מציאת מעגל שלילי בגרף

<u>ניסוח הבעיה:</u>

מופע: גרף מכוון וממושקל $G=(V,E)$, וקודקוד $s\in V$.

צריך למצוא: מעגל עם משקל שלילי ב-*G*, אשר ניתן להגיע אליו מ-*s* (אם קיים).

<u>רעיון האלגוריתם</u>:

הרעיון הוא להריץ את האלגוריתם של Bellman-Ford, לבצע n איטרציות (במקום $n-1$) ולבדוק האם קיים קודקוד v שערכו $d[v]$ משתנה באיטרציה ה-n. אם קיים, נטען כי בהכרח קיים מעגל שלילי נגיש מ-s, שניתן להגיע אליו אם נעקוב אחרי מערך המצביעים π החל מ-v.

<u>תיאור האלגוריתם:</u>

```
Find-Negative-Cycle(G, w, s)
    for each vertex v ∈ V
        d[v] ← ∞
        π[v] ← nil
    d[s] ← 0
    for i ← 1 to |V|−1 do
        for each edge (u,v) ∈ E
            Relax(u, v, w)
    for each edge (u,v) ∈ E
        d' ← d[v]
        Relax(u, v, w)
        if d' > d[v]
            return Report-Negative-Cycle(v, π)
    return "No negative cycles found"
```

<u>הוכחת נכונות:</u>

כדי להוכיח את נכונות האלגוריתם, עלינו להוכיח שתי טענות:

<u>טענה א</u>: **קיים** מעגל שלילי הנגיש מ-s ב-G אם ורק אם קיימת צלע $(u,v)\in E$ כך שהתנאי $d' > d[v]$ מתקיים עבורה.

<u>הוכחת טענה א</u>: עובדה זו נובעת ישירות מנכונות Bellman-Ford.

<u>טענה ב</u>: אם קיים קודקוד v עבורו מתקיים התנאי $d' > d[v]$, אזי **ניתן** למצוא מעגל שלילי נגיש מ-s ע"י מעקב אחר מערך המצביעים π החל מ-v.

<u>הוכחת טענה ב</u>: לשם כך נשתמש ב-5 טענות.

<u>טענה 1</u>: מעבר על מערך המצביעים π החל מקודקוד v אשר עבורו התקיים התנאי $d' > d[v]$, מוצא מעגל הנגיש מ-s.

<u>טענה 2</u>: כל מעגל שנוצר במערך π הוא בעל משקל שלילי.

<u>הגדרה:</u> $\delta_k(s,v)$ עלות מסלול הכי זול באורך קטן או שווה k מ s ל v. אם אין מסלול בגודל המתאים אזי $\delta_k(s,v)=\infty$.

<u>טענה 3:</u> לאחר k איטרציות $d[v]\le\delta_k(s,v)$ ובנוסף אם v אינו נגיש מ s אז $d[v]=\infty$.

<u>טענה 4 :</u> יהי P_π מסלול במערך π מ- s ל- v. אם מתקיים d[s]=0 אזי משקל המסלול מקיים: $w(P_\pi)\le d[v]$.

<u>טענה 5</u> יהי $P_\pi=(u_1,\dots,u_m)$ מסלול במערך π מ- u_1 ל- u_m כך ש $|P_\pi|>0$ (*m>1*). אם מתקיים ש $\pi(u_1)=nil$ אזי $u_1=s$.

נוכיח את טענות 2 – 5, ולאחר מכן נוכיח את טענה 1 אשר ממנה נסיק את נכונות טענה ב.

<u>הוכחת טענה 2</u>: נתבונן ברגע שבו נוצר מעגל $C=(v_1,v_2,\dots,v_k,v_1)$. ב.ה.כ נניח כי המצביע האחרון להתעדכן הוא $\pi[v_1]\leftarrow v_k$. סימנו ב-d' את הערך שהיה ב- $d[v_1]$ לפני העדכון. ניתן להסיק כי ,

$$\boxed{d'>d[v_1]=d[v_k]+w(v_k,v_1)}\ (1).$$

נשים לב שעבור כל קודקוד u וקודקוד האב שלו p , מתקיים $d[u]\ge d[p]+w(p,u)$. השוויון מתקיים ברגע העדכון בו $\pi[u]$ קיבל את הערך p, ולאחר מכן, הערך $d[p]$ יכול רק לקטון כתוצאה מעדכונים נוספים.

