עבודת בית 3 בתכנון אלגוריתמים

תאריך הגשה , 28.03.2011 בשעה 12:00 בצהריים ,תא מספר 68 בקומת כניסה של בניין 37.
הערות:
מתרגל אחראי: אלכס.
כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
1. תיאור מילולי של האלגוריתם.
2. הוכחת נכונות.
3. ניתוח זמן ריצה.

אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
פתרון יש לכתוב רק בדף התשובות הנלווה לעבודה

שאלה 1

בהינתן שתי מחרוזות דומות אבל לא זהות אנחנו רוצים לדעת עד כמה הן דומות. למשל כשאנחנו מחפשים בטקסט (כמו גוגל) מילה אבל היא רשומה עם שגיאת כתיב. לדוגמא: תל-אביב ו-טל-אביב או תל-אביב ו-תלאביב. נרצה לדעת מה מספר פעולות העריכה (החלפת אות, מחיקת אות , הוספת אות) ***המינימאלי*** שעלינו לבצע כדי להפוך את המחרוזת בטקסט למחרוזת שחיפשנו.

דוגמא: אם בטקסט מופיע תל-אבב וחיפשנו תל-אביב אז צריך פעולת עריכה אחת (**להוסיף י**).
נסמן את P (Pattern) כתבנית שאנחנו מחפשים ו-T כמה שמופיע ב-Text.

הגדרה פורמאלית של מרחק עריכה:
בהינתן תבנית $P = < P_1, P_2 \dots P_n >$ וטקסט $T = < T_1, T_2, \dots T_m >$ מרחק עריכה הינו **מספר** פעולות מינימאלי שיש לבצע על T כדי לקבל את P.

נסמן פתרון חוקי בתור רצף של פעולות עריכה (לפי סדר) $U = < e_1, e_2, e_3 .. e_k >$ כך שכל e_i מסמל פעולת עריכה. $e_i \in \{Insert(\sigma, j), Delete(j), Replace(\sigma, j)\}$.

$Insert(\sigma, j)$ – הכנסת אות כלשהי אחרי T_j
$Delete(j)$– מחיקת התו T_j .
$Replace(\sigma, j)$– החלפת התו T_j בתו σ.

נגדיר $OPT(i, j)$ להיות מרחק עריכה מינימאלי בין הרישא באורך j של T לרישא באורך i של P.
עלות כל פעולת עריכה היא 1.
נתונה נוסחאת המבנה הבאה:

$$OPT(i,j) = \begin{cases} 0 & if\ i = j = 0, \\ j & if\ j > 0\ and\ i = 0, \\ i & if\ i > 0\ and\ j = 0, \\ OPT(i-1, j-1) & if\ P_i = T_j, \\ min(OPT(i-1,j) + 1, OPT(i,j-1) + 1, OPT(i-1,j-1) + 1\} & else, \end{cases}$$

<u>סעיף א</u> הגדירו מהו ערך פתרון אופטימאלי ע"י שימוש במונח OPT.

<u>סעיף ב</u> הוכיחו את נוסחת המבנה שניתנה בשאלה ע"י השלבים הבאים:

- הגדרת תתי-קבוצות של פתרונות אפשריים לפי חלוקה למקרים.
- הוכחה שתתי-הקבוצות הנ"ל מכסות את כל הפתרונות האפשריים.
- הסקת הצורה הסכמאטית של נוסחת הרקורסיה.
- ניתוח כל תת-קבוצת פתרונות בנפרד והוכחת המרכיבים המתאימים בנוסחאת המבנה.

<u>שאלה 2</u>

<u>מופע:</u> גרף **מכוון** חסר מעגלים $G=(V,E)$ ממושקל על צלעותיו לפי פונקציה w (ייתכנו משקלים שליליים) ושני קודקודים x ו- y

צואר בקבוק במסלול P מוגדר להיות משקל מינימום של קשת ב-P.

<u>פתרון חוקי:</u> מסלול פשוט בין x ל- y .

<u>יש למצוא:</u> פתרון חוקי עם **צוואר בקבוק** מקסימום.

נסחו אלגוריתם אשר מוצא את הפתרון בזמן $O(|V|+|E|)$

<u>סעיף א</u>: הגדירו את תתי הבעיות באופן מילולי והגדירו את OPT.

<u>סעיף ב</u>: נסחו את נוסחת המבנה, כולל מקרי בסיס ומיקום הפתרון לבעיה המקורית.

<u>סעיף ג</u>: הוכיחו את נוסחת המבנה שניתנה בשאלה ע"י השלבים הבאים:

- הגדרת תתי-קבוצות של פתרונות אפשריים לפי חלוקה למקרים.
- הוכחה שתתי-הקבוצות הנ"ל מכסות את כל הפתרונות האפשריים.
- הסקת הצורה הסכמאטית של נוסחת הרקורסיה.
- ניתוח כל תת-קבוצת פתרונות בנפרד והוכחת המרכיבים המתאימים בנוסחאת המבנה.

<u>סעיף ד</u>: נסחו אלגוריתם **איטראטיבי** למציאת ערך פתרון אופטימאלי, הוכיחו אותו ונתחו את זמן ריצתו.

<u>סעיף ה</u>: כתבו אלגוריתם המשחזר את הפתרון (ניתן לשלב מציאת פתרון בסעיף ד')

שאלה 3

נזכר בבעיית הגנב (בעיית התרמיל) מהכיתה. בהינתן אוסף של n פריטים כך שלכל פריט i יש ערך p_i ומשקל w_i ובהינתן חסם W על המשקל שהתרמיל יכול לשאת, ראינו אלגוריתם מבוסס תכנון דינאמי אשר בחר פריטים בעלי ערך מקסימום שמשקלם לא עולה על משקל התרמיל.

