אוניברסיטת בן גוריון בנגב

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למתמטיקה

ראשיתה של הגיאומטריה הלא אוקלידית – ניתוח עבודותיהם של ג'והן בוליי וניקולאי לובצ'בסקי

חיבור לשם קבלת תואר "מגיסטר" בפקולטה למדעי הטבע

אורה אדלר

ora.adlr@gmail.com

February 2002 שבט תשס"ב

ראשיתה של הגיאומטריה הלא אוקלידית – ניתוח עבודותיהם של ג'והן בוליי וניקולאי לובצ'בסקי

חיבור לשם קבלת תואר "מגיסטר" בפקולטה למדעי הטבע

<u>מאת</u>: אורה אדלר

<u>שם המנחה</u>: פרופ' עמוס אלטשולר

המחלקה למתמטיקה

הפקולטה למדעי הטבע

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

תקציר

במאה השלישית לפני הספירה, כתב אוקלידס את עבודתו החשובה, ה-“Elements", אשר בה סיכם את עקרונות הגיאומטריה המתקבלת באופן דדוקטיבי, בהסתמך על מספר מונחי יסוד, ומספר אקסיומות אשר אותם הגדיר בראשית עבודתו.

בין האקסיומות, הפשוטות בניסוחן, בלטה אקסיומה אחת, הידועה בשם "אקסיומת המקבילים", אשר התייחדה באורכה, סרבולה, וחוסר הטריוויאליות שלה.

במשך מאות שנים ניסו מתמטיקאים רבים להוכיח כי אקסיומה זו ניתנת להוכחה על סמך האקסיומות האחרות של אוקלידס, והמשפטים הנובעים מהם, אשר אינם תלויים באקסיומת המקבילים, ובכך להפוך את האקסיומה למשפט. אך כל הניסיונות עלו בתוהו, וכל מה שהצליחו לקבל היה רשימה ארוכה של משפטים השקולים לאקסיומת המקבילים, אשר אם נצליח להוכיח אותם הרי שבכך הוכחנו את אקסיומת המקבילים. מתמטיקאים רבים פעלו בדרך השלילה, וניסו להוכיח כי אם נניח את שאר האקסיומות, וכן את שלילתה של אקסיומת המקבילים, אזי נגיע לסתירה. אך, כאמור, כל הניסיונות להוכחה נכשלו.

רק במאה ה-19 הגיעו מספר חוקרים למסקנה, כי אקסיומת המקבילים איננה תלויה באקסיומות האחרות, ואם נניח את שאר האקסיומות של אוקלידס, וכן את שלילתה של אקסיומת המקבילים אזי נקבל גיאומטריה עקבית לחלוטין, ללא סתירות פנימיות, אשר ניתן לבצע בה חישובי אורך, שטח, ונפח, ולפתח בה טריגונומטריה מישורית וספרית, בדיוק כמו בגיאומטריה האוקלידית. גיאומטריה זו נקראת "גיאומטריה לא-אוקלידית".

בין המייסדים של גיאומטריה זו נמנים ג'והן בוליי וניקולאי לובצ'בסקי אשר היו הראשונים אשר פרסמו בראשית המאה ה-19, ללא קשר ביניהם, עבודה מקיפה בנושא, אשר בה פיתחו גיאומטריה לא-אוקלידית. בעבודותיהם יצאו מהגדרה שונה מהמקובל, עבור ישרים מקבילים, ובעזרת מערכת של אקסיומות, ללא אקסיומת המקבילים, הוכיחו באופן מלא את כל המשפטים הנובעים באופן דדוקטיבי ממערכת זו.

בעבודה זו נסקרים הניסיונות הרבים אשר נעשו במשך השנים להוכחת אקסיומת המקבילים, ותיאור ראשיתה של הגיאומטריה הלא אוקלידית. עבודותיהם של בוליי ולובצ'בסקי מנותחות בפרוט, תוך השוואה ועמידה על קווי הדמיון הרבים ביניהם.

יבואו על הברכה....

תודה רבה לפרופ' עמוס אלטשולר, אשר הנחה והדריך אותי בכתיבת עבודה זו, על השעות הרבות אשר הקדיש מזמנו, על מנת לעזור, לייעץ, לתקן, ולשפר, עד אשר הגיעה העבודה אל מתכונתה הנוכחית.

תודה מיוחדת לבעלי, מני, אשר ללא עידודו הרב ותמיכתו בי לאורך כל הדרך, לא הייתי מגיעה לכתיבת עבודה זו. "שלי ושלכם שלו היא..."

תודה לאימי, הדסה קלימן, על עזרתה בתרגום.

תודה לגרשון חנוך ולחגי אילני, אשר הקדישו מזמנם לעבור על חלקים מהחומר, ותרמו לי מהבנתם ומניסיונם.

תוכן העניינים

*"Is there in geometry any shorter way than the ' Elements' ?
There is no royal road to geometry."* (Euclid, answering Ptolemy I question)

פרק 1 מבוא - אקסיומת המקבילים, וראשיתה של הגיאומטריה הלא-אוקלידית

חיבור זה מנתח ומשווה את עבודותיהם של ניקולאי לובצ'בסקי וג'והן בוליי אשר היו מהראשונים שפיתחו גיאומטריה לא-אוקלידית, המבוססת על מערכת של אקסיומות ללא אקסיומת המקבילים, הוכיחו באופן מלא את כל המשפטים הנובעים באופן דדוקטיבי ממערכת זו, וכן פרסמו את מחקרם. בפרק הראשון ניתן מבוא כללי על התפתחות נושא אקסיומת המקבילים, מאוקלידס היווני במאה השלישית לפני הספירה, ועד מייסדי הגיאומטריה הלא אוקלידית במאה התשע עשרה. בפרק השני מנותחת עבודתו של לובצ'בסקי, ובשלישי - עבודתו של בוליי. הפרק האחרון מסכם ומשווה בין עבודותיהם של לובצ'בסקי ובוליי.

1.1 אוקלידס[1]

אוקלידס (330-275 לפנ"הס) - מתמטיקאי יווני, חי ופעל באלכסנדריה של מצרים בימי תלמי הראשון, ואף ייסד שם בית מדרש. הוא נחשב, בצידם של ארכימדס ואפולוניוס, לאחד משלושת גדולי המתמטיקאים היוונים, ואולי אף לגדול שבהם. אוקלידס היה הראשון אשר ניסה לייסד את עקרונות הגיאומטריה ע"פ מספר מונחי יסוד ומספר אקסיומות, אשר מהם ניתן לפתח באופן דדוקטיבי את הגיאומטריה כולה.

בספרו 'היסודות' הכולל 13 כרכים, סיכם אוקלידס את עקרונות הגיאומטריה שפיתח. ספר זה הפך ברבות השנים לספר הגיאומטריה הבסיסי הנלמד עד היום בכל בתי הספר, עם שינויים קלים בלבד[2], ועד המאה ה-19 שימש כדוגמא למתמטיקה הקלאסית.

את הכרך הראשון של 'היסודות' פותח אוקלידס בקביעת מושגי היסוד והאקסיומות שעליהם מתבססת הגיאומטריה שאותה הוא מפתח, ועליהם מתבססים כל ההגדרות והמשפטים הבאים.

