

אוניברסיטת בן-גוריון המחלקה למדעי המחשב

פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין	מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א סמסטר אביב
יונתן אלכסנדר, טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר	25.6.2014 9:00
אסור	חומר עזר
שלוש שעות	משך הבחינה

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

5	4	3	2	1	שאלה
					ציון

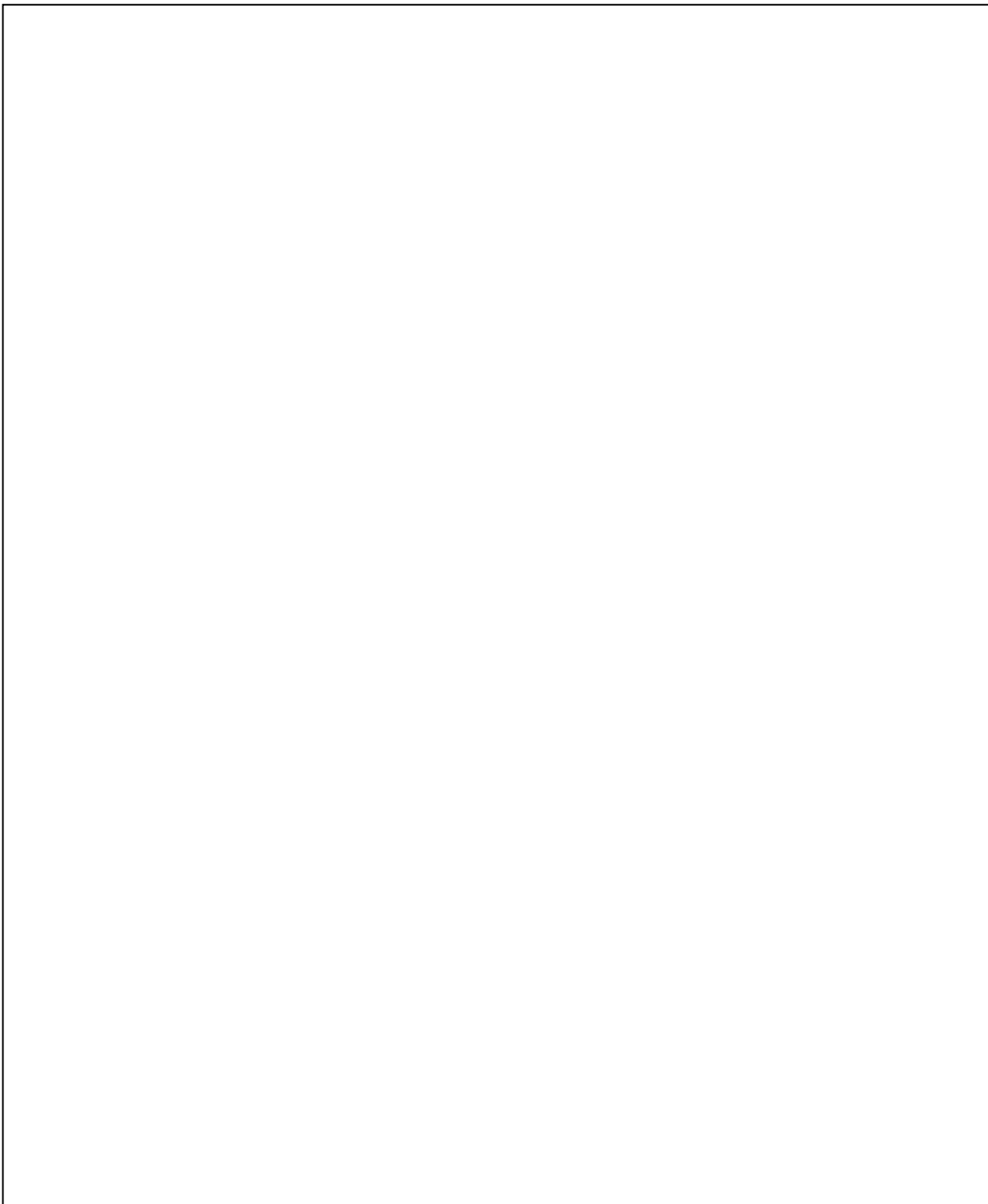
	סה"כ
--	-------------

שאלה 1

סעיף א (13 נק')

הוכיחו את משפט נוסחת אוילר:

