

# תכנון אלגוריתמים 202-1-2041

## סמסטר ב' תשע"ב

### בוחרן אמצע סמסטר 18.5.2011

ללא חומר עזר.

#### הנחיות חשובות:

- הבוחן ללא חומר עזר מכל סוג שהוא.
- משך הבוחן שעתיים וחצי.
- פתרו את הבוחן תחילה במחברת טיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. אין לחרוג מהמקום בדף התשובות.
- שימו לב: בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטייטה או תוספות בגב העמוד!
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ-3 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- מותר להשתמש במשפטים מהכיתה ומהתרגול, אך יש לציין את הניסוח המדויק של המשפט. ניתן להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.
- אם לא מצוין אחרת, על תאור האלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.
- במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.
- שימו לב, לא תהיינה הארכות זמן למבחן זה (פרט לסטודנטים עם אישורים).
- המלצה חמה: לבדוק את התשובות לפני ההגשה.

**בהצלחה!**

**שאלה 1 (17 נקודות)**

ניזכר באלגוריתם של Dijkstra, כפי שמופיע בדפי העזר המצורפים. הוכיחו את הטענה הבאה:  
 יהי  $v$  הקודקוד המוכנס ל- $S$  בשלב כלשהו בצעד האלגוריתם, עבורו מתקיים  $\delta(s, v) < \infty$ . אזי קיים מסלול קל ביותר מ- $s$  ל- $v$  אשר כל קודקודיו מלבד  $v$  עצמו שייכים ל- $S$ .

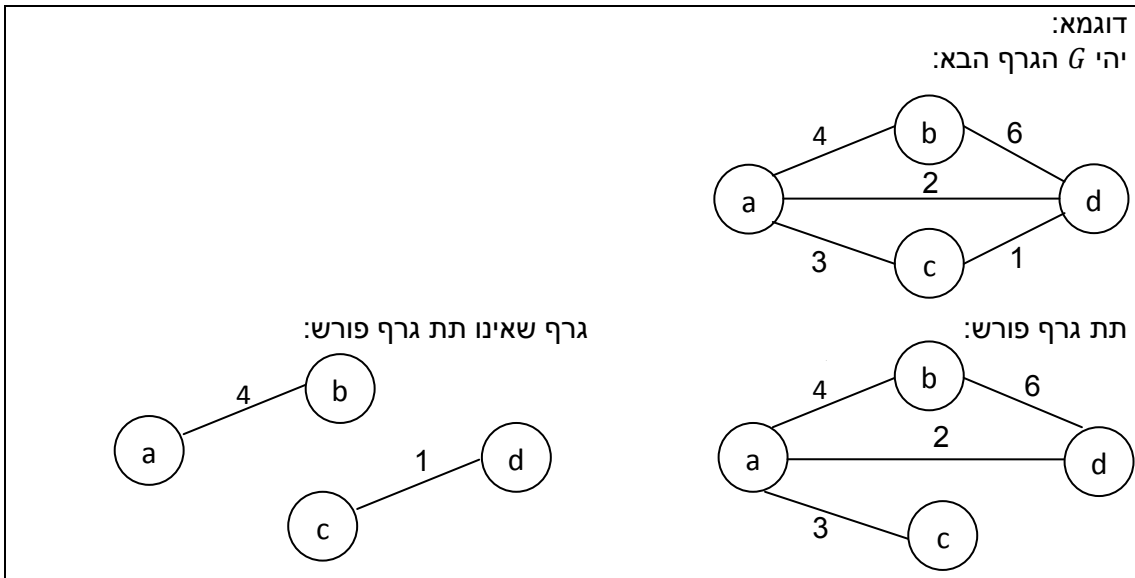
**שאלה 2 (25 נקודות)**

**סעיף א (13 נקודות):**

יהיו  $G = (V, E)$  גרף לא מכוון וקשיר ו- $w: E \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית משקל על צלעות הגרף. הוכח או הפרך את הטענה הבאה:  
 אם בגרף  $G$  קיימת צלע יחידה  $e$  בעלת משקל שלילי (כל שאר הצלעות במשקלות אי שליליים), אזי כל עץ פורש מינימום של  $G$  מכיל את  $e$ .

**סעיף ב (12 נקודות):**

נגדיר כי גרף  $H = (V_H, E_H)$  הוא תת גרף פורש של הגרף  $G = (V, E)$  אם מתקיימים התנאים הבאים:  $E_H \subseteq E, V_H = V$  ו- $H$  קשיר.



**בעיית תת גרף פורש במשקל מינימום:**

מופע: גרף לא מכוון וקשיר  $G = (V, E)$  ו- $w: E \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית משקל על צלעות הגרף. שימו לב: יתכנו משקלות שליליים.  
פתרון חוקי: תת גרף פורש של  $G$ .  
יש למצוא: פתרון חוקי במשקל מינימום.

תארו אלגוריתם הפותר את הבעיה. **אין צורך להוכיח את נכונותו.** על האלגוריתם להיות יעיל במידת האפשר. יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם.