[1] בכתיבת פרק זה נעזרתי ב [11, עמ' 22-97].
[2] הספר תורגם לשפות רבות (תרגומיו הם המרובים ביותר בספרות העולמית), והוא הנפוץ ביותר בעולם לאחר התנ"ך.

אוקלידס מניח כבסיס לגיאומטריה שלו עשר אקסיומות אשר אותן הוא מחלק לשתי קבוצות: "הנחות יסוד" (postulates), ו"רעיונות מקובלים" (common notions)[3].

חמש האקסיומות הגיאומטריות (postulates) הן[4]:

1. ניתן לשרטט קו ישר מכל נקודה לכל נקודה.[5]
2. ניתן להאריך כל ישר סופי (קטע) באופן רציף לקו ישר (אינסופי).[6]
3. ניתן לתאר כל מעגל בעזרת מרכז כלשהו ומרחק (רדיוס).[7]
4. כל הזוויות הישרות שוות[8].
5. <u>אקסיומת המקבילים:</u> אם קו ישר ש"נופל" על שני ישרים אחרים יוצר זוויות פנימיות באותו צד של הישר שהן פחות משתי זוויות ישרות, אזי אם נמשיך את שני הישרים באופן אינסופי הם יפגשו בצד שבו שתי הזוויות פחות משתי זוויות ישרות.

חמשת הרעיונות המקובלים (common notions) הם:

1. שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם (אם $a=b$ ו-$c=b$ אז $a=c$).
2. אם מחברים גדלים שווים לגדלים שווים, הסכומים שווים (אם $a=b$ ו-$c=d$ אז $a+c=b+d$).
3. אם מפחיתים גדלים שווים מגדלים שווים, ההפרשים שווים (אם $a=b$ ו-$c=d$ אז $a-c=b-d$).[9]
4. דברים שחופפים זה לזה, שווים זה לזה.
5. השלם גדול מחלקו.

הערה[10] קיימות מספר הבחנות בין המונחים "postulate" ו "axiom" (המזוהה עם "common notion" אצל אוקלידס). Proclus מביא שלוש הבחנות ביניהם:

א. ההבדל בין "postulate" ל "axiom" הוא כמו ההבדל שבין בעיה (היכולה לדרוש בנייה מסוימת) למשפט.

---

[3] לאקסיומות אלו, אותם הוא ציין באופן מפורש, מצטרפות מספר אקסיומות נוספות אשר מבדיקה מדוקדקת של ההוכחות שלו, נראה כי הסתמך עליהן, אף שלא ציינן, ואולי לא היה מודע לדיוקים אלו.

[4] אני מביאה כאן את האקסיומות וההגדרות של אוקלידס כמעט כלשונן, ללא "תרגומן" ללשון בת זמננו.

[5] מהמשך עבודתו ברור כי הוא מניח שהקו הישר הנ"ל הוא יחיד.

[6] באופן מדויק יותר נאמר כי ניתן להאריך כל קטע סופי מכל קצה שלו לקו ישר באופן רציף, בכל אורך מבוקש.

[7] מהמשך עבודתו ברור כי הוא מניח שהתיאור הנ"ל הוא יחיד.

[8] זווית ישרה מוגדרת כזווית המתקבלת כאשר קו ישר שניצב על קו ישר אחר, יוצר שתי זוויות סמוכות שוות.(כל אחת מהזוויות הסמוכות נקראת <u>זווית ישרה)</u>.

[9] באופן כללי ניתן לומר: משוואות ואי-שוויונים הכוללים גדלים גיאומטריים מאותו סוג (ישרים, זוויות, וכו') נשמעים לאותם חוקים כמו משוואות ואי-שוויונים הכוללים מספרים חיוביים (ע"פ תורת המספרים). במשפט זה כללתי את מקרים 1,2,3,5 וכן מקרים נוספים שאוקלידס לא כותב, אך הוא מסתמך עליהם בהמשך, כגון: אם $a=b$ ו $c<d$ אז $a+c<b+d$, ועוד...

[10] ע"פ [5, עמ' 18-21].

ב. "postulate" הוא משפט הקשור רק לתחום הגיאומטריה, ואילו "axiom" קשור גם לתחום הגיאומטריה וגם לאריתמטיקה.

ג. "axiom" הוא משפט אשר ברור כי הוא נכון בפני עצמו, ואילו "postulate" איננו אקסיומה במובן הנ"ל, אך אנחנו מקבלים אותו ללא הוכחה.

בהקשר לדיון זה, או גם ללא קשר אליו, ניתן לראות כי יש כתבי יד של 'היסודות' , המסתמכים על הגרסה הערבית או היוונית, אשר משייכים את אקסיומת המקבילים ל postulates ומביאים אותה במקום שצוין לעיל. יש כתבי יד המסתמכים כנראה על גרסאות אחרות, המשייכים אותה ל common notions . בכתבי יד אלו היא מופיעה כאקסיומה מספר 11.

כבר במבט ראשון רואים כי אקסיומת המקבילים ארוכה יותר ומסורבלת יותר מארבע האקסיומות הקודמות לה. לאמיתו של דבר היא נראית הרבה יותר כמשפט הניתן להוכחה על סמך ארבע האקסיומות הקודמות והמשפטים הנגזרים מהם, ולא כאקסיומה. נראה כי גם אוקלידס הרגיש בבעיה זו, והוא דוחה את השימוש באקסיומה זו ככל יכולתו. באופן כזה הוא מוכיח את 28 המשפטים הראשונים שלו בעזרת ארבע האקסיומות הראשונות בלבד, ללא שימוש באקסיומת המקבילים, גם כאשר ניתן להוכיח את המשפט בקלות רבה יותר בעזרת אקסיומת המקבילים.[11] הוא משתמש באקסיומת המקבילים בפעם הראשונה על-מנת להוכיח את המשפט כי קו ישר החותך שני ישרים מקבילים יוצר זוויות מתחלפות שוות, זוויות מתאימות שוות, וזוויות חד-צדדיות אשר סכומן הוא π (שתי זוויות ישרות).[12] לאחר משפט זה כל המשפטים, למעט משפט 31, מסתמכים על אקסיומת המקבילים.

1.2 ההתפתחות ההיסטורית לאחר אוקלידס

במשך מאות שנים ניסו מתמטיקאים רבים מאד להוכיח כי אקסיומת המקבילים הינה משפט הניתן להוכחה בעזרת ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס ו 28 המשפטים הראשונים הנובעים מהם. קשה מאד היה לקבל כי האקסיומה החמישית הינה משפט "ברור", אשר ניתן לקבל אותו ללא הוכחה. ואולם,

[11] לרשימת המשפטים הניתנים להוכחה ללא אקסיומת המקבילים ראה נספח מספר 1.
[12] את המשפט ההפוך למשפט זה הוא מוכיח עוד קודם לכן, ללא שימוש באקסיומת המקבילים.

ניסיונותיהם לא העלו פרי, וכל מה שהצליחו לקבל היה רשימה ארוכה של משפטים השקולים לאקסיומת המקבילים[13]. כלומר, נגדיר את הגיאומטריה הנייטרלית הכוללת את:

- מונחי היסוד של אוקלידס.
- מונחים המוגדרים בהסתמך על מונחי היסוד.
- הרעיונות המקובלים (common notions).
- כל האקסיומות של אוקלידס מלבד אקסיומת המקבילים.
- כל המשפטים של אוקלידס אשר הוכחתם איננה דורשת את אקסיומת המקבילים.