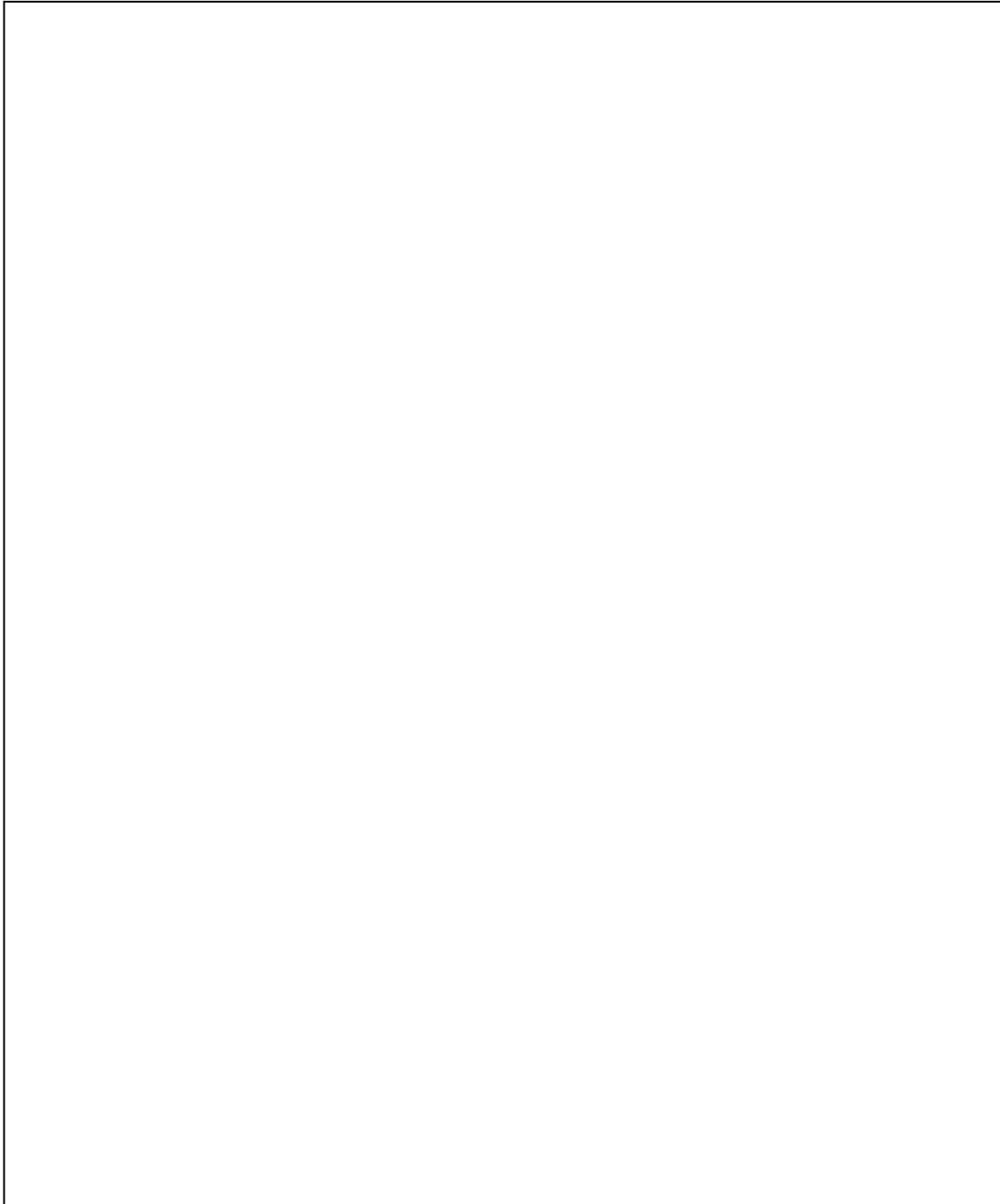
יהי G גרף מישורי קשיר. אז $n + f - m = 2$, כאשר n מספר הקודקודים, m מספר הצלעות ו- f מספר הפאות של הגרף G .



סעיף ב (12 נק')

יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי וקשיר עם n קדקודים, m צלעות ו- f פאות. נניח $f > 1$.
יהי $g \in \mathbb{N}$ כך שאורך כל מעגל ב- G הוא לפחות g .