## שאלה 3 (58 נקודות)

בעיית כיסוי קודקודים בעץ מושרש:

מופע:  $T = (V, E)$  עץ מושרש (לא בהכרח בינארי). לכל קודקוד  $x$  בעץ מוצמד משקל  $w_x$  – מספר ממשי אי שלילי.

פתרון חוקי: קבוצה  $I \subseteq V$  של קודקודים בעץ כך שלכל צלע  $(u, v) \in E$  בעץ מתקיים כי  $u \in I$  או  $v \in I$  (או שניהם). מחיר פיתרון הוא  $\text{cost}(I) = \sum_{x \in I} w_x$ . יש למצוא: פתרון חוקי בעל מחיר מינימאלי.

סעיף א (5 נקודות):

הוכיחו כי בפתרון חוקי לבעיה, אם שורש העץ  $r$  לא נמצא בפתרון אזי כל בניו (כלומר, הקודקודים  $v$  כך ש-  $(r, v) \in E$ ) חייבים להיות בכיסוי.

סעיף ב (15 נקודות):

נסחו תת-בעיה אופיינית ונוסחאת מבנה הכוללת מקרי בסיס.

סעיף ג (20 נקודות):

הוכיחו את נוסחאת המבנה. חובה להשתמש בסכמת ההוכחה שנלמדה בכיתה.

סעיף ד (13 נקודות):

נסחו אלגוריתם יעיל איטראטיבי למציאת ערך פתרון אופטימאלי ונתחו את זמן ריצתו. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לנתח את זמן ריצתו של האלגוריתם.

סעיף ה (5 נקודות):

בסעיף זה נניח כי המופע לבעיה הוא עץ מושרש בינארי. בעזרת המערך שחושב בסעיף הקודם, הראו אלגוריתם הבודק בזמן קבוע, כלומר ב-  $O(1)$ , האם קיים פתרון אופטימאלי המכיל את שורש העץ.

## תכנון אלגוריתמים – 202-1-2041

## בוחן אמצע סמסטר 18.5.2012

## דפי עזר לבוחן

האלגוריתם של קרוסקל (Kruskal)

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  קשיר עם פונקצית משקל  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. אתחל  $B \leftarrow \emptyset, C \leftarrow E$ ,
2. כל עוד  $|B| < |V| - 1$  בצע:
  - 2.1 הוצא צלע זולה ביותר מ- $C$ , נקרא לה  $e$
  - 2.2 אם  $e$  אינה יוצרת מעגל עם הצלעות ב- $B$  אז  $B \leftarrow B \cup \{e\}$
3. החזר את  $(V, B)$ .

האלגוריתם של פריים (Prim)

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  קשיר עם פונקצית משקל  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. בחר  $r \in V$  כלשהו
2. אתחל  $B \leftarrow \emptyset, S \leftarrow \{r\}$
3. כל עוד  $|B| < |V| - 1$  בצע:
  - 3.1 תהי  $(u, v)$  צלע זולה ביותר מבין הצלעות  $(u, v) \in E$  כך ש- $u \in S, v \notin S$
  - 3.2  $B \leftarrow B \cup \{e\}$
  - 3.3  $S \leftarrow S \cup \{v\}$
4. החזר את  $(V, B)$ .

האלגוריתם של דיקסטרה (Dijkstra)

```

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
1 for each vertex  $v \in V[G]$  do
2    $d[v] \leftarrow \infty$ 
3    $\pi[v] \leftarrow \text{NIL}$ 
4    $d[s] \leftarrow 0$ 

```

```

RELAX( $u, v, w$ )
1 if  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  then
2    $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ 
3    $\pi[v] \leftarrow u$ 

```

```

DIJKSTRA( $G, w, s$ )
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  $S \leftarrow \emptyset$ 
3  $Q \leftarrow V[G]$ 
4 while  $Q \neq \emptyset$  do
5    $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6    $S \leftarrow S \cup \{u\}$ 
7   for each vertex  $v$  in  $Q$  such that  $v \in \text{Adj}[u]$  do
8     RELAX( $u, v, w$ )

```

## תכנון אלגוריתמים – 202-1-2041

בוחן אמצע סמסטר 30.4.2010

## דפי עזר לבוחן

**משפטים**משפט 1:

יהי  $G = (V, E)$  גרף פשוט ולא מכוון. התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1.  $G$  קשיר וחסר מעגלים,
2.  $G$  חסר מעגלים ו-  $|E| = |V| - 1$ ,
3.  $G$  קשיר ו-  $|E| = |V| - 1$ ,
4. ב-  $G$  יש מסלול פשוט יחיד בין כל זוג קודקודים.

משפט 2:

יהי  $G = (V, E)$  גרף קשיר, לא מכוון ופשוט. יהי  $T = (V, F)$  עץ פורש של  $G$  ו-  $e \notin F$ . אזי  $H = (V, F \cup \{e\})$  מכיל מעגל יחיד, ולכל צלע  $e'$  במעגל  $T' = (V, F \cup \{e\} \setminus \{e'\})$  הוא עץ פורש של  $G$ .