בגיאומטריה זו, בעזרת כל אחד מהמשפטים ברשימה הנ"ל, ניתן להוכיח את אקסיומת המקבילים, ולהפך: מהגיאומטריה הנייטרלית עם אקסיומת המקבילים (שזוהי הגיאומטריה האוקלידית) ניתן להוכיח כל אחד מהמשפטים ברשימה. רוב הניסיונות להוכחה הגיעו לנקודה שבה ברור היה לכותב באופן אינטואיטיבי כי כך "חייב" להיות המצב ע"פ ה"אופי" של הקו הישר, וכן ע"פ חישובים ומדידות המוכיחים כי זהו אמנם המצב בגיאומטריה הקיימת בעולם (מדידת סכום זוויות במשולש, סכום הזוויות החד-צדדיות בין מקבילים, וכד'). הראשונים שייסדו גיאומטריה שונה, לא-אוקלידית, המבוססת על מערכת של אקסיומות ללא אקסיומת המקבילים, והוכיחו באופן מלא את כל המשפטים הנובעים באופן דדוקטיבי ממערכת זו, וגם פרסמו את ממצאי עבודתם,היו ג'והן בוליי וניקולאי לובצ'בסקי אשר פעלו ללא קשר ביניהם, בראשית המאה ה-19. בהמשך פרק זה אסקור בקצרה את הניסיונות להוכחת אקסיומת המקבילים, וכן את עבודותיהם של מייסדי הגיאומטריה הלא-אוקלידית אשר קדמו לבוליי וללובצ'בסקי.

1.2.1 הניסיונות להוכחת אקסיומת המקבילים

מידע רב אודות החקירות והניסיונות להוכחת אקסיומת המקבילים מביא לנו Proclus (410-485) בספרו Commentary on the first book of Euclid.

1.2.1.1 פוסידוניוס [14]

[13] לרשימת המשפטים השקולים לאקסיומת המקבילים ראה נספח מספר 2.

האדם הראשון שידוע לנו כי ניסה להוכיח את אקסיומת המקבילים הוא פוסידוניוס (135-51 לפנה"ס), פילוסוף, מדען והיסטוריון.[15] הוא הציע לשנות את ההגדרה של ישרים מקבילים על מנת להוכיח את האקסיומה החמישית של אוקלידס.

בהגדרה מספר 23 מגדיר אוקלידס מהם ישרים מקבילים:

הגדרה 1.1 ישרים מקבילים – שני ישרים הנמצאים באותו מישור, כך שכאשר ממשיכים אותם עד אינסוף לשני הכיוונים[16], אינם "פוגשים" אחד את השני באף כיוון.

פוסידוניוס מגדיר ישרים מקבילים באופן הבא:

הגדרה 1.2 ישרים מקבילים – שני ישרים הנמצאים באותו מישור, כך שכאשר ממשיכים אותם עד אינסוף לשני הכיוונים, שומרים על מרחק קבוע ביניהם.

על מנת להוכיח כי שתי ההגדרות שקולות יש להוכיח כי:

- שני ישרים הנמצאים במרחק קבוע זה מזה, לא יפגשו לעולם.
- שני ישרים אשר לא נפגשים לעולם, יישארו תמיד במרחק קבוע זה מזה.

טענה א' היא אמנם פשוטה מאד, אך טענה ב' איננה ניתנת להוכחה, ולכן אם משאירים את הגדרה 1.1, כפי שהניח אותה אוקלידס, האפשרות היחידה היא להחליף את האקסיומה החמישית של אוקלידס באקסיומת פוסידוניוס: "ישרים מקבילים שומרים על מרחק שווה ביניהם".

אם ניקח את הגיאומטריה הנייטרלית, שהוגדרה לעיל, ונוסיף לה את אקסיומת פוסידוניוס אזי ניתן להוכיח את המשפט הבא:

משפט 1.1 דרך נקודה נתונה שאיננה על ישר נתון, ולא על המשכו, ניתן לשרטט מקביל אחד בלבד לישר הנתון.

בהסתמך על משפט זה ניתן להוכיח את האקסיומה החמישית של אוקלידס.

כמו-כן, בגיאומטריה הנייטרלית בצירוף אקסיומת המקבילים, ניתן להוכיח את האקסיומה של פוסידוניוס (זוהי תוצאה של משפט 34 של אוקלידס). לכן ניתן לומר כי בגיאומטריה הנייטרלית האקסיומה של פוסידוניוס והאקסיומה החמישית של אוקלידס שקולות מבחינה לוגית.

---

[14] ע"פ [11, עמ' 119-122].

[15] עבודותיו של פוסידוניוס לא שרדו, ואנו יודעים על עבודתו רק דרכו של Proclus .

[16] אוקלידס נאלץ להוסיף את עניין הארכת הישרים, היות וישר ע"פ הגדרתו הוא סופי, כלומר, ישר אצל אוקלידס הוא בעצם קטע.

1.2.1.2 הניסיונות להוכחה על ידי מתמטיקאים יוונים לאחר פוסידוניוס [17]

Proclus מביא את עבודתו של **Geminus** (המאה הראשונה לפנ"הס) אשר חקר את ההתנהגות של ההיפרבולה ביחס לאסימפטוטות , ע"מ להוכיח כי יתכן שישרים יהיו מקבילים ע"פ הגדרה 1.1 אך לא ע"פ הגדרה 1.2. הוא מביא זאת כדוגמא לפרדוקס בגיאומטריה.

Ptolemy (המאה השניה לספירה) מביא הוכחה כי סכום הזוויות החד-צדדיות בין מקבילים איננו יכול להיות גדול משתי זוויות ישרות (כיוון שאז סכום הזוויות החד-צדדיות ואלו שצמודות להן, יהיה יותר מארבע זוויות ישרות), ובאותו אופן הוא איננו יכול להיות קטן משתי זוויות ישרות, ומכאן הוא מגיע למשפט חדש:

משפט 1.2 סכום הזוויות החד-צדדיות שיוצרים שני ישרים מקבילים עם ישר שלישי שחותך אותם שווה לשתי זוויות ישרות.

מכאן ניתן להוכיח בקלות את אקסיומת המקבילים.

Proclus בעצמו מניח כי המרחק בין מקבילים חייב להיות סופי, ומכאן הוא מוכיח את המשפט:

משפט 1.3 ישר שחותך ישר אחד מזוג ישרים מקבילים חייב לחתוך גם את המקביל השני.

מכאן ניתן להוכיח את אקסיומת המקבילים.

ניסיון נוסף של היוונים להוכחה הוא הגעה שלהם לפרדוקס כי שני ישרים אשר נחתכים ע"י ישר שלישי <u>לא</u> יפגשו גם כאשר סכום הזוויות החד-צדדיות <u>קטן</u> משתי זוויות ישרות[18].

Simplicius (המאה השישית לספירה) מביא בספרו Introduction to the first book of Euclid רעיונות דומים לאלו של Geminus ושל פוסידוניוס, ומוסיף הוכחה של חברו Aganis[19]. הוכחה זו מסתמכת על המשפט:

משפט 1.4 קיים לפחות זוג אחד של ישרים הנמצאים במרחק קבוע זה מזה.