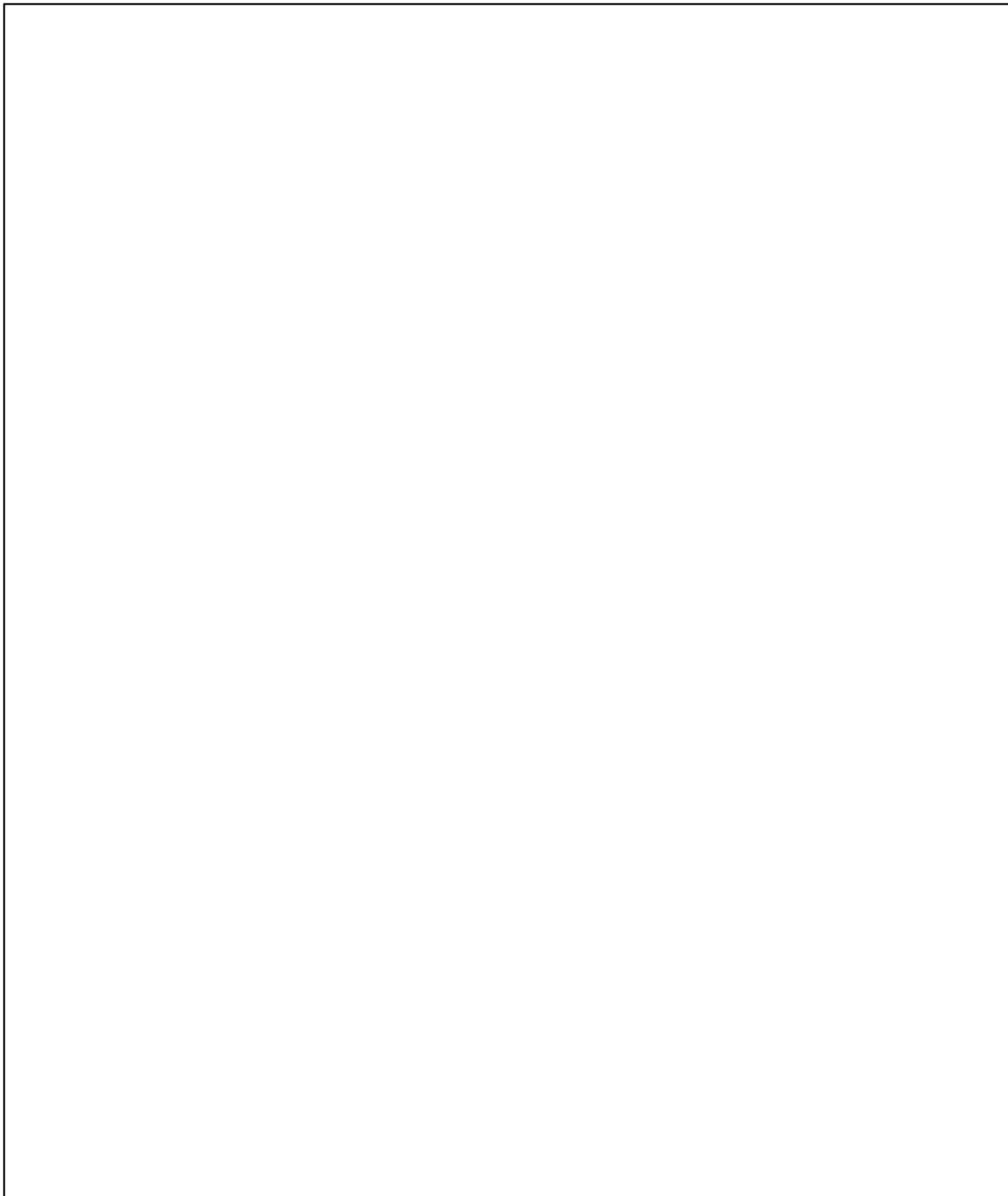
הוכיחו כי מתקיים: $2m \geq f \cdot g$ (1) $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$ (2)



שאלה 2

סעיף א (12 נק')

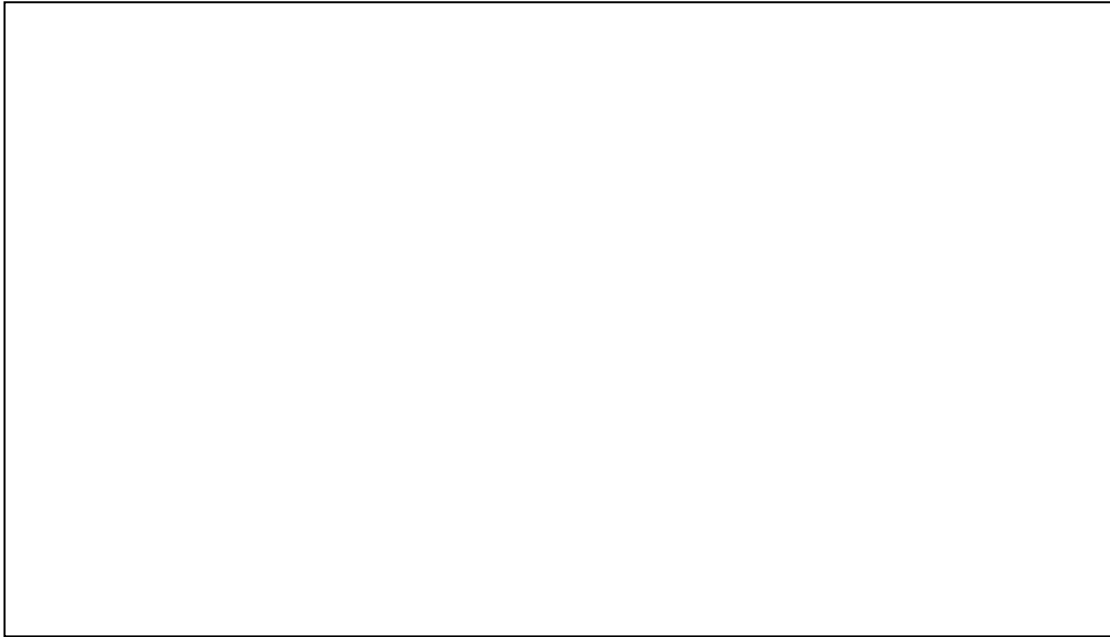
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון כך שלכל זוג מעגלים מאורך אי זוגי יש קדקוד משותף. הוכיחו כי ניתן לצבוע את קדקודי הגרף G בצביעה חוקית תוך שימוש ב-5 צבעים לכל היותר.



