מס' נבחן:_______________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' נוסף סמסטר אביב	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין
28.9.2014 9:00	יונתן אלכסנדר, טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

שאלה	**1**		**2**		**3**		**4**			**5**	
ציון											

סה"כ	

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 1</u>

<u>סעיף א (13 נק')</u>

הוכיחו את משפט Ore:
יהי G גרף עם $n \geq 3$ קדקודים. אם $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ לכל זוג קדקודים שאינם שכנים בגרף,
אז יש בגרף מעגל המילטון.

הוכח בכיתה.

(טעות שחזרה בכמה מקרים היא: יהיו a,b זוג קודקודים שיש ביניהם מסלול המילטון בגרף, אז אם יש להם שכן משותף, קיים מעגל המילטון – זה לא נכון בהכרח.)

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

צובעים את <u>צלעות</u> K_9 בארבעה צבעים בדרך כלשהי. הוכיחו שבגרף הצבוע שהתקבל יש מעגל מונוכרומטי (כלומר, מעגל שכל צלעותיו מאותו הצבע).

בגרף ישנן $\binom{9}{2} = 36$ צלעות, לכן מעיקרון שובך יונים מוכלל קיים צבע R שצבועות בו לפחות $\frac{36}{4} = 9$ צלעות. נביט בתת הגרף על תשעת הקודקודים שמכיל צלעות אלו בלבד. ממשפט שנלמד בכיתה גרף עם n קודקודים ו $m \geq n$ צלעות מכיל מעגל, לכן בגרף המקורי קיים מעגל המכיל צלעות מצבע R בלבד.

שאלה 2

סעיף א (13 נק')

נסמן ב- a_n את מספר הסדרות באורך n הבנויות מהתווים 0 ו- 1 ולא מכילות את הרצף 001. מצאו נוסחת נסיגה עבור a_n.

דבר ראשון נחשב כמה מקרי בסיס: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7$.
עבור נוסחת הנסיגה, נראה מספר פתרונות שונים:

פתרון ראשון:
תהי $x_1x_2 \dots x_n$ סדרה חוקית כלשהי באורך n, נספור בכמה דרכים ניתן להרכיב אותה, על ידי חלוקה למקרים:

- $x_1 = 1$: במקרה זה, ניתן לבחור את התווית $x_2 \dots x_n$ להיות כל סדרה חוקית באורך $n-1$, כלומר יש a_{n-1} אפשרויות.
- $x_1 = 0, x_2 = 1$: במקרה זה, ניתן לבחור את התווית $x_3 \dots x_n$ להיות כל סדרה חוקית באורך $n-2$, כלומר יש a_{n-2} אפשרויות.
- $x_1 = 0, x_2 = 0$: במקרה זה, אנחנו מוכרחים לבחור את כל התווים $x_3, \dots, x_n$ להיות 0 אחרת הסדרה איננה חוקית (תכיל 001). כלומר יש לנו בדיוק אפשרות 1.

סה"כ שלושת המקרים הללו זרים, וכן מכסים את כל הסדרות האפשריות ולכן נוכל להסיק כי הפתרון הינו $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$.

פתרון שני:
כל סדרה חוקית $x_1x_2 \dots x_n$ באורך n מתקבלת על ידי סדרה חוקית $x_1x_2 \dots x_{n-1}$ באורך $n-1$ ששורשר אליה התו x_n שהיכול להיות 0 או 1. יש $2a_{n-1}$ סדרות שונות שניתן ליצור באופן זה. אך בדרך זו אנו עלולים ליצור גם סדרות אשר אינן חוקיות. הדרך היחידה שבה עלולה להיווצר בדרך זו סדרה לא חוקית היא אם $x_{n-1} = x_{n-2} = 0$ והוספנו את התו החדש $x_n = 1$.

כמה סדרות לא חוקיות יצרנו? מספר הסדרות החוקיות באורך $n-1$ שנגמרות ב00. אבל זה בדיוק מספר הסדרות החוקיות באורך $n-3$ כלומר a_{n-3}. וסה"כ אם ניקח את סך הסדרות שיצרנו (שכוללות את כל הסדרות החוקיות ובנוסף חלק מהסדרות שאינן חוקיות) ונוריד מהם את הסדרות שאינן חוקיות נקבל בדיוק את מספר הסדרות החוקיות כלומר $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-3}$.

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

יהי T עץ המקיים את התכונה הבאה:
לכל קדקוד v ב- T, בדיוק אחד מבין רכיבי הקשירות בגרף $T\setminus\{v\}$ הינו מגודל אי-זוגי.
הוכח שיש ב- T זיווג מושלם.