נסיק כי $d[v_2]\ge d'+w(v_1,v_2)$, ועבור כל $3\le i\le k$, $d[v_i]\ge d[v_{i-1}]+w(v_{i-1},v_i)$.

ולכן, (2)

$$\boxed{d[v_k]\ge d[v_{k-1}]+w(v_{k-1},v_k)\ge d[v_{k-2}]+w(v_{k-2},v_{k-1})+w(v_{k-1},v_k)\ge\ldots\ge d'+\sum_{i=1}^{k-1}w(v_i,v_{i+1})}.$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{(1)\uparrow}{d'>d[v_1]}=d[v_k]+w(v_k,v_1)\underset{\uparrow(2)}{\ge} d'+\left(\sum_{i=1}^{k-1}w(v_i,v_{i+1})+w(v_k,v_1)\right)$$

ולכן עלות המעגל בהכרח שלילית.

<u>הוכחת טענה 3:</u>

ההוכחה באינדוקציה על k.

בסיס: k=0. המסלול האפשרי היחיד הוא באורך 0 הוא המסלול הריק בין s לעצמו, משקלו 0 כמו כן $\delta_0(s,s)=0$. עבור קדקוד v השונה מ s, על פי הגדרה יתקיים $\delta_0(s,v)=\infty$. זה בדיוק תואם

את האתחול של המערך d.

צעד: נניח שהטענה מתקיימת עבור k. יהי $P = \langle s, \dots, u, v\rangle$ מסלול כך שאורכו קטן שווה ל k+1 ומקיים $\delta_{k+1}(s,v) = w(P)$. מכיוון ש $\langle u, v\rangle$ צלע, אזי באיטרציה ה *k +1* ביצענו $Relax(u,v,w)$. נסמן את t להיות הערך של $d[u]$ בזמן ביצוע פעולת ה *Relax* כמו כן $d_k[u]$ הינו ערך של $d[u]$ בסוף האיטרציה ה *k* (נשים לב ש $t \le d_k[u]$. מכיון שיתכן שפעולות *Relax* מוצלחות על *u* באיטרציה ה *k+1* עדכנו את ערכו של $d[u]$ לערך קטן יותר מ $d_k[u]$). ולכן נקבל:

$$d[v] \le t + w(u,v) \le d_{k[u]} + w(u,v) \le \delta_k(s,u) + w(u,v) = w(P) = \ \delta_{k+1}(s,v)$$

נותר להוכיח את החלק השני של הטענה. נניח בשלילה שיש קודקוד v שאינו נגיש מ s אבל לאחר *k* איטרציות הערך $d[v]$ מתעדכן לערך שקטן מ ∞ . נקח קודקוד כזה v ונניח ש v הוא הראשון שהערך $d[v]$ מתעדכן לערך שאינו ∞ בריצת האלגוריתם. הערך $d[v]$ מתעדכן על ידי פעולת $Relax(u,v,w)$. מכיון ש $(u,v) \in E$ גם u אינו נגיש מ s. אבל ערכו של v התעדכן בפעולת $Relax(u,v,w)$, לכן לפני בצוע הפעולה מתקיים $d[u] < \infty$ בסתירה למינימליות של בחירת v.

<u>הוכחת טענה 4:</u>

ההוכחה באינדוקציה על אורך המסלול.

בסיס: מסלול באורך 0 מ-s ל-v פירושו מסלול ריק מ-s לעצמו. משקל המסלול 0 וגם $d[s] = 0$.