סעיף ב (13 נק')

סניף דואר מטפל בממוצע ב-1000 מכתבים ביום כאשר השונות היא 200. כמו כן, אין תלות בין הימים (כלומר, מספר המכתבים המטופלים ביום אחד אינו תלוי במספר המכתבים המטופלים ביום אחר).

א. מצאו חסם תחתון להסתברות שמספר המכתבים שיטופלו מחר הינו בין 800 ו-1200 (לא כולל הקצוות).

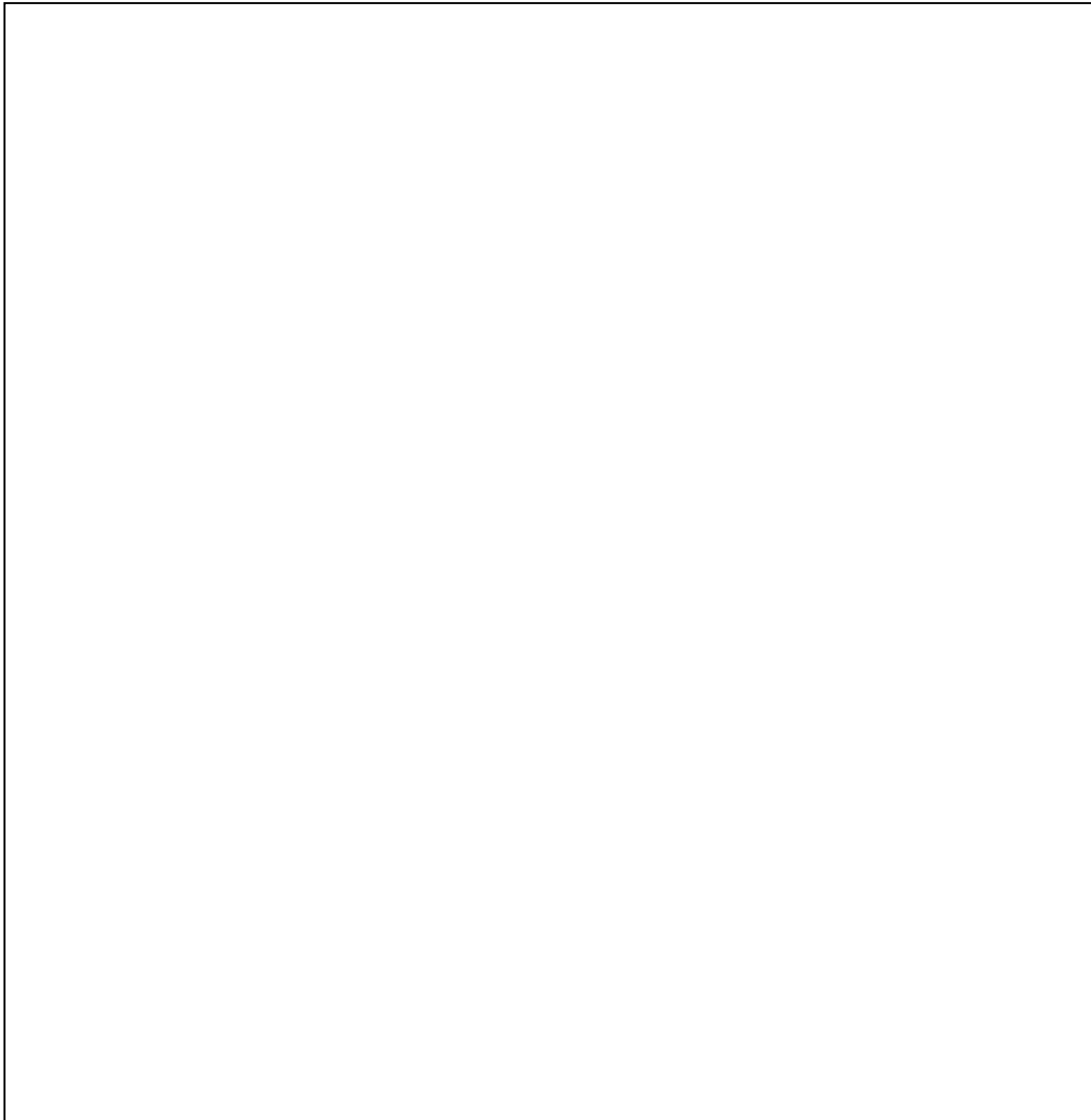


ב. מצאו חסם עליון קטן מ- $\frac{1}{2}$ להסתברות שמספר המכתבים שיטופלו ביומיים הבאים הינו לפחות 2800.