תהי (*) תכונה של עצים, שמקיימים שלכל קודקוד בעץ, אם נוריד אותו, בגרף ישאר בדיוק רכיב קשירות בודד מגודל אי זוגי.
נוכיח באינדוקציה על מספר הקדקודים שלכל עץ שמקיים (*) קיים זיווג מושלם.
נבחין שבכל עץ שמקיים (*) יש מספר קדקודים זוגי, שכן התכונה מתקיימת בפרט עבור עלה בעץ שבהסרתו מתקבל רכיב יחיד עם $n-1$ קודקודים ומספרם אי-זוגי, כלומר n זוגי.

<u>בסיס-</u> עבור עץ עם 2 קדקודים המקיים (*), בהכרח קיים זיווג מושלם (כי עץ הוא קשיר ויש בדיוק 2 קדקודים).

<u>הנחה-</u> נניח כי לכל עץ עם 2k קדקודים עבור $k < m$ המקיים (*) קיים זיווג מושלם.

<u>צעד-</u> יהי T עץ המקיים (*) עם 2m קדקודים. יהי v עלה כלשהו בעץ. יהי u השכן היחיד של v.
נביט בגרף $T\setminus\{u\}$. נשים לב כי בגרף זה v הוא קודקוד מבודד, וכן הוא מהווה בעצמו רכיב קשירות מגודל 1, אי-זוגי. מכיוון ש-T מקיים (*), זהו רכיב הקשירות האי זוגי היחיד. נשים לב שכל רכבי הקשירות שנותרו גם הם עצים, ובפרט יהיו $T_1, T_2, \dots, T_k$ רכיבי קשירות אלה (נניח כי T_k זהו היחידון v). נשים לב שבכל אחד מהעצים הללו יש קודקוד בודד $x_i \in T_i$ שהינו שכן של u.
נראה כי כל אחד מהעצים $T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$ מקיים (*). יהי T_i אחד העצים הללו, בהכרח יש בו מספר זוגי של קודקודים. יהי w קודקוד בT_i. מההנחה שT מקיים (*) אם נוריד את w מT נקבל בדיוק רכיב קשירות אי זוגי אחד. נביט בקבוצה A שמכילה את כל קודקודי V מלבד קודקודי T_i.
נשים לב כי בA יש מספר קודקודים זוגי. וכן כל מסלול מw לכל קודקוד בA עובר דרך u (כי מדובר בעץ) ולכן כל הקדקודים בA נמצאים ברכיב קשירות יחיד לאחר הוצאת w (מT).
לכן קבוצת רכיבי הקשירות בעץ T_i לאחר הוצאת w זהה לקבוצת רכיבי הקשירות בT לאחר הוצאת w, פרט לרכיב קשירות בודד בכל אחת מהקבוצות שההבדל ביניהם הוא בדיוק A. מכך ש A מגודל זוגי, הורדתה לא משפיעה על הזוגיות של מספר הקדקודים ברכיב, ולכן ניתן להסיק כי התכונה(*) מתקיימת גם בT_i כנדרש.
מהנחת האינדוקציה בכל אחד מהעצים $T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$ יש זיווג מושלם. נאחד את הזיווגים הללו ונוסיף אליהם את הזוג $\{v, u\}$ ונקבל סה"כ זיווג מושלם בכל הגרף כנדרש.

שאלה 3

סעיף א (15 נק')

נתון גרף קשיר $G = (V, E)$. יהי L הגרף שקבוצת קדקודיו היא E ויש צלע בין שני איברים ב- E אם ורק אם איברים אלה הם זוג צלעות שכנות ב- G (כלומר זוג צלעות ב- G עם קדקוד משותף).

א1. הוכיחו: אם יש ב- G מעגל אוילר אז L קשיר ויש גם בו מעגל אוילר.

העובדה ש- L (ה- line graph של G) קשיר נובעת ישר מהקשירות של G ללא צורך בהנחה שיש ב- G מעגל אוילר. כדי להוכיח את זה נשים לב ש- $V(L) = E(G)$, אז יהיו e ו- e' שני קדקודים של L, ויהיו v ו- v' שני קדקודים ב- G שמחוברים שם לצלעות e ו- e' בהתאמה. G קשיר, לכן קיים טיול ב- G מ- v ל- v'. נסמן את הטיול באמצעות הצלעות מ- G ששייכות לו: $\langle e_1, e_2, e_3, \cdots, e_k \rangle$. אז $\langle e, e_1, e_2, e_3, \cdots, e_k, e' \rangle$--שהיא סדרת קדקודים של L—מהווה טיול ב- L מהקודקוד e לקודקוד e'. לכן הגרף L קשיר.

