)^2\binom{40}{20} = \frac{40!}{11^2}$$

שאלה 4 (10%)

כמה מספרים ישנם המורכבים מהספרות {1,2,3} כך שכל ספרה מופיעה בדיוק 3 פעמים ולא מופיע הרצף 23 ?

1. 320
2. 400
3. 420
4. 500

פתרון:

נקבע את הסידור הפנימי של הספרות 1,2. כל ספרה חוזרת 3 פעמים ולכן יש $\binom{6}{3,3}$ אפשרויות.

כעת, נתייחס לספרות אלה כמחיצות ולרווחים בניהם ומצדיהם כתאים. לספרה 3 יש $7-3=4$ תאים בהם ניתן להציבה, היות ו-3 התאים מימין למחיצה של הספרה 2 אינם קבילים. לכן יש $\binom{6}{3}=\binom{3+4-1}{4-1}$ למיקום.

בסה"כ, $\binom{6}{3}^2=\left(\frac{6!}{3!3!}\right)^2=\left(\frac{6*5*4}{6}\right)^2=20^4=400$.

<u>שאלה 5 (10%)</u>

מהו מספר המלבנים במישור ה- xy (בעלי שטח גדול מ-0) כך שכל קדקוד במלבן הוא נקודה (a,b), כאשר a ו- b מספרים שלמים, $-5 \le a \le 5$, $-6 \le b \le 6$, וכל צלע של המלבן מקבילה לציר ה- x או לציר ה- y ?

1. $\frac{143\cdot 12\cdot 10}{4!}$
2. $\binom{143}{2}$
3. $\binom{143}{4}$
4. $\binom{11}{2}\binom{13}{2}$

<u>פתרון:</u>

עלינו לבחור שתי קואורדינטות x, $a_1 \neq a_2$, עבור הצלעות האנכיות של המלבן ושתי קואורדינטות y, $b_1 \neq b_2$, עבור הצלעות האופקיות של המלבן, ולכן מספר המלבנים (בעלי שטח חיובי) הוא $\binom{11}{2}\binom{13}{2}$.