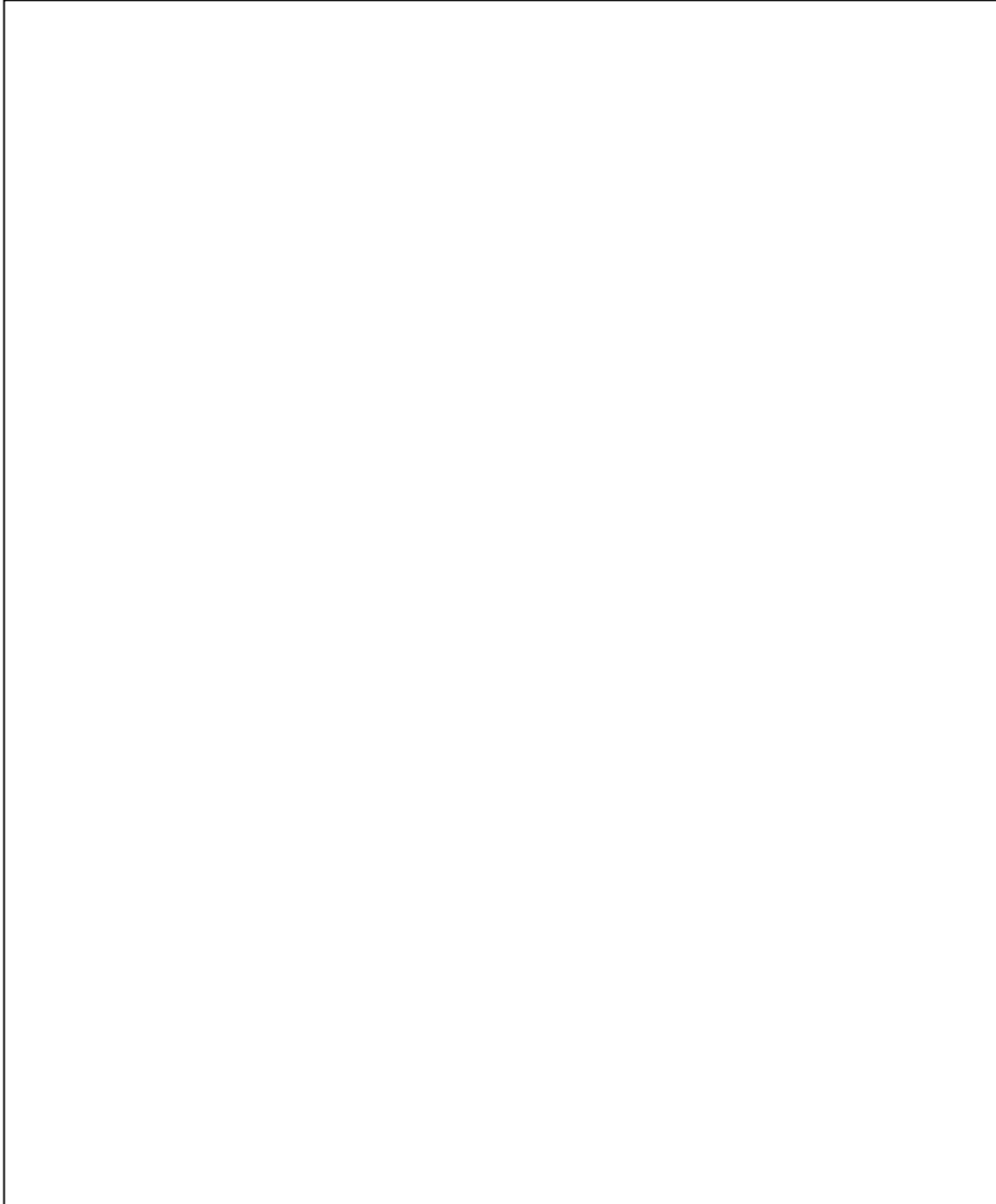
סעיף א (12 נק')

נתון שבגרף הפשוט $G=(V,E)$ קיים מעגל אוילר ובנוסף שמספר הקדקודים בגרף הוא אי זוגי.
הוכיחו כי קיימים לפחות שלושה קדקודים בגרף בעלי דרגה זהה.



סעיף ב (13 נק')