לישרים אלו הוא קורא מקבילים, כמו פוסידוניוס. מכאן הוא מוכיח כי המרחק הקצר ביותר בין שני מקבילים הוא האנך המשותף להם. שני ישרים המאונכים לישר שלישי מקבילים ביניהם, ועוד..

---

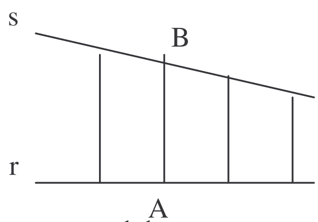
[17] ע"פ [4, עמ' 1-9].
[18] הטעות שלהם הייתה קשורה לשימוש לא נכון במושג האינסוף.
[19] הוכחה זו דומה להוכחה של המתמטיקאי הערבי Al-Nirizi.

1.2.1.3 הניסיונות להוכחה על ידי מתמטיקאים ערבים [20]

ניסיון אחד ידוע של מתמטיקאי ערבי היא עבודתו של **Al-Nirizi** (המאה התשיעית לספירה) הדומה, כפי שציינתי לעיל, לעבודתו של Aganis.

מתמטיקאי נוסף שחקר את הנושא הוא **Nasîr-Eddîn** (1274-1201). ההנחה העיקרית שלו אומרת:

משפט 1.5 אם ישר אחד (r) מאונך לקטע AB וישר אחר (s) יוצר עמו זווית חדה, אזי האנכים מ s ל r קטנים מ AB בצד שבו s יוצר זווית חדה עם AB , וגדולים מ AB בצד שבו הוא יוצר עמו זווית קהה.



שרטוט 1.1

בעזרת משפט 1.5 ניתן להוכיח את העובדה כי שני ישרים אשר אחד מהם מאונך לישר שלישי, והשני אלכסוני לו, חייבים להיפגש. כלומר, זוהי הוכחה של אקסיומת המקבילים למקרה שאחת מהזוויות ישרה.

Nasîr-Eddîn מוכיח גם כי סכום הזוויות של משולש שווה לשתי זוויות ישרות. בעזרת משפט זה ניתן להרחיב את הוכחת אקסיומת המקבילים לכל משולש.

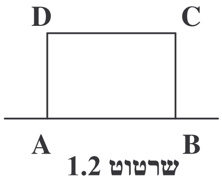
1.2.1.4 הניסיונות להוכחה במהלך תקופת הרנסנס והמאה ה-17 [21]

התפתחויות נוספות בתחום אקסיומת המקבילים התרחשו רק לאחר 1550 תחת ההשפעה של הדפסת Commentary of Proclus בשנת 1533 כלשונו, ובשנת 1560 בתרגום ללטינית.

מתמטיקאים שונים כמו **Commandino** (1575-1509), **Clavio** (1612-1537), **Cataldi** (1626-?), **Borelli** (1679-1608) ועוד.. התייחסו לנושא, תוך שהם מביאים בדרך כלל רעיונות הדומים לאלו שהביא Proclus , וכן מוסיפים לחקור את נושא המקבילים בעיקר בכיוון של חקירת התכונה של "מרחק שווה בין מקבילים" ו"המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מישר נתון".

---

[20] ע"פ [4, עמ' 12-9].
[21] ע"פ [4, עמ' 17-12].



שרטוט 1.2

Vitale (1711-1633) פעל גם הוא בכיוון זה, אך החידוש בעבודתו הוא שלצורך הוכחת מה שהוא מעוניין בו, הוא נעזר בחקירת מרובע אשר שתיים מצלעותיו(AD,BC) שוות זו לזו, ומאונכות לצלע שלישית(AB), שנקראת <u>בסיס המרובע</u>. הצלע שממול לבסיס (CD) נקראת <u>פסגה</u>, והזוויות הסמוכות לפסגה (C ו D) נקראות <u>זוויות פסגה</u>[22]. Vitale מוכיח את המשפטים:

משפט 1.6 זוויות הפסגה של המרובע, אשר תואר לעיל, שוות זו לזו.

משפט 1.7 אם קיימת נקודה H על הפסגה, כך ש HK מאונך לבסיס, שעבורה HK שווה באורכו ל AD , אזי זוויות הפסגה הן זוויות ישרות, והפסגה נמצאת במרחק שווה מהבסיס.

רעיון זה פותח עוד הרבה בהמשך, וחקירת מרובע זה היא מהתוצאות החשובות של חקירת תיאוריית המקבילים לאותה תקופה.

Wallis (1703-1616) זנח את הכיוון של תכונת המרחק השווה בין ישרים. הוא סיפק הוכחה חדשה לאקסיומת המקבילים המסתמכת על המשפט:

משפט 1.8 בהינתן קטע סופי, ניתן לבנות משולש הדומה למשולש נתון.

Wallis מעיר כי אוקלידס באקסיומה השלישית שלו, המדברת על קיומו של מעגל, מניח מבלי לציין זאת כי קיימים מעגלים שהם דומים. משפט 1.8 מניח לגבי מצולעים דברים הדומים למה שמניח אוקלידס באקסיומה השלישית לגבי המעגל.

[22] מרובע זה נקרא בהמשך "מרובע סקרי".

1.2.2 מבשרי הגיאומטריה הלא-אוקלידית

Gerolamo Saccheri 1.2.2.1[23]

Saccheri (1733-1667) עסק רבות מאד בניסיונות להוכחת אקסיומת המקבילים. בעבודתו הסתמך Saccheri על 26 המשפטים הראשונים של אוקלידס, על שלילתה של אקסיומת המקבילים, וכן על אקסיומת ארכימדס, אקסיומת הרציפות של הקו הישר[24], וההנחה כי הקו הישר הוא אינסופי[25]. הצורה הבסיסית שאותה חקר Saccheri היא המרובע, אשר אותו התחיל לחקור המתמטיקאי Vitale, הנקרא על שמו "מרובע סקרי".

משפט 1.9 אם במרובע $ABCD$ זוויות A ו B ישרות, וכן AD שווה ל BC / גדול מ BC / קטן מ BC , אזי זוויות C ו D שוות / $\angle C>\angle D$ / $\angle C<\angle D$ בהתאמה.

על פי זה במרובע סקרי (שבו, כאמור, $AD=BC$) זוויות הפסגה שוות. השאלה המהותית היא: האם זוויות הפסגה הן זוויות חדות/ ישרות/ קהות? Saccheri חוקר את שלוש ההשערות הנ"ל כאשר הוא מעוניין להוכיח כי ההשערה של הזווית הישרה היא הנכונה, וזאת על-ידי הוכחה כי שתי ההשערות האחרות מובילות לסתירה. אביא כאן בקיצור את עבודתו של Saccheri:

משפט 1.10 אם נניח את ההשערה של זווית ישרה/ זווית קהה/ זווית חדה אזי הבסיס שווה לפסגה/ גדול מהפסגה/ קטן מהפסגה, בהתאמה.

Saccheri מוכיח כי אם אחת מההשערות נכונה במקרה אחד, אזי היא נכונה בכל מקרה. משפט נוסף שהוא מוכיח קושר בין ההשערות השונות לסכום הזוויות במשולש:

משפט 1.11 ע"פ ההשערה של זווית ישרה/ קהה/ חדה, סכום הזוויות במשולש שווה ל / גדול מ / קטן מ שתי זוויות ישרות, בהתאמה.