מהלך: נניח שכל מסלול באורך> i מקיים את הטענה, ונסתכל על מסלול $\mathrm{P}_i = (s, \dots \pi[v], v)$ באורך i, נסמן ב $P_{\mathrm{i-1}}$ את תת המסלול של P_i המתחיל ב s ונגמר ב $\pi[v]$, כלומר

$$\mathrm{P_{i-1}} = (\mathrm{s}, \dots, \pi[\mathrm{v}])$$

משקל המסלול הוא:

$$w(P_i) = w(P_{i-1}) + w(\pi[v], v) \le d\big[\pi[v]\big] + w(\pi[v], v) \le d[v]$$

כאשר אי השוויון השמאלי הוא בזכות הנחת האינדוקציה, ואת אי השוויון הימני נצדיק כך:

נסמן ב t' את ערכו של $d[\pi(v)]$ בעת בצוע פעולת ה Relax שעדכנה את ערכו של $d[v]$. לאחר בצוע פעולה זו, יתכן שבוצעו פעולות Relax נוספות באיטרציה ה K+1 על הקודקוד $\pi(v)$ וכתוצאה מכך בסוף האיטרציה בהכרח: $d[\pi(v)] \le t'$. נקבל ש

$$d[v] = t' + w(\pi(v), v) \ge d[\pi(v)] + w(\pi(v), v)$$

כנדרש. למעשה על פי אותו הסבר, אי שוויון זה נכון עבור כל קודקוד ואביו במערך π.

<u>הוכחת טענה 5:</u>

יהי $P_\pi = \langle u_1, \dots, u_m\rangle$ מסלול ב π כלומר $\pi(u_{i+1}) = u_i$ כמו כן מתקיים ש $\pi(u_1) = nil$ ו *m>1*. מכיוון ש $\pi(u_2) = u_1$, במהלך פעולת $Relex(u_1, u_2, w)$ האחרונה המוצלחת על u_2

התעדכן הערך של $\pi(u_2)$.   אך זה מתקיים רק אם התנאי הבא התקיים

$$d[u_2] > d[u_1] + w(u1, u2)$$

. כלומר $d[u_1] < \infty$.   מכיוון ש $\pi(u_1) = nil$ לא קיים קודקוד a כך ש יש צלע בין a ל u_1 וגם $Relex(a, u_1, w)$ עדכן את הערך של $d[u_1]$. אך הקודקוד היחידי שהערך ההתחלתי שלו שונה מ ∞ הוא s ולכן $u_1 = s$.

<u>הוכחת טענה 1 והסקת נכונות טענה ב:</u>

נשים לב כי מעבר על המצביעים החל מ- v הוא חד משמעי (אין התפצלויות) כיוון שלכל קודקוד ישנו רק קודקוד אב יחיד.

יהי v קודקוד המקיים את התנאי $d' > d[v]$. (באיטרציה ה- $|V|$, בשורה 11 של האלגוריתם)

כלומר קיימת צלע $(u, v) \in E$שפעולת $Relax$ באיטרציה ה-$|V|$ עדכנה את $d[v]$ כך:

$$d[v] \leftarrow d[u] + \omega(u, v)$$

$$\pi[v] \leftarrow u$$

אם הצלחנו למצוא מעגל אז על פי טענה 2 משקלו שלילי. לכן, נניח בשלילה שהמעבר על מערך המצביעים π החל מקודקוד v אינו מוצא מעגל. כלומר, המעבר מייצר מסלול P_π מ- u ל- v ללא חזרה על אף קודקוד פעמים. בהכרח $|P| \leq n - 1$, אחרת היינו מגלים מעגל.

מיהם קודקודי המסלול P_π? $\langle \pi[\ldots \pi[v]], \ldots, \pi[v], v \rangle = \langle u, \ldots, \pi[v], v \rangle$

כמו כן מתקיים $\pi[u] = nil$ ו $0 < |P|$ ולכן על לפי טענה 5, $u = s$.

מטענה 3 נקבל שלאחר |v|-1 איטרציות $d[v] < d' \leq \delta_{|v|-1}(s, v) \leq w(P_\pi)$.