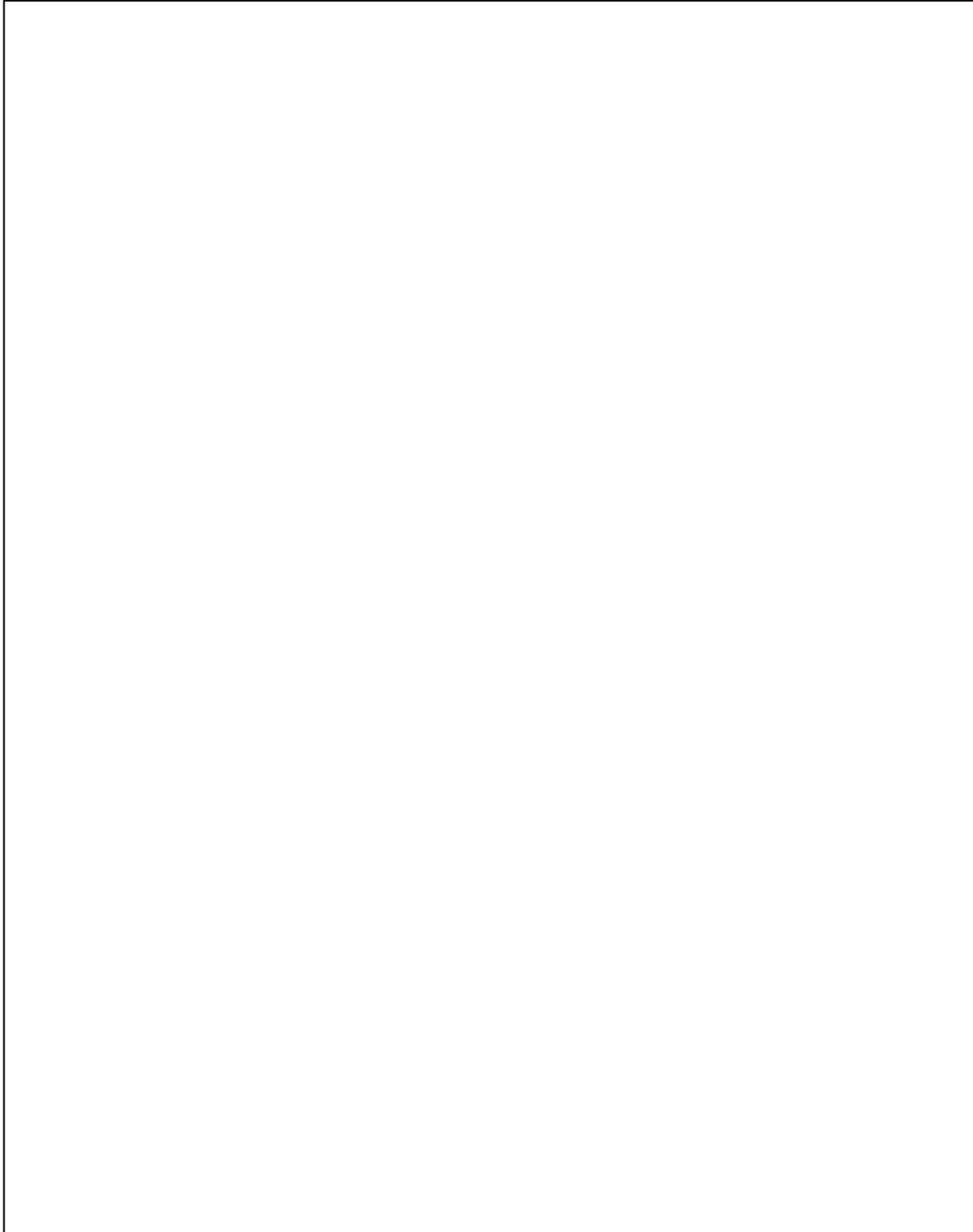
נגדיר $M = \{s_1 s_2 \dots s_k : s_i \in \{0, 1, \dots, i\}\} \subset \{0, 1, \dots, k\}^k$. בוחרים בהתפלגות אחידה מחרוזת מ - M .
מה התוחלת של סכום ספרות המחרוזת הנבחרת?



שאלה 4

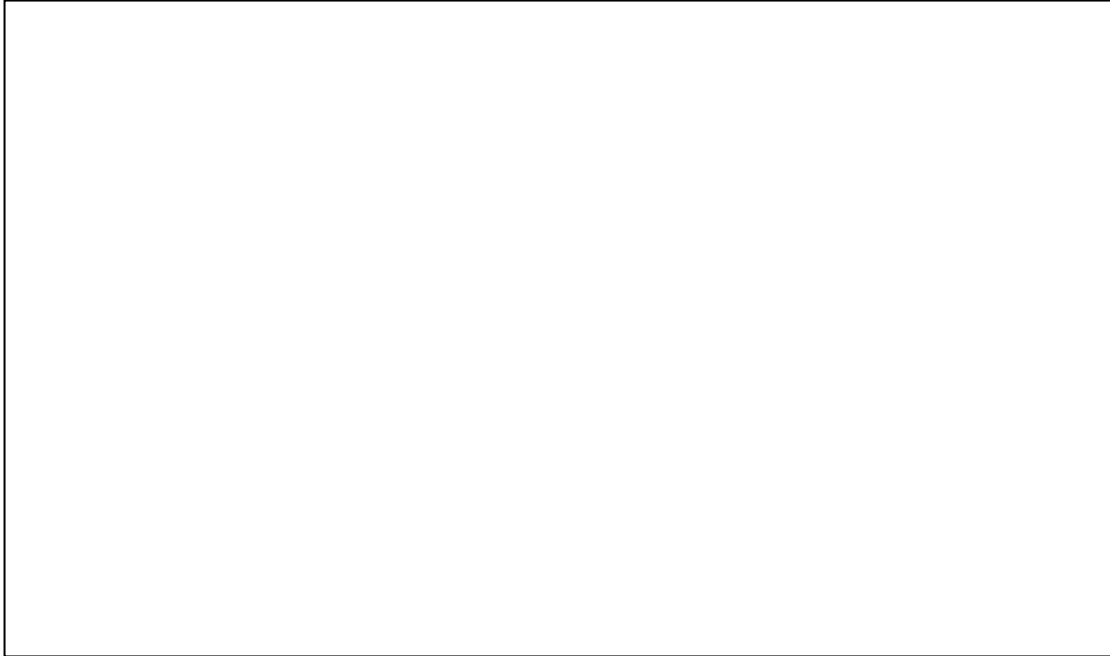
סעיף א (15 נק')