עכשיו יהי e קודקוד כלשהו של L. כצלע של G היא חלה בשני קדקודים שונים u ו- v של G. יש עוד $deg_G u - 1$ צלעות שחלות בקודקוד u בגרף G, ויש עוד $deg_G v - 1$ צלעות שחלות בקודקוד v בגרף G. הצלעות האלה הן בדיוק השכנים של הקודקוד e ב- G, לכן

$$deg_L e = deg_G u + deg_G v - 2.$$

כעת נשתמש בהנחה שיש ב- G מעגל אוילר. זה גורר ש- $deg_G u$ ו- $deg_G v$ מספרים זוגיים, ולכן גם $deg_L e$ זוגית. זה נכון לכל קודקוד e של L, וראינו כבר ש- L קשיר. ממשפט אוילר נובע שיש ב- L מעגל אוילר.

א2. הוכיחו שהטענה ההפוכה איננה נכונה. כלומר, הראו שיתכן שיש ב- L מעגל אוילר אך אין ב- G מעגל אוילר.

יהי G גרף קשיר כלשהו על $n \geq 3$ קדקודים שבו כל הדרגות אי-זוגיות. (לדוגמא G יכול להיות הגרף השלם K_4.) אז יש ל- G לפחות קודקוד אחד u בעל דרגה גדולה מ- 1, וכל שני צלעות שחלות ב- u בגרף G הן קדקודים שכנים בגרף L. בפרט L אינו קודקוד בודד. בנוסף L קשיר (כמו שראינו למעלה), ואם e קודקוד כלשהו של L שחלה בשני קדקודים שונים u ו- v כצלע של G, אז

$$deg_L e = deg_G u + deg_G v - 2$$

זוגית כי $deg_G u$ ו- $deg_G v$ אי-זוגיות. לכן יש מעגל אוילר ב- L. אבל אין מעגל אוילר ב- G משום שיש בו קדקודים בעלי דרגות אי-זוגיות.

סעיף ב (10 נק')

כמה עצים מתויגים בני 14 קדקודים ישנם בהם {1,2,3,4,5,6,7,8} הם עלים ו- {9,10,11,12,13,14} הם קדקודים מדרגה 3?

קוד הפריפר של עץ כזה הוא סדרה מאורך 12 שבה כל אחד מהמספרים מהקבוצה {9,10,11,12,13,14} מופיע פעמיים. לכן מספר העצים הדרושים שווה למספר הסדרות האלה, שהוא

$$\frac{12!}{(2!)^6}.$$

שאלה 4

בדיקת הבחינות נעשית בדרך הבאה:
בהסתברות 1/2 בחינה נבדקת ע"י מתרגל, בהסתברות 1/3 היא נבדקת ע"י מרצה, ובהסתברות 1/6 היא הולכת לאיבוד.
מתרגל בודק בחינה כך: לכל אחת מחמש השאלות הוא נותן 20 נקודות בהסתברות 1/2 ואפס נקודות בהסתברות 1/2.
מרצה בודק בחינה כך: הוא זורק שתי "קוביות", כל אחת עם 7 פאות (הממוספרות 1,2, ... ,7), וכופל את שני המספרים שמתקבלים האחד בשני. לתוצאת הכפל הוא מוסיף 44.
הציון של מחברת אבודה נקבע ע"י הגרלת מספר בהתפלגות אחידה בתחום בין 30-90 (כולל הקצוות).

סעיף א (8 נק')

מה ההסתברות לקבל 100?

בצורה פורמלית: נגדיר את מרחב המדגם $\langle\Omega, Pr\rangle$ באופן הבא:

$$\Omega = \left\{\langle a, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\rangle \mid n_p \in \{0,20\}, 1 \le p \le 5\right\} \cup \{\langle b, i, j\rangle \mid 1 \le i, j \le 7\} \cup \{\langle c, k\rangle \mid 30 \le k \le 90\}$$

כאשר המשמעות של a היא שמתרגל בדק את המבחן, של b שמרצה בדק, ושל c שהמבחן הלך לאיבוד. נגדיר המאורעות הבאים"

$A =$ "מתרגל בדק את המבחן" $= \left\{\langle a, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\rangle \mid n_p \in \{0,20\}, 1 \le p \le 5\right\}$