---

[23] ע"פ [9,עמ' 19-173] וכן בעזרת [5, עמ' 5-6], [4, עמ' 22-44].

[24] אקסיומת הרציפות אומרת כי כאשר מאריכים קטע ברציפות מאורך a לאורך b, אורך הקטע מקבל כל ערך מספרי בין a ל-b.

[25] עובדה שעליה הסתמך אוקלידס, בהוכיחו את משפט 16, עבור זווית חיצונית למשולש.

תוצאה פשוטה ממשפט זה, אשר אותה Saccheri לא ביטא מפורשות, ורק מאוחר יותר פרסמה Legendre , היא כי אם המצב של סכום הזוויות במשולש הוא כאחת מהאפשרויות הנ"ל במשולש אחד, אז זהו המצב בכל המשולשים. לפי כל המשפטים הנ"ל[26] מגיע Saccheri למשפט הבא:

משפט 1.12 ע"פ השערת הזווית הישרה, וכן השערת הזווית הקהה, שני ישרים, אשר נחתכים על ידי ישר היוצר זווית ישרה עם האחד וזווית חדה עם השני, יחתכו זה את זה.

מסקנה: אקסיומת המקבילים נכונה הן במקרה של השערת הזווית הישרה, והן בהשערת הזווית הקהה. מכאן מוכיח Saccheri כי הנחת הזווית הקהה מובילה לסתירה, היות והיא מובילה לאקסיומת המקבילים, וכתוצאה מכך גם לכל המשפטים הנובעים ממנה, ולכן סכום הזוויות של מרובע שווה לארבע זוויות ישרות, ומכאן שהשערת הזווית הישרה היא הנכונה. בכך הוכחנו כי השערת הזווית הקהה לא תיתכן.

כעת נערך Saccheri לפסול את השערת הזווית החדה. ע"פ השערת הזווית החדה יתכן כי שני ישרים, אשר נחתכים על ידי ישר היוצר זווית ישרה עם האחד וזווית חדה עם השני,לא יפגשו. מחקירת משפט זה מגיע Saccheri למשפט הבא:

משפט 1.13 בהשערת הזווית החדה, בין הישרים העוברים דרך נקודה A, אשר איננה על ישר b, קיימים שני ישרים p,q אשר מחלקים את כל הישרים העוברים דרך A לשתי קבוצות: ישרים שחותכים את b, וישרים אשר יש להם אנך משותף עם b. p,q אסימפטוטיים ל b (במובן של: המרחק מנקודה על p ל b, כאשר הנקודה שואפת על p לאינסוף, שואף לאפס,והופך לקטן מכל קטע נתון, קטן כרצוננו, וכנ"ל לגבי q).

מכאן נובע כי אם ההשערה של הזווית החדה היא נכונה, אזי לישרים p ו b קיים אנך משותף בנקודת החיתוך שלהם באינסוף. בנקודה זו מגיע Saccheri לכלל מסקנה, בהסתמך על הרגשה שלו, כי תוצאה זו "מנוגדת לטבע של הקו הישר", ולכן השערת הזווית החדה לא תיתכן, ואקסיומת המקבילים חייבת להיות נכונה, ומכאן ואילך הוא מפסיק את חקירתו בכיוון זה[27].

[26] Saccheri מוכיח את כל המשפטים הנ"ל בעזרת אקסיומת ארכימדס ואקסיומת הרציפות, אך, כפי שהוכיח Dehn , ניתן להוכיח את אותם משפטים גם ללא אקסיומות אלו.

[27] יש לציין כי Saccheri לא היה מרוצה מהתוצאה שהגיע אליה, והוא מנסה בהמשך להוכיח שוב את אקסיומת המקבילים ע"פ התכונה של מרחק שווה בין ישרים, כמו שעשו אחרים לפניו.

למרות ש Saccheri לא הגיע לתוצאה אשר קיווה לה, הרי שעבודתו קידמה הרבה מאד את כל הנושא של חקירת אקסיומת המקבילים, ומשפטים רבים אשר קיבל מהשערת הזווית החדה היוו מאוחר יותר את הבסיס לגיאומטריה הלא-אוקלידית.

Johan Heinrich Lambert .1.2.2.2[28]

עבודתו של Lambert (1728-1777) בנושא אקסיומת המקבילים מתחלקת לשלושה חלקים. בחלק הראשון הוא דן באופן פילוסופי בשאלה האם ניתן להוכיח את אקסיומת המקבילים על סמך המשפטים והאקסיומות הקודמים לה, או שיש צורך בהנחות נוספות. בחלק השני הוא דן בניסיונות השונים אשר נעשו להוכחת אקסיומת המקבילים, על ידי מעבר למשפטים אחרים השקולים לאקסיומת המקבילים, אשר דורשים הוכחה משלהם. בחלק השלישי הוא חוקר מרובע בעל שלוש זוויות ישרות ודן, בדומה ל Saccheri, בשלוש אפשרויות עבור הזווית הרביעית: זווית ישרה/ קהה/ חדה. גם הוא מגיע למסקנה כי השערת הזווית הישרה מובילה לגיאומטריה האוקלידית, ואילו השערת הזווית הקהה מובילה לסתירה[29]. לעומת זאת, בהשערת הזווית החדה הוא מתקדם קצת יותר מ Saccheri . גם הוא מגיע לכלל מסקנה כי בהשערה זו, סכום הזוויות של משולש הוא פחות משתי זוויות ישרות.

Lambert חוקר את <u>המגרעת של פוליגון</u>- ההפרש בין סכום הזוויות של הפוליגון, וסכום הזוויות של פוליגון עם אותו מספר צלעות (n) במישור האוקלידי[30]. הוא מוכיח כי המגרעת היא אדיטיבית עבור פוליגונים הנמצאים זה לצד זה, ומכאן הוא מגיע למסקנה כי המגרעת של פוליגון פרופורציונאלית לשטחו[31]. כאשר השווה עובדה זו לעובדה הידועה בעניין העודף הזוויתי של פוליגון ספירי, הוא הציע כי ההשערה של זווית חדה תהיה נכונה במקרה של ספירה עם רדיוס דמיוני[32]. כמו כן הוא מגיע למסקנה כי הגיאומטריה הספרית איננה תלויה באקסיומת המקבילים.

---

[28] ע"פ [5, עמ' 6-7], [4, עמ' 44-51].

[29] זאת בעזרת האקסיומה של ארכימדס.

[30] שהוא $2(n-2)\cdot\pi/2$.

[31] גם Saccheri חקר את המגרעת של פולינום בהשערת הזווית החדה, אך הוא לא הגיע למסקנה בנוגע לקשר שבין מגרעת של פוליגון לשטחו.

[32] זאת, כנראה , על-פי הנוסחה עבור שטח משולש ספירי : $(A+B+C-\pi)\cdot r^2$.

בגיאומטריה האוקלידית אורך נמדד ביחידות שרירותיות, אשר יכולות להשתנות כרצוננו בבניות שונות. במדידת זוויות, לעומת זאת, ניתן להשתמש ביחידה טבעית, בעלת תכונות גיאומטריות, כמו הזווית הישרה או הרדיאן. במובן זה אנו אומרים כי האורך בגיאומטריה האוקלידית הוא יחסי, בעוד שהזוויות הן מוחלטות. Lambert גילה את המשפט:

משפט 1.14 בהשערת הזווית החדה, זוויות נשארות מוחלטות, אך גם האורכים הם מוחלטים.