הוכיחו שבגרף דו-צדדי $G=(V_1, V_2, E)$ עם $|V_1|=|V_2|=n$ ודרגה מינימלית לפחות $n/2$, יש זיווג מושלם.



סעיף ב (10 נק')

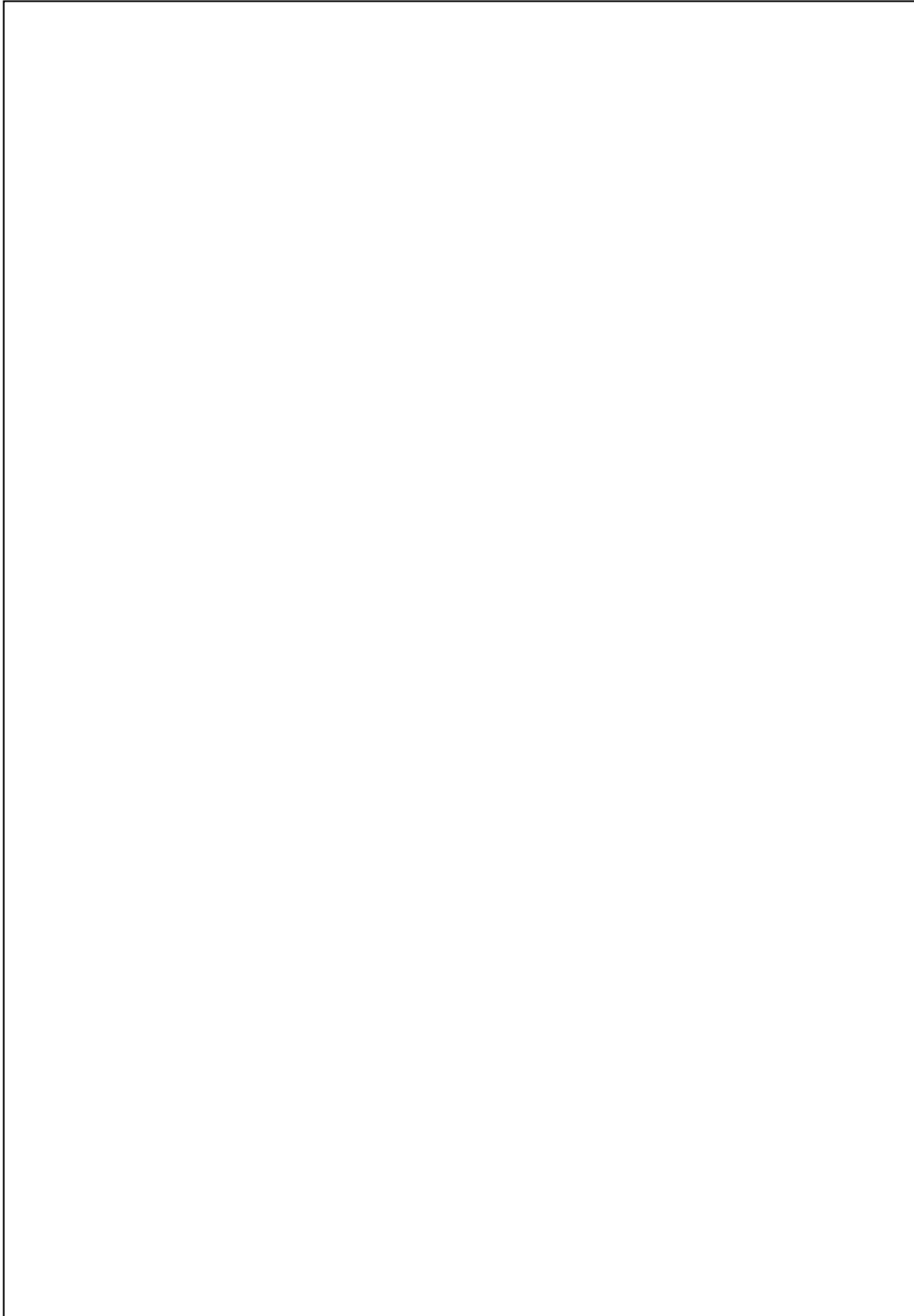
מה מספר הסדרות (a_1, a_2, \dots, a_n) כך שכל $a_i \in \{0,1,2,3\}$, וכך שאין מופע של 3 בשום מקום מימין ל-0. (כלומר, אין i ו- j טבעיים כך ש- $1 \leq i < j \leq n$ וכך ש- $a_i = 0$ ו- $a_j = 3$)
מצאו ביטוי סגור למספר זה.