$B =$ "מרצה בדק את המבחן" $= \{\langle b, i, j\rangle \mid 1 \le i, j \le 7\}$

$C =$ "המבחן הלך לאיבוד" $= \{\langle c, k\rangle \mid 30 \le k \le 90\}$

נתון ש- $Pr(A) = 1/2$, $Pr(B) = 1/3$, ו- $Pr(C) = 1/6$. מתקיים גם שההתפלגות בכל אחד מ- A, B, ו- C באופן נפרד היא אחידה. נגדיר משתנה מקרי $f: \Omega \to \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$f(\langle a, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\rangle) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$ ב- A,

$$f(\langle b, i, j\rangle) = ij + 44$$ ב- B,

ו- $$f(\langle c, k\rangle) = k$$ ב- C.

אז f מחזירה את הציון במבחן. עלינו לחשב את

$$Pr(f = 100) = Pr\big(A \cap (f = 100)\big) + Pr\big(B \cap (f = 100)\big) + Pr\big(C \cap (f = 100)\big)$$

נשים לב ש- $Pr\big(B \cap (f = 100)\big) = 0$ מכיוון שהציון המקסימלי האפשרי אם מרצה בודק את המבחן הוא $7 \cdot 7 + 44 = 93$, וכמובן ש- $Pr\big(C \cap (f = 100)\big) = 0$. לכן

$$Pr(f = 100) = Pr\big(A \cap (f = 100)\big) = Pr(A) \cdot Pr\big((f = 100) \mid A\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

סעיף ב (8 נק')

מהי תוחלת ציונו של סטודנט?

תהי f כמו בסעיף א' ותהיינה f_A, f_B, ו- f_C הצמצומים של f למרחבי המדגמים $\langle A, Pr_A \rangle$, $\langle B, Pr_B \rangle$ ו- $\langle C, Pr_C \rangle$ בהתאמה. כאן $Pr = Pr(A)Pr_A = Pr(B)Pr_B = Pr(C)Pr_C$, ולכן התוחלת היא

$$E[f] = \sum_{\omega\in\Omega} Pr(\omega)f(\omega) = \sum_{\omega\in A} Pr(\omega)f(\omega) + \sum_{\omega\in B} Pr(\omega)f(\omega) + \sum_{\omega\in C} Pr(\omega)f(\omega)$$

$$= \sum_{\omega\in A} Pr(A)Pr_A(\omega)f(\omega) + \sum_{\omega\in B} Pr(B)Pr_B(\omega)f(\omega) + \sum_{\omega\in C} Pr(C)Pr_C(\omega)f(\omega)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\omega\in A} Pr_A(\omega)f(\omega) + \frac{1}{3}\sum_{\omega\in B} Pr_B(\omega)f(\omega) + \frac{1}{6}\sum_{\omega\in C} Pr_C(\omega)f(\omega)$$

$$= \frac{1}{2}E[f_A] + \frac{1}{3}E[f_B] + \frac{1}{6}E[f_C]$$

נחשב את הערכים האלה:

לכל i כך ש- $1 \le i \le 5$ נגדיר $g_i: A \longrightarrow \mathbb{N}$ בדרך הבאה: $g_i(\langle a, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\rangle) = n_i$. אז

$$f_A = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5$$

ולכן

$$E[f_A] = E[g_1] + E[g_2] + E[g_3] + E[g_4] + E[g_5]$$

לכל i כך ש- $1 \le i \le 5$ מתקיים ש- $E[g_i] = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$, לכן $E[f_A] = 50$.

עכשיו נגדיר $h_1: B \longrightarrow \mathbb{N}$ ו- $h_2: B \longrightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא: $h_1(\langle b, i, j\rangle) = i$ ו- $h_2(\langle b, i, j\rangle) = j$. אז

$$E[h_1] = E[h_2] = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$$

ומכיוון ש- h_1 ו- h_2 בלתי-תלויים, נסיק ש-

$$E[f_B] = E[h_1 h_2 + 44] = E[h_1]E[h_2] + 44 = 60$$

לבסוף, $E[f_C] = \frac{30+31+32+\cdots+90}{61} = \frac{1}{61}\cdot\left(61\cdot\frac{(30+90)}{2}\right) = 60$

$$E[f] = \frac{1}{2}E[f_A] + \frac{1}{3}E[f_B] + \frac{1}{6}E[f_C] = \frac{1}{2}\cdot 50 + \frac{1}{3}\cdot 60 + \frac{1}{6}\cdot 60 = 55$$

סעיף ג (9 נק')

אם נתון שסטודנט קיבל 60, מה ההסתברות שהבחינה שלו נבדקה ע"י מתרגל?