לכל קטע מתאימה זווית. לדוגמא: הזווית של משולש שווה צלעות שנבנה על אותו קטע. היחידה המוחלטת של האורך היא אורך הקטע אשר לו מתאים הערך 1. תכונה זו מאפשרת לנו לבנות, בהשערת הזווית החדה, משולש שווה שוקיים עם מגרעת נתונה. מכאן כי המדידה המוחלטת של שטח של צורות, נקבעת באופן ישיר על-פי המגרעת שלהם.

1.2.2.3. מתמטיקאים שונים בסוף המאה ה-18[33]

D`Alembert (1783-1717) מעיר כי ההוכחה של אקסיומת המקבילים תלויה בהגדרה טובה של הקו הישר. הוא מציע להגדיר ישרים מקבילים באופן הבא:

הגדרה 1.3 ישר המקביל לישר נתון הוא ישר המחבר שתי נקודות הנמצאות באותו צד של הישר הנתון ובמרחק שווה ממנו.

הגדרה זו מאפשרת לבנות ישרים מקבילים באופן מיידי. נותר עוד להוכיח כי ישרים מקבילים, ע"פ הגדרה זו, שומרים על מרחק שווה ביניהם.

Fourier (1830-1768) מגדיר את הקו הישר באופן הבא:

הגדרה 1.4 קו ישר הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה משלוש נקודות נתונות.

Largrange (1813-1736) חוקר את הטריגונומטריה הספרית, ומוכיח את המשפט:

משפט 1.15 הטריגונומטריה הספרית איננה תלויה באקסיומת המקבילים, או באקסיומה אחרת השקולה לה.

[33] ע"פ [4, עמ' 51-55, עמ' 63].

Thibaut (1775-1832) מביא הוכחה נוספת למשפט כי סכום הזוויות במשולש הוא שתי זוויות ישרות. בהוכחה זו הוא מסתמך על הרעיון של כיוון של ישר, ומניח את המשפט:

משפט 1.16 במישור, הזזה וסיבוב של ישר הן שתי פעולות אשר אינן תלויות זו בזו.

בעזרת עובדה זו הוא מוכיח כי סכום הזוויות החיצוניות של משולש הוא 2π, ומכאן כי סכום הזוויות הפנימיות של המשולש הוא π.

Carnot (1753-1823) ו **Laplace** (1749-1827) מעירים, בדומה ל **Wallis**, כי תיאוריית המקבילים קשורה באופן הדוק לעקרון של דמיון גופים, ואם נקבל את הרעיון של הדמיון, קל להוכיח את התיאוריה.

Adrien Marie Legendre .1.2.2.4 [34]

Legendre (1752-1833) נערך להפוך את אקסיומת המקבילים למשפט. כמו Saccheri, הוא בוחן את השאלה מהכיוון של סכום הזוויות במשולש, כאשר הוא מעוניין להוכיח כי סכום הזוויות במשולש שווה לשתי זוויות ישרות. הוא מוכיח, באופן שונה מ Saccheri, את "המשפט הראשון של לז'נדר":

משפט 1.17 סכום הזוויות בכל משולש קטן או שווה לשתי זוויות ישרות[35].

בעזרת משפט זה הוא דוחה את השערת הזווית הקהה.

"המשפט השני של לז'נדר", אשר הוכח גם הוא עוד קודם לכן, על-ידי Saccheri, אומר כי:

משפט 1.18 אם סכום הזוויות של משולש הוא קטן/ שווה לשתי זוויות ישרות במשולש אחד, אז זהו המצב בכל המשולשים.

בעזרת הנ"ל מוכיח Legendre את המשפט:

משפט 1.19 סכום הזוויות של כל משולש שווה לשתי זוויות ישרות.

זאת מכיוון שאם נניח כי סכום הזוויות במשולש קטן משתי זוויות ישרות, נגיע למסקנה כי צלע משולש נקבעת כפונקציה של זוויותיו. אך תוצאה זו נראתה לו לא הגיונית, היות ואין משמעות לאורך של ישר, אם לא קבענו את יחידת האורך שלו, דבר שלא נזכר בשאלה אותה הוא חקר. בשיטה זו מבסס

---

[34] ע"פ [4, עמ' 55-60].

[35] משפט זה נקרא בטעות "המשפט הראשון של לז'נדר", למרות ש Saccheri הוכיח אותו כ 100 שנה לפניו.

Legendre את טענתו של Lambert כי בגיאומטריה האוקלידית לא קיימת יחידה מוחלטת של אורך, אך בגיאומטריה הלא-אוקלידית יחידת האורך נקבעת באופן מוחלט.

בהוכחה נוספת של משפט 1.19 נעזר Legendre במשפט:

משפט 1.20 דרך כל נקודה פנימית לזווית נתונה, ניתן להעביר ישר אשר יחתוך את שתי שוקי הזווית[36].

במשפטים אלו האמין Legendre כי הסיר את הבעיות הקשות העומדות ביסודות הגיאומטריה. למרות שלא הוסיף הרבה חומר חדש על המשפטים והתוצאות שקדמו לו, חשיבותו הרבה בדרך הכתיבה הפשוטה והאלגנטית, אשר עזרו להפיץ את הרעיונות החדשים בקרב קוראים רבים.

1.2.2.5 Wolfgang Bolyai[37]

התעניינותו של Wolfgang Bolyai (1775-1856) בכל הנושא של אקסיומת המקבילים התעוררה עוד במהלך לימודיו ב Göttingen , כנראה הודות לקשריו עם Kästner, Seyffer ו Gauss . ב 1804 שלח ל Gauss ניסיון להוכחה של קיום ישרים במרחק שווה זה מזה. Gauss מצא את הטעות בהוכחה, ו Bolyai המשיך לנסות להוכיח את האקסיומה בדרכים אחרות. במהלך עבודתו הוא החל לתהות האם קיימת דרך להוכיח את האקסיומה, והאם ניתן לפתח גיאומטריה ללא אקסיומת המקבילים. הוא העיר כי התוצאות הנובעות משלילת אקסיומת המקבילים לא יכולות לסתור את עקרונות הגיאומטריה, היות וחיתוך ישרים, בצורתו הרגילה, דורש נתון חדש, אשר איננו תלוי בנתונים הקודמים. הוא מציין אקסיומה נוספת השקולה לאקסיומת המקבילים:

משפט 1.21 דרך כל ארבע נקודות, אשר אינן על אותו מישור, ניתן להעביר ספירה.

או באופן אחר:

משפט 1.22 דרך שלוש נקודות, אשר אינן על ישר אחד, ניתן להעביר מעגל .

---

[36] בהוכחה זו הוא נעזר באקסיומת ארכימדס, אך ניתן להוכיח את המשפט גם בדרך אחרת, ללא אקסיומה זו.
[37] ע"פ [4, עמ' 60-62].