מכיוון ש $\pi[s] = nil$ אזי $d[s] = 0$ ולכן בעזרת טענה 4 נקבל:

$$w(P_\pi) \leq d[v]$$

ולכן סה"כ קיבלנו ש $d[v] < d' \leq w(P_\pi) \leq d[v]$.

קבלנו סתירה ולכן בהכרח מצאנו מעגל ולפי טענה 2 משקלו שלילי. כדי לסיים את ההוכחה לטענה ב נראה שהמעגל נגיש מ s. נשים לב שמטענה 3 נובע כי לכל קודקוד v , אם $d[v] < \infty$ אז v נגיש מ- s. כיוון שהערך $d[v]$ של כל קודקוד v במעגל סופי (כי משקל המעגל שלילי), נסיק כי המעגל נגיש מ- s.

בעיית הרמזורים

חברת אוטובוסים רוצה לתכנן מסלול נסיעה לקו אוטובוס חדש. המסלול יעבור בכבישי העיר מצומת לצומת. חלק מהצמתים מרומזרים וחלק לא. מסקר שערכה חברת אוטובוס, הנוסעים לא יעלו על קו שעובר ביותר משני צמתים מרומזרים. כיוון שמטרת החברה להרוויח כסף, היא מעוניינת לתכנן מסלול קצר ביותר לקו החדש בין שני צמתים נתונים (שניהם לא מרומזרים). עליכם לפתח אלגוריתם שיפתור בעיה זו.

<u>שימו לב</u>: רחובות העיר יכולים להיות חד כיווניים.

<u>ניסוח פורמאלי:</u>

- גרף מכוון $G=(V,E)$ ופונקצית משקל על הצלעות $w:E\rightarrow R^{+}$ (משקלות חיוביים), כאשר הקודקודים V מתארים צמתים ברשת כבישים והצלעות E מתארות את הכבישים (אורך הכביש הוא משקל הצלע).
- תת-קבוצת קודקודים $S\subseteq V$ שמסמלת את קבוצת הצמתים המרומזרים.
- קודקוד התחלה $s\in V\setminus S$ וקודקוד סיום $t\in V\setminus S$ (הצמתים המתאימים אינם מרומזרים).

<u>צריך למצוא</u>: מסלול קצר ביותר מ- s ל- t העובר בלכל היותר שני קודקודים מ- S.

<u>הפתרון</u>: נבצע <u>רדוקציה</u> לבעיית המסלול הקצר ביותר בין שני קודקודים.

<u>תיאור הרדוקציה</u>

<u>שלב תרגום הקלט</u>:

בהינתן מופע של הבעיה $\langle (E,V),w,S,s,t\rangle$, ניצור מופע $\langle (E',V'),w',s_0,t'\rangle$ לבעיית המסלול הזול ביותר מ- s_0 ל- t' בגרף $G'=(V',E')$ עם משקלות w' באופן הבא:

- עבור כל קודקוד בגרף המקורי $x\in V$, ניצור שלושה קדקודים בגרף החדש x_0,x_1,x_2, כאשר המשמעות היא שאם הגענו ל- x_i מ- s, אזי עברנו בדרך ב- i רמזורים. ניתן לדמיין את הגרף החדש כשכפול של הגרף המקורי לשלוש שכבות, כאשר כל שכבה מייצגת את מספר הרמזורים שנתקלנו בהם עד עתה. כמו כן, נוסיף עוד קדקוד $t`$, אשר יהיה קודקוד היעד במופע שניצור. נגדיר,

$$V'=\{x_i : i=0,1,2;\ x\in V\}\cup\{t'\}$$

- קבוצת הצלעות $E'=E_1\cup E_2\cup E_3$ תורכב מצלעות בתוך כל שכבה E_1, צלעות בין שכבות E_2, וצלעות נוספות E_3, כפי שמוסבר.

