

תרגול 14 - השפה המספקת-לא-מספקת היא NP קשה

הגדרה: הצבה מספקת-לא-מספקת של פסוק CNF היא הצבה כך שבכל פסוקית יש לפחות ליטרל אחד שמסתפק ולפחות ליטרל אחד שלא מסתפק.

דוגמא:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \widehat{x_3}) \wedge (\widehat{x_1} \vee \widehat{x_2} \vee x_3)$$

הצבה מספקת-לא-מספקת: $S(x_1) = S(x_2) = S(x_3) = True$.

הצבה שאינה מספקת-לא-מספקת: $S(x_1) = S(x_2) = True, S(x_3) = False$.

חשבו מה הקשר בין פסוקים ספיקים 3-CNF לפסוקים שיש עבורם הצבה מספקת-לא-מספקת, שקלו למשל את הפסוק הבא:

$$(x_1 \vee \widehat{x_2} \vee \widehat{x_3}) \wedge (\widehat{x_1} \vee \widehat{x_2} \vee x_3) \wedge (\widehat{x_1} \vee x_2 \vee \widehat{x_3}) \wedge (\widehat{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \widehat{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \widehat{x_3})$$

נגדיר: השפה $NAE - 3SAT$ תכיל את כל הפסוקים מצורת 3CNF שיש להם הצבה מספקת-לא-מספקת.

אבחנה: ההצבה ההפוכה להצבה מספקת-לא-מספקת היא מספקת-לא-מספקת.

משפט: $NAE - 3SAT$ היא NP-קשה.

הוכחה: $3SAT \leq^p NAE - 3SAT$.

הרדוקציה: בהינתן פסוק $\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m$, כאשר $c_i = \varphi_{i,1} \vee \varphi_{i,2} \vee \varphi_{i,3}$, נבנה פסוק $3SAT$ בצורה הבאה: נבנה פסוק φ' עם $2m$ פסוקיות. המשתנים ב- φ' הם המשתנים של φ המקוריים ובנוסף: t_1, t_2, \dots, t_m ו- b .

על כל פסוקיות c_i , נבנה 2 פסוקיות:

$$\varphi_i = (\varphi_{i,1} \vee \varphi_{i,2} \vee t_i) \wedge (\overline{t_i} \vee \varphi_{i,3} \vee b)$$

$$\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_m$$

יעילות – על ידי קריאה אחת של הפסוק ניתן לייצר פסוק שאורכו פי 2 מהפסוק המקורי.

צ"ל $\varphi \in 3SAT$, אמ"מ $NAE - 3SAT$ $\varphi' = f(\varphi)$

כיוון 1 -

יהא $\varphi \in 3SAT$, ועל כן קיימת הצבה (S) המספקת את φ . נראה כי קיימת הצבה מספקת-לא-מספקת ל- φ' .
נראה ע"י הרחבת ההצבה המספקת של φ לשאר המשתנים.

• נקבע $S(b) = false$

• לכל c_i , אם $S(\varphi_{i,2}) = true$ או $S(\varphi_{i,1}) = true$, נקבע $S(t_i) = false$

במקרה זה, S הצבה מספקת-לא-מספקת עבור שתי הפסוקיות הרלוונטיות.
אכן, בפסוקית הראשונה אחד מהליטרלים $\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}$ מסתפק (מההנחה) $S(t_i) = false$
ובפסוקית השניה, על פי הגדרת S , $S(\bar{t}_i) = true, S(b) = false$

• לכל c_i , אם $S(\varphi_{i,1}) = S(\varphi_{i,2}) = false$ (כלומר, המקרה הקודם לא מתקיים) אז בהכרח
 $S(\varphi_{i,3}) = true$. לכן נקבע $S(t_i) = true$, קל לראות שגם במקרה זה S הצבה מספקת-לא-מספקת
עבור שתי הפסוקיות המתאימות.

קיבלנו כי S הורחבה להצבה מספקת-לא-מספקת עבור φ' .

כיוון 2 -

נתון $\varphi' \in NAE - 3SAT$, כלומר קיימת הצבה מספקת-לא-מספקת (S) עבור φ' . נראה כי קיימת מספקת ל- φ .
נניח כי $S(b) = false$. נראה כי במקרה זה ההצבה המצומצמת למשתנים המקוריים, מספקת את φ .

הפסוקית $b \vee \varphi_{i,3} \vee \bar{t}_i$ מסתפקת-לא-מסתפקת בהצבה S . נבחן שני מקרים:

• אם $S(\varphi_{i,3}) = true$ אז c_i מסתפקת בהצבה S .

• אם $S(\varphi_{i,3}) = false$ אז $S(\bar{t}_i) = true$ ואז $S(t_i) = false$. נסתכל על הפסוקית הראשונה - $\varphi_{i,1} \vee t_i$
ומכיון ש S מצספקת-לא מספקת נקבל ש $S(\varphi_{i,1}) = true$ או $S(\varphi_{i,2}) = true$ ולכן c_i מסתפקת
תחת S גם במקרה זה.

הנ"ל נכון לכל c_i ולכן הפסוק מסתפק.

מה קורה אם $S(b) = true$?

המקרה הנ"ל בעייתי כאשר $S(x_1) = S(x_2) = S(x_3) = false$ ו- $S(t_i) = True$. ההצבה מספקת-לא-מספקת עבור φ' אבל φ לא מסתפק על ידי S .

נשתמש באבחנה ונסתכל על ההצבה ההפוכה ל S שגם היא מספקת-לא-מספקת. כלומר, נתבונן על עד אחר המעיד על שייכות לשפה.

במילים אחרות, על פי האבחנה ניתן להניח ש $S(b) = false$ ובמקרה זה טיפלנו.

זכרו מה רצינו להוכיח – שאם יש השמה מספקת-לא-מספקת אז φ ספיק (ויש לפחות השמה אחת כזו).