

# תכנון אלגוריתמים 202-1-2041 – סמסטר ב' תשס"ז

## בוזן אמצע סמסטר – 11.5.2007

ללא חומר עזר

### הנחיות חשובות:

- הבוחן הינו ללא חומר עזר.
- משך הבוחן שעתיים.
- פתרו את הבוחן תחילה במחברת הטיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.**
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ-3 שאלות, יש לענות על כל השאלות. לסדר הופעת השאלות בטופס אין משמעות כלל בהקשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה מעבודות הבית דורשת הוכחה מלאה.
- במידה והינכם מסתמכים על טענות ומשפטים מהכיתה נסחו את אלו במדויק.
- **אם לא מצויין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא.
- מומלץ מאוד לבדוק את עבודתך לפני הגשתה.

**בהצלחה!**

## שאלה 1 (45 נקודות בסה"כ)

הסוחר חוטומחט נודע בשוק האריגים הקשמירי, והוא מספק מסחורתו אפילו לבית המלוכה.

### סעיף א (30 נקודות)

ברשותו של הסוחר סרט משי אחד באורך  $L$ . הסוחר קיבל הזמנה מהחייט המלכותי לספק  $m$  קטעי סרט משי, כלומר רשימה  $Order = \langle (n_1, v_1), (n_2, v_2), \dots, (n_m, v_m) \rangle$  כאשר לכל  $1 \leq i \leq m$  החייט מבקש סרט אחד באורך  $n_i$  והוא מוכן לשלם עבורו  $v_i$  רופי. הסוחר מתכוון לחתוך את הסרט שבידו על מנת לספק כעת חלק מההזמנה, בצורה כזאת שהתשלום שיקבל יהיה מקסימאלי.

נסחו נוסחת רקורסיה (כולל מקרי בסיס), ופסאודו-קוד של אלגוריתם איטרטיבי מבוסס תכנון דינאמי שזמן ריצתו הוא  $O(Lm)$ , אשר ידווח לסוחר מהו התשלום המקסימאלי שהוא יכול לקבל בדרך זאת. הגדירו בעברית את משמעות האיבר הכללי שהאלגוריתם מחשב, ונמקו את נכונות נוסחת הרקורסיה. כמו כן יש להסביר את זמן הריצה של האלגוריתם.

### סעיף ב (15 נקודות)

החייט היה מאד מרוצה מהסחורה שקיבל, וכעת הסוחר קיבל ממנו הזמנה אחרת. החייט סיפק לו רשימה כמו קודם, אלא שכעת לכל  $1 \leq i \leq m$  הסוחר רשאי לבחור לספק מספר קטעי סרט באורך  $n_i$  ככל העולה על רוחו. גם במקרה זה, הסוחר מתכוון לחתוך את הסרט שבידו על מנת לספק חלק מההזמנה, בצורה כזאת שהתשלום שיקבל יהיה מקסימאלי.

שוב המשימה היא לפתח אלגוריתם איטרטיבי מבוסס תכנון דינאמי שזמן ריצתו הוא  $O(Lm)$  אשר ידווח לסוחר מהו התשלום המקסימאלי שהוא יכול לקבל בדרך זאת.

הגדירו בעברית את משמעות האיבר הכללי שהאלגוריתם יחשב, נסחו את נוסחת הרקורסיה (כולל מקרי בסיס), ונמקו בקצרה את נכונותה. **אין צורך לנסח את האלגוריתם.**

הערה: אלגוריתם שזמן ריצתו הוא  $O(L^2m)$  לא יתקבל, ואלגוריתם שזמן ריצתו הוא  $O(L^2)$  יזכה רק במחצית הנקודות.

## שאלה 2 (45 נקודות בסה"כ)

חישבו על הבעיה הבאה:

מופע הבעיה: - גרף קשיר  $G=(V,E)$

- פונקציה משקל על הצלעות  $w:E \rightarrow \mathbb{R}$

- צלע  $e=(u,v)$  מתוך הקבוצה  $E$

המטרה: בניית עץ פורש מינימאלי במשקלו מבין כל העצים הפורשים של הגרף  $G$ , המכילים את הצלע  $e$ .

### סעיף א (30 נקודות)

נתון האלגוריתם לפתרון הבעיה לעיל:

1.  $A \leftarrow \emptyset$

2. עבור כל קודקוד  $v \in V$

2.1.  $\text{MakeSet}(v)$

3. מיינ את הצלעות  $E$  על פי סדר לא יורד של המשקלים  $w$ .

4. העבר את הצלע  $e$  לראש הרשימה הממוינת

5. עבור כל צלע  $(u,v) \in E$ , בסדר המיון, בצע:

5.1. אם  $\text{FindSet}(u) \neq \text{FindSet}(v)$  אזי:

5.1.1.  $A \leftarrow A \cup \{(u,v)\}$

5.1.2.  $\text{Union}(u,v)$

6. החזר את  $A$ .

שימו לב, כי האלגוריתם הזה לאלגוריתם קרוסקל, למעט שורה מספר 4.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם. לצורך זה נסחו טענה נשמרת ללולאה שמתחילה בשורה 5, והוכיחו את הישמרותה. כחלק מהוכחה זו חובה לנסח ולהוכיח טענת עזר, דומה לזאת שהובאה בהרצאה, על הוספה של צלע קלה ביותר החוצה חתך שמכבד את  $A$  לקבוצה טובה  $A$ .

### סעיף ב (15 נקודות)

תארו רדוקציה של הבעיה שהוצגה לעיל לבעיית MST הרגילה.

נסחו במדויק רק את הטענה הראשית אשר תבהיר את נכונות הרדוקציה (ללא הוכחה).

## שאלה 3 (10 נקודות)

ניזכר שבאלגוריתם Union-Find עבור  $n$  איברים, מבנה הנתונים לתחזוק הקבוצות ממומש ע"י רשימות מקושרות, פעולת האיחוד ממומשת ע"י שרשור הרשימה הקצרה לסוף הרשימה הארוכה ועדכון המצביעים ברשימה הקצרה, להצביע למנהיג הרשימה הארוכה.

נניח שמתבצעים  $k$  איחודים, החל מקבוצות המכילות איבר יחיד,  $k \leq n$ . מהו זמן הריצה של ביצוע כל האיחודים? יש לנמק.

# בהצלחה!