1. **צלעות בתוך כל שכבה (E_1)**:

$$E_1=\{(x_i,y_i)\,|\,(x,y)\in E,\ y\notin S, i\in\{0,1,2\}\}$$

קבוצת הצלעות הראשונה E_1 מורכבת מהצלעות בתוך כל שכבה שמקבילות לכל הצלעות בגרף המקורי $e=(x,y)\in E$, כך ש- y אינו צומת מרומזר ($y\notin S$). משקלן של צלעות האלו יהיה כמשקל הצלע המתאימה בגרף המקורי $w'(x_i,y_i)=w(x,y)$.

2. **צלעות בין שכבות (E_2)**:

$$E_2=\{(x_i,y_{i+1}):(x,y)\in E;\ y\in S, i\in\{0,1\}\}$$

קבוצת הצלעות השנייה E_2 מורכבת מהצלעות משכבה 0 ל-1 ומהצלעות משכבה 1 ל-2.

צלעות אלה מקבילות לכל הצלעות בגרף המקורי $e=(x,y)\in E$, כך ש- y הוא צומת מרומזר ($y\in S$). משקלן של צלעות האלו יהיה כמשקל הצלע המתאימה בגרף המקורי $w'(x_i,y_{i+1})=w(x,y)$.

3. **צלעות נוספות (E_3)**:

$$E_3=\{(t_0,t'),(t_1,t'),(t_2,t')\}$$

קבוצת הצלעות השלישית E_3 מורכבת מצלעות עם משקל 0 שמאפשרות להגיע מ- t_i ל- t ללא עלות, זאת כיוון שאנו מקבלים מצב שבו חצינו לכל היותר 2 רמזורים. משקלן של צלעות האלו הוא $w'(t_i,t')=0$.

<u>שלב הקופסה השחורה:</u>

נריץ את האלגוריתם של Dijkstra על המופע שיצרנו $\langle (E',V'),w',s_0,t'\rangle$ ונמצא מסלול זול ביותר מהמקור s_0 ליעד t'.

<u>שלב תרגום הפלט</u>:

בהינתן פתרון למופע שיצרנו, מסלול $P'=\{s_0 = x^0, x^1,..., x^k = t'\}$ ב-G' בעל מחיר L, נמיר אותו לפתרון לבעיה המקורית – מסלול זול ביותר מ-s ל-t ב-G העובר בלכל היותר שני צמתים מרומזרים. המסלול שנקבל יהיה אף הוא בעלות L.

- כיוון שהצלעות היחידות שמובילות ל-t' הן מ-E_3, לכן $x^{k-1} = t_i$, עבור $i \in \{0,1,2\}$ כלשהו. כיוון שמשקל צלעות אלה ב-G' הוא 0, נסיק כי עלות המסלול $\{x^0, x^1,..., x^{k-1}\}$ היא L.
- נשארנו עם מסלול המכיל צלעות E_1 ו-E_2 בלבד. כאשר יש בדיוק i צלעות מ-E_2 (עברנו בלכל היותר i רמזורים ולכן עברנו לכל היותר i פעמים בין שכבות).
- יהי $P = \{s = y^0, y^1,..., y^{k-1} = t\}$ מסלול ב-G כאשר צלע $(y^j, y^{j+1}) \in E$ מתאימה ל-$(x^j, x^{j+1}) \in E_1$ אם $y^{j+1} \in S$ (צומת מרומזר) או ל-$(x^j, x^{j+1}) \in E_2$ אם $y^{j+1} \notin S$ (צומת מרומזר), עבור $j \in \{0,1,\ldots,k-2\}$.
- עלות המסלול P היא גם L לפי הגדרת משקל הצלעות.

<u>**הוכחת נכונות**</u>

<u>טענה ראשית</u>: המסלול P הוא המסלול הזול ביותר ב-G מ-s ל-t מבין אלה שלא עוברים ביותר משני קודקודים מ-S אם"ם P' הוא המסלול הזול ביותר ב-G' מ-s_0 ל-t'.

<u>טענת עזר</u>: קיים מסלול ב-G מ-s ל-t העובר בלכל היותר 2 רמזורים ובעל משקל L, אם"ם קיים מסלול מ-s_0 ל-t' ב-$G'=(V'E')$ במשקל L.