1.2.2.6 Friedrich Ludwig Wachter[38]

Wachter (1792-1817) פנה להוכיח את אקסיומת המקבילים בעזרת האקסיומה האחרונה של Bolyai. בעבודתו הוא מנסה להוכיח את משפט 1.21. הוא משתמש במשפט כי כל ארבע נקודות במרחב מגדירות משטח, ושני משטחים כאלו יחתכו בקו יחיד, המוגדר ע"י שלוש נקודות. בהמשך הוא מנסה להוכיח כי המשטח המוגדר ע"י ארבע נקודות הוא ספירה, אך הוא מביא תוצאה זו בדרך אינטואיטיבית בלבד. במכתב למורה שלו – Gauss , משנת 1816, הוא דן על הצורה הגבולית המתקבלת מספירה אשר הרדיוס שלה שואף לאינסוף, המזוהה בגיאומטריה האוקלידית עם המישור. מסקנתו היא:

משפט 1.23 גם במקרה של שלילת אקסיומת המקבילים, הגיאומטריה על משטח זה זהה לגיאומטריה האוקלידית של המישור, ומתקיימות בה כל התכונות של אוקלידס, כולל אקסיומת המקבילים[39].

מסקנה זו היא מהתוצאות החשובות ביותר בהשערת הזווית החדה של Saccheri .

1.2.3 מייסדי הגיאומטריה הלא-אוקלידית[40]

אלפיים שנה של ניסיונות ללא תוצאות הובילו את המתמטיקאים בתחילת המאה ה-19 למסקנה כי תיאוריית המקבילים טומנת בתוכה בעיה שאיננה ניתנת לפתרון. Klügel מאוניברסיטת Göttingen פרסם, בהנחיית מורו Kästner, סקירה של 28 ניסיונות שונים להוכחת האקסיומה, אשר לא הובילו לתוצאות, והציע כי יש לקבל את ההנחות האוקלידיות ע"י בחינה של ההגיון בלבד. גישה זו התאימה לשיטתו הפילוסופית של קאנט אשר התפרסמה באותו זמן, והתקבלה ע"י רוב המתמטיקאים באותה תקופה. רק מעטים המשיכו לחקור את הנושא בניסיון למצוא הוכחה לאקסיומה.

1.2.3.1 Karl Friedrich Gauss[41]

הראשון שחקר את הנושא מנקודת מבט מודרנית, אשר גורסת כי ניתן לפתח גיאומטריה ללא אקסיומת המקבילים, לצורך עניין פנימי משלה ומבלי לצפות לסתירה, היה Gauss (1777-1855), אך היות ופחד

---

[38] ע"פ [4, עמ' 62-63] וכן [5, עמ' 7].
[39] בלשון של ימינו נאמר כי " הגיאומטריה הפנימית של ההורוספירה היא אוקלידית".

[40] ע"פ [11, עמ' 154-157].
[41] ע"פ [5, עמ' 7], [4, עמ' 75- 64].

כי רעיונות מהפכניים שכאלו לא יתקבלו, הוא שמר את רעיונותיו לעצמו עד שנוכח כי רעיונות דומים התפרסמו על ידי אנשים אחרים, ללא קשר עמו. מה שידוע לנו כיום על עבודתו הוא בעיקר על סמך מכתבים ששלח באותה תקופה למתמטיקאים אחרים, וכן מספר רשימות שנמצאו מאוחר יותר בין כתביו[42]. בין השנים 1792-1813 ניסה Gauss עדיין להוכיח את האקסיומה, לדוגמא, ע"י מציאת משפט נוסף השקול לאקסיומת המקבילים:

משפט 1.24 ניתן לבנות משולש אשר שטחו גדול מכל שטח נתון.

אך הוא הרגיש כי מציאת משפטים נוספים השקולים לאקסיומה, לא תוביל לפתרון הבעיה.

החל ב 1813 רואים ממכתביו כי עבר לפתח גיאומטריה חדשה, אשר אותה הוא מכנה בתחילה "גיאומטריה אנטי-אוקלידית" ואחר כך "גיאומטריה כוכבית (astral geometry)" או "גיאומטריה לא-אוקלידית". בנקודה זו הוא שוכנע כי למרות שבתחילה נראה כי חלק מהתוצאות מובילות לפרדוקס, הגיאומטריה הלא-אוקלידית איננה מכילה בתוכה שום סתירה. למרות זאת, כאמור, הוא לא פרסם את מסקנותיו, היות וחשב כי לא יובנו כראוי. את רעיונותיו גילה רק למספר חברים קרובים שבהם בטח, וביקש מהם שלא יעבירו דברים אלו הלאה. אביא כאן בקצרה את המשפטים העיקריים שאליהם הגיע[43]:

Gauss מגדיר ישרים מקבילים באופן הבא:

הגדרה 1.5 אם הישרים AM ו BN אינם חותכים זה את זה, אך כל ישר אחר דרך A העובר בין AM ל BN כן חותך את BN, אזי נאמר כי AM <u>מקביל</u> ל BN.

ישר זה מבדיל בין הישרים החותכים את BN ואלו שאינם חותכים אותו.

תכונת ההקבלה איננה תלויה בנקודות A ו B והיא נכונה גם עבור כל נקודה אחרת A' על AM או B' על BN[44]. יחס ההקבלה, כפי שהוגדר לעיל, הוא יחס סימטרי וטרנזיטיבי[45]. בהגדרה זו יש משמעות לכיוון ההקבלה, והמקביל לישר נתון לכיוון ימין, איננו המקביל לכיוון שמאל.

הגדרה 1.6 נקודות A ו B יקראו <u>מתאימות</u> אם הישר AB יוצר זוויות פנימיות חד-צדדיות שוות עם המקבילים דרך A ו B באותו כיוון.

---

[42] נראה כי היה מודע לעבודותיהם של Saccheri ו Lambert, אם כי אין לנו הוכחה מוצקה לכך.
[43] רעיונות אלו מובאים בפירוט בניתוח עבודותיהם של בוליי ולובצ'בסקי, בפרקים 2 ו-3.
[44] בהוכחה זו מסתמך Gauss , באופן לא מודע, על אקסיומת פש.
[45] הוכחות משפטים אלו דומות באופן עקרוני להוכחות שמביאים בוליי ולובצ'בסקי.

בעזרת הגדרה זו מוכיח Gauss מספר משפטים, ובהמשך הוא מגיע לרעיון של קו המשמש כמקרה גבולי של מעגל אשר רדיוסו שואף לאינסוף. לרעיון זה משקל חשוב בגיאומטריה הלא-אוקלידית, כפי שנראה בהמשך.

דברים נוספים שאליהם הגיע Gauss הם היחידה המוחלטת של האורך, וכן קבוע מסוים k אשר יש בו שימוש לפתרון בעיות רבות בגיאומטריה הלא-אוקלידית. אם נרצה כי הגיאומטריה הלא-אוקלידית תתאים למדידות שלנו יש להניח כי k שואף לאינסוף. כמו-כן הוא מגיע לנוסחה של היקף מעגל בגיאומטריה זו, ומראה כי כאשר k שואף לאינסוף זוהי הנוסחה האוקלידית של היקף מעגל.

Fredinand Karl Schweikart .1.2.3.2[46]

באותה תקופה כמוGauss , אך ללא תלות בו, פיתח Schweikart (1780-1859) את מה שהוא כינה "גיאומטרית astral", ובשנת 1818 העביר את ממצאיו ל Gauss, על מנת לשמוע את חוות דעתו. בגיאומטריה זו סכום הזוויות במשולש הוא פחות משתי זוויות ישרות, והוא קטן ככל שהמשולש גדל. משפט נוסף טוען כי:

משפט 1.25 הגובה של משולש ישר-זווית שווה שוקיים גדל באופן רציף כאשר הצלעות גדלות, אך הוא לא יכול לגדול מעבר לאורך מסוים, שאותו הוא מכנה "קבוע".