בשאלה זאת עליכם לתכנן אלגוריתם אשר יפתור את הבעיה במקרה ולגנב יש שני תרמילים שיכולים לשאת משקל W_1 ו-W_2 בהתאמה.

<u>מופע</u>: סדרה של פריטים וסדרה של משקלים $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots w_n\}$.
שתי סדרות של מחירים $(b_1, b_2, b_3, \dots b_n)$ ו- $(a_1, a_2, a_3, .. a_n)$ כך שאם פריט i מוכנס לשק 1 הגנב מרוויח רווח a_i ואם הוא מוכנס לשק 2 הגנב מרוויח b_i.
לכל שק משקל נשיאה מקסימאלי של W_1 ו-W_2.

<u>פלט חוקי:</u> שתי תתי קבוצות $A, B \subseteq \{1 \dots n\}$
כך ש- $A \cap B = \emptyset$ ו-$\sum_{i \in B} w_i \le W_2$ and $\sum_{i \in A} w_i \le \mathrm{W}_1$

<u>יש למצוא</u> פתרון חוקי כך ש- $\sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} b_i$ מקסימאלי.

<u>סעיף א</u>: הגדירו את תתי הבעיות באופן מילולי והגדירו את OPT.
<u>סעיף ב</u>: נסחו את נוסחת המבנה, כולל מקרי בסיס ומיקום הפתרון לבעיה המקורית.
<u>סעיף ג</u>: הוכיחו את נוסחת המבנה שניתנה בשאלה ע"י השלבים הבאים:
- הגדרת תתי-קבוצות של פתרונות אפשריים לפי חלוקה למקרים.
- הוכחה שתתי-הקבוצות הנ"ל מכסות את כל הפתרונות האפשריים.
- הסקת הצורה הסכמאטית של נוסחת הרקורסיה.
- ניתוח כל תת-קבוצת פתרונות בנפרד והוכחת המרכיבים המתאימים בנוסחאת המבנה.

<u>סעיף ד</u>: נסחו אלגוריתם **איטראטיבי** למציאת ערך פתרון אופטימאלי, הוכיחו אותו ונתחו את זמן ריצתו.
<u>סעיף ה</u>: כתבו אלגוריתם המשחזר את הפתרון. (ניתן לשלב מציאת פתרון בסעיף ד')

שאלה 4

חברת תעופה יכולה להוציא טיסות בזמנים ספציפיים המסומנים ב-$t_1, t_2, \ldots t_n$ (כל t_i מקבל ערך שהוא **מספר טבעי כלשהו**). לכל טיסה שיכולה לצאת בזמן t_i יש רווח p_i. **הגבלות** רשות התעופה לא מאפשרות להוציא טיסות אחת אחרי השניה אלא במרווח זמן של **m שעות לפחות.**
החברה רוצה להרוויח כסף רב ככל הניתן מהטיסות שניתן להוציא. נרצה לתכנן אלגוריתם שיבחר את הטיסות שיכניסו רווח גדול ביותר לחברה.

דוגמא: אם $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 6$ ו- $m = 4$
ו- $p_1 = 100, p_2 = 1000, p_3 = 50$ אז משתלם יותר להוציא את הטיסות בזמנים t_2 ו-t_3 ולהרוויח 1050 במקום להוציא בזמנים x_1 ו- x_3 ולהרוויח רק 150.

<u>מופע</u>: סדרת זמני יציאה אפשריים של טיסות $T = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\}$ וסדרת רווחים אפשריים לכל זמן יציאה $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots., p_n\}$ ומרווח זמן מינימאלי בין טיסות עוקבות m.

<u>פתרון חוקי:</u> תת סדרה של זמנים $< t_{i_1}, t_{i_2} \ldots t_{i_k} >$ כך ש- $i_1 < i_2 <..< i_k$ וגם $t_{i_{j+1}} - t_{i_j} \geq m$

<u>יש למצוא:</u> פתרון חוקי עם רווח מקסימום.

<u>סעיף א</u>: הגדירו את תתי הבעיות באופן מילולי והגדירו את OPT.
<u>סעיף ב</u>: נסחו את נוסחת המבנה, כולל מקרי בסיס ומיקום הפתרון לבעיה המקורית.
<u>סעיף ג</u>: הוכיחו את נוסחת המבנה שניתנה בשאלה ע"י השלבים הבאים:
- הגדרת תתי-קבוצות של פתרונות אפשריים לפי חלוקה למקרים.
- הוכחה שתתי-הקבוצות הנ"ל מכסות את כל הפתרונות האפשריים.
- הסקת הצורה הסכמאטית של נוסחת הרקורסיה.
- ניתוח כל תת-קבוצת פתרונות בנפרד והוכחת המרכיבים המתאימים בנוסחאת המבנה.

<u>סעיף ד</u>: נסחו אלגוריתם **איטראטיבי** למציאת ערך פתרון אופטימאלי, הוכיחו אותו ונתחו את זמן ריצתו. על האלגוריתם לרוץ בזמן פולינומי ב- n.
<u>סעיף ה</u> יהי t_i זמן טיסה מקסימאלי.
באיזה תנאי t_i שייך לפתרון אופטימאלי כלשהו? באיזה תנאי t_i שייך **לכל** פתרון אופטימאלי?