שאלה 5

סעיף א (15 נק')

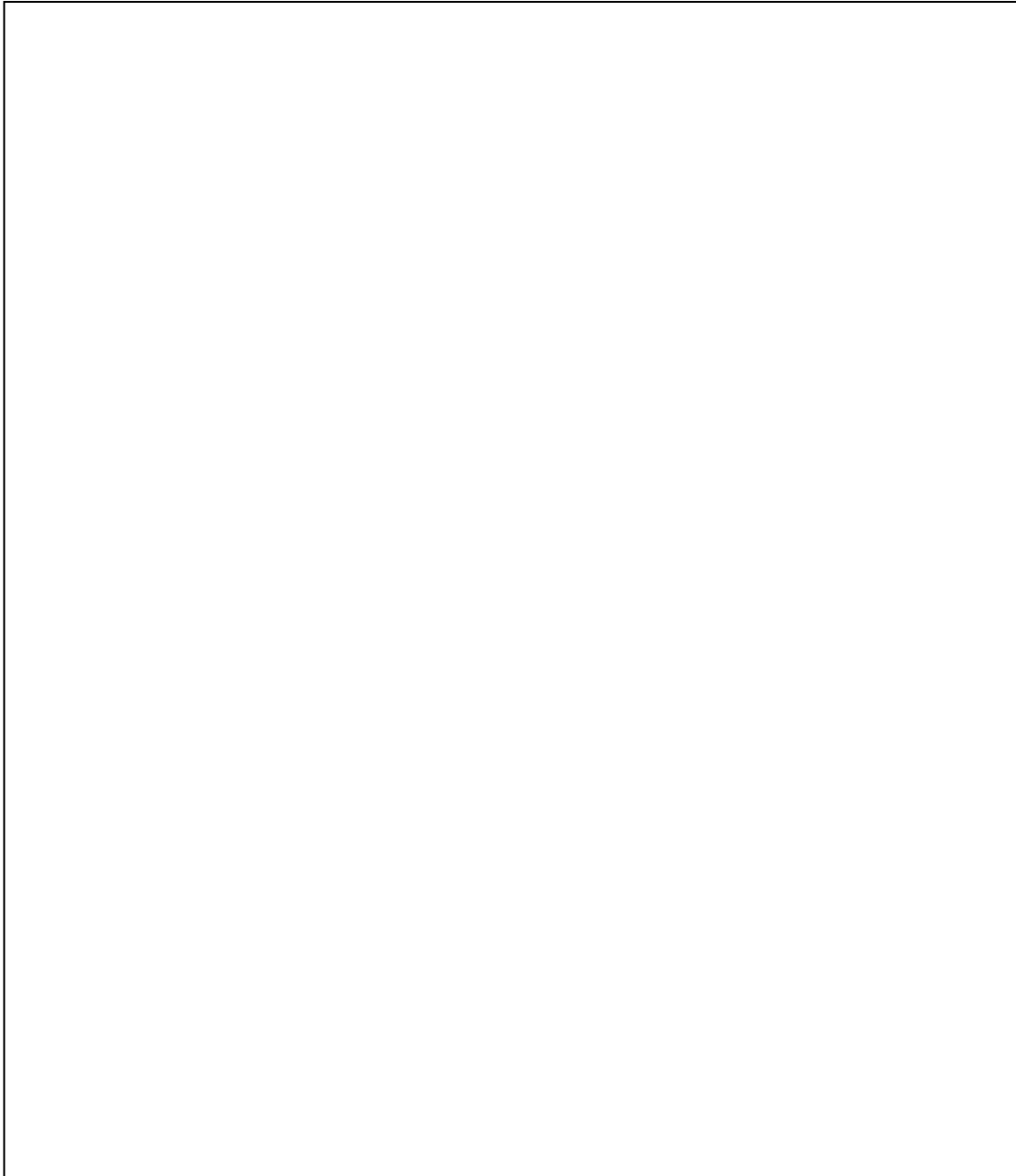
כמה עצים מתויגים ישנם על $\{1, \dots, n\}$ בהם קבוצת הקדקודים הפנימיים היא בדיוק $\{1, \dots, k\}$?



מס' נבחן: _____

סעיף ב (10 נק')

מה ההסתברות שבהגרלת תת קבוצה מגודל k בהתפלגות אחידה מתוך $\{1, \dots, n\}$ אין שני מספרים עוקבים? מצאו ביטוי סגור להסתברות זו.



בהצלחה !