<u>הוכחת הטענה הראשית</u>:

כיוון ראשון: יהי P מסלול ב-G שמתקבל בסוף שלב תרגום הפלט ממסלול מתאים P' ב-G' ואורכו L. נניח (בשלילה) כי קיים מסלול ב-G (העובר בלכל היותר 2 רמזורים) P^*, שאורכו $L^* < L$. עפ"י טענת העזר נקבל כי קיים מסלול ב-G' בעל אורך L^*, בסתירה לאופטימאליות הקופסא השחורה (האלגוריתם של Dijkstra).

כיוון שני: יהי P מסלול קצר ביותר באורך L מ-s ל-t ב-G שלא עובר ביותר משני קודקודים מ-S. מט.ע. קיים מסלול מתאים P' ב-G' מ-s_0 ל-t' באורך L. נניח בשלילה כי קיים ב-G' מסלול P'^* מ-

s_0 ל- t' באורך L^* כך ש- $L < L^*$. מט.ע. נובע כי קיים ב- G מסלול מתאים P^* באורך L^* מ- s ל- t בסתירה למינימאליות P.

<u>הוכחת טענת העזר</u>: ההוכחה היא באמצעות בנייה (בדומה לזאת שנעשתה בכדי להמיר את הפתרון של G' לפתרון לבעיה המקורית). שני הכיוונים הם סימטריים ולכן נוכיח רק את הכיוון שבהינתן מסלול P ב-G העובר בלכל היותר 2 רמזורים ובעל משקל L, נבנה מסלול P' ב-G' בעל משקל L.

יהי $P=\{s=x^0,x^1,...,x^{k-1}=t\}$ מסלול ב- G באורך L. יהי $0\le i\le 2$ מספר הצמתים המרומזרים שהמסלול עובר בהם. עלינו להתייחס לשלוש אפשרויות של הערכים של i ב.ה.כ. נניח $i=2$ ונסמן את הצמתים המרומזרים y^{j_1}, y^{j_2}, עבור $1\le j_1<j_2\le k-1$.

ניצר את המסלול המתאים ב- G': $P=\{s_0=x_0^0,x_0^1,...,x_0^{j_1-1},x_1^{j_1}...,x_1^{j_2-1},x_2^{j_2}\dots,x_2^{k-1},x^k=t\}$, כאשר $(x_0^{j_1-1},x_1^{j_1}),(x_1^{j_2-1},x_2^{j_2})\in E_2$, $(x_2^{k-1},x^k=t)\in E_3$ ושאר הצלעות הן ב- E_1.

כיוון שעלות הצלעות ב- E_1 ו- E_2 זהה לעלות של הצלעות המתאימות ב- E ועלות הצלעות ב- E_3 היא 0 ניתן להסיק כי עלותו של P' היא גם L.

<u>זמן ריצה</u>

- יצירת הגרף `G:
  - מס' הקדקודים הוא $3|V|+1$, וניתן ליצור אותם ב-$O(|V|)$.
  - מס' הצלעות הוא לכל היותר $3|E|+3$, וניתן ליצור אותם ב-$O(|E|)$.
  - יצירת פונקצית המשקל `w מלווה את יצירת הצלעות ולוקחת $O(|E|)$.
- הרצת הקופסא השחורה: הרצת האלגוריתם של Dijkstra דורשת $O(|E'|+|V'|\log|V'|)$.

  <u>שימו לב</u>: הזמן הוא במונחי המופע החדש שיצרנו וצריך לעבור למונחי המופע המקורי. מכיוון שבגרף שיצרנו יש $3|V|+1$ קודקודים ולכל היותר $3|E|+3$ צלעות, נקבל $O(|E|+|V|\log|V|)$.
- המרת המסלול שקיבלנו למסלול בגרף המקורי תארך כאורכו של המסלול $O(|V|)$.

ולכן זמן הריצה כולו הוא $O(|E|+|V|\log|V|)$.