נמשיך להשתמש בסימנים מסעיף א' ובנוסף נגדיר מאורע

D = "הסטודנט קיבל 60".

נחשב את $Pr(A|D)$ בעזרת חוק Bayes:

$$Pr(A|D) = \frac{Pr(A)Pr(D|A)}{Pr(A)Pr(D|A)+Pr(B)Pr(D|B)+Pr(C)Pr(D|C)} = \frac{\frac{1}{2}Pr(D|A)}{\frac{1}{2}Pr(D|A)+\frac{1}{3}Pr(D|B)+\frac{1}{6}Pr(D|C)}$$

עכשיו נחשב את ההסתברויות בביטוי הזה:

$$Pr(D|A) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

(יש $\binom{5}{3}$ דרכים לבחור ב- 3 השאלות שיקבלו 20 נקודות כל אחת, ואחרי הבחירה ההסתברות היא $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ ששלוש השאלות שנבחרו יקבלו 20 נקודות כל אחת ושתי השאלות האחרות יקבלו 0.)

$$Pr(D|B) = \frac{1}{49}$$

(הדרך היחידה שסטודנט יכול לקבל ציון של 60 ממרצה היא כאשר מכפלת המספרים בשתי הקוביות שווה 16, וזה יכול לקרות רק כאשר המספר המתקבל בכל קובייה הוא 4.)

$$Pr(D|C) = \frac{1}{61}$$

לכן

$$Pr(A|D) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{16}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{49}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{61}}$$

מס' נבחן:__________________

<u>שאלה 5</u>

<u>סעיף א (13 נק')</u>

מטילים 5 "קוביות" $C_1, C_2, \ldots, C_5$, כל אחת עם 7 פאות הממוספרות $1,2,\ldots,7$.
יהי f_i המשתנה המקרי שערכו הוא תוצאת הטלת הקוביה C_i, עבור $i = 1,2,\ldots,5$. נגדיר מ"מ נוסף $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_5$.

א1. חשבו את התוחלת ואת השונות של f.

לכל i כך ש- $1 \le i \le 5$ מתקיים ש- $E[f_i] = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$. אז

$$E[f] = \sum_{i=1}^{5} E[f_i] = 20$$

המשתנים המקרים f_i בלתי-תלויים, לכן

$$Var[f] = \sum_{i=1}^{5} Var[f_i]$$

לכל i כך ש- $1 \le i \le 5$ מתקיים ש-

$$E[f_i^2] = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2}{7} = \frac{140}{7} = 20$$

ואז $Var[f_i] = E[f_i^2] - E[f_i]^2 = 20 - 4^2 = 4$.

לכן

$$Var[f] = \sum_{i=1}^{5} Var[f_i] = 20$$

א2. תנו חסם תחתון גדול ככל האפשר להסתברות ש- $15 < f < 25$.

נשתמש באי-שוויון צ'בישב עם $C = 5$:

$$Pr[|f - E[f]| \ge 5] \le \frac{Var[f]}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

לכן

$$Pr[|f - 20| \ge 5] \le \frac{4}{5}$$

ואז

$$Pr[15 < f < 25] \ge 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

מס' נבחן:________________

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

n אנשים עומדים בתור לקופה. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם מחדש בתור, כך שהאדם שעמד במקום ה-$i+1$ לא יעמוד <u>מיד</u> אחרי האדם שעמד במקום ה-i, עבור $i=1,\dots,n-1$.

נשתמש בעקרון ההכלה והדחה. לכל i כך ש- $1 \le i \le n-1$ תהי A_i קבוצץ הסידורים החדשים שבהם האדם שעמד במקום ה- $i+1$ <u>כן</u> עומד מיד אחרי האדם שעמד במקום ה- i. אז

$$|A_i| = (n-1)! \quad \text{לכל} \quad 1 \le i \le n-1,$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)! \quad \text{לכל} \quad 1 \le i < j \le n-1,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)! \quad \text{לכל} \quad 1 \le i < j < k \le n-1,$$

$$\vdots$$

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_l}\right| = (n-l)! \quad \text{לכל} \quad 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_l \le n-1,$$

$$\vdots$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}| = \big(n-(n-1)\big)! = 1! = 1$$

מעקרון ההכלה והדחה נסיק ש-

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}}| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!$$

בהצלחה !