הגיאומטריה האוקלידית תקפה רק אם נניח כי קבוע זה הוא אינסופי. במקרה זה סכום הזוויות של משולש הוא אמנם שתי זוויות ישרות. Gauss שיבח את Schweikart על ממצאיו, וציין כי אם הגודל הקבוע הוא $k\log(1+\sqrt{2})$, אזי שטח המשולש גדל עד לגבול πk^2. הוא מוסיף כי לו רק ידע מהו הקבוע של Schweikart, היה יכול לפתור את כל הבעיות בגיאומטריה החדשה.

Schweikart לא פרסם מעולם את ממצאיו.

[46]ע"פ [5, עמ' 7], [4, עמ' 77- 75].

Franz Adolf Taurinus .1.2.3.3[47]

Schweikart ניסה לשכנע אחיין שלו - Taurinus (1794-1874), לחקור גם הוא את הנושא, והסב את תשומת ליבו לתוצאות אליהם הגיע. באותו זמן היה Taurinus משוכנע בנכונותה האבסולוטית של אקסיומת המקבילים וחשב שגם יוכל להוכיח זאת. לאחר שנכשל בניסיונו, החל לחקור את הגיאומטריה הלא-אוקלידית, בעידודם של Gauss ושל דודו. Taurinus פיתח גיאומטריה "לוגריתמית-ספרית" אשר אותה קיבל מהטריגונומטריה הספרית, כאשר הוא מציב במקום רדיוס הספירה k את הערך הדמיוני ki.[48]

בדרך זו הוא קיבל את הנוסחאות היסודיות של הגיאומטריה הלוגריתמית-ספרית , עבור משולש ABC עם צלעות a,b,c בהתאמה.

משפט 1.26 $$\cosh\frac{a}{k}=\cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k}-\sinh\frac{b}{k}\sinh\frac{c}{k}\cos A$$

ממשפט זה מוכיח Taurinus כי בגיאומטריה אותה פיתח גודל הזווית במשולש שווה צלעות קטן מ $\pi/3$, ומכאן כי סכום הזוויות במשולש קטן מ π. לעומת זאת כאשר אורך הצלעות שואף לאפס, וכן כאשר k שואף לאינסוף, גודל הזווית במשולש שווה צלעות שואף ל $\pi/3$ וסכום הזוויות במשולש שואף ל π. מהצגה שונה של הפונקציות ההיפרבוליות מקבלים כי כאשר k שואף לאינסוף, ערך הביטוי שבמשפט הנ"ל שואף למשפט הקוסינוסים בגיאומטריה האוקלידית.

משפט יסודי נוסף בגיאומטריה הלוגריתמית-ספרית הוא :

משפט 1.27 $$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cosh\frac{a}{k}$$

ממשפט זה מגיע Taurinus למושג "זווית ההקבלה של קטע באורך a", מושג אשר אותו מפתח מאד לובצ'בסקי, כפי שנראה בפרק 2. אם זווית ההקבלה היא $\pi/4$, אזי אורך הקטע המתאים לה הוא הקבוע של Schweikart.

[47] ע"פ [5, עמ' 8], [4, עמ' 83- 77].
[48] שיטה זו מתאימה להשערה של Lambert כי הגיאומטריה הלא-אוקלידית מתקיימת על ספירה עם רדיוס דמיוני.

בעזרת תרגום של נוסחאות נוספות מהטריגונומטריה הספרית, על ידי החלפת הרדיוס הממשי בערך דמיוני, מגיע Taurinus לנוסחאות נוספות בגיאומטריה שלו, כגון: היקף ושטח מעגל,שטח פני ספירה, נפח כדור, ועוד..

מכל הנוסחאות הנ"ל מסיק Taurinus , כמו Lambert , כי הגיאומטריה הספרית נכונה גם בגיאומטריה הלוגריתמית-ספרית, אשר מתאימה להשערת הזווית החדה של Saccheri . אם ניתן לרדיוס הספירה k לעבור באופן רציף מהתחום הממשי לתחום הדמיוני דרך האינסוף, הרי שבכך נעבור מהגיאומטריה הספרית לגיאומטריה הלוגריתמית-ספרית, דרך המקרה הגבולי של הגיאומטריה האוקלידית.

"What Vesalius was to Galen, what Copernicus was to Ptolemy, that was Lobachevski to Euclid…" (Clifford)

פרק 2 – עבודתו של לובצ'בסקי

2.1 הרקע לעבודתו [49]

2.1.1 רקע כללי

Nicholas Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) נולד בנובגורוד שברוסיה. בגיל 14 החל את לימודיו באוניברסיטת קאזאן ובן 20 כבר הורה בה. מאוחר יותר שימש כפרופסור למתמטיקה, ובין השנים 1846-1827 שימש אף כרקטור.

כאשר אנו באים לדון כיצד הונחה לובצ'בסקי לחקור את תיאוריית המקבילים, ולגלות את הגיאומטריה הדמיונית, ואיזו השפעה הייתה לעבודות קודמות בנושא על מחקרו, נשים לב למספר עובדות:

לובצ'בסקי היה תלמידו של Bartles (1836-1769), חברו של גאוס. מאחר וידוע כי ברטלס וגאוס היו יחד ב Brunswick בשנתיים שקדמו לבואו לקאזאן (1807) וגם מאוחר יותר שמרו על קשר ביניהם לכן נראה כי הייתה להם השפעה כלשהי על עבודתו של לובצ'בסקי. עם זאת, על-פי הידוע לנו, לפני 1807 מאמציו של גאוס להוכיח את אקסיומת המקבילים לא נשאו שום פרי, ולכן עד זמן זה ברטלס לא יכל לקבל ממנו רעיונות מועילים, ונראה כי בזמן שהותו בקאזאן לא היה מודע לרעיונות שגאוס הגיע אליהם בהמשך. משום כך נראה כי לובצ'בסקי פיתח את הגיאומטריה שלו ללא השפעה ישירה מעבודתו של גאוס. נראה כי לובצ'בסקי הושפע מעבודתו של לג'נדר וכן גם מעבודותיהם של סקרי ולמברט, אם כי לא ניתן לדעת זאת באופן ודאי.

במאמרו New principles of Geometry אשר התפרסם ב 1825 מעיר לובצ'בסקי : "חוסר ההצלחה של כל הניסיונות הנעשים מאז ימי אוקלידס, במשך אלפיים שנה, להוכחת אקסיומת המקבילים, העירו בי את ההשערה כי האמת שאנו רוצים להוכיח איננה מורכבת מהנתונים עצמם, ועל-מנת לבסס אותה יש צורך בסיוע של ניסוי, לדוגמא- מדידה אסטרונומית, כמו במקרה של חוקים אחרים בטבע." בדברים אלו מציב לובצ'בסקי את הגיאומטריה בין שאר מקצועות המדע המסתמכים על ניסויים, כמו: פיסיקה, כימיה,

---

[49] ההקדמה הבאה מתבססת על סקירתו של R. Bonola כפי שהיא מופיעה ב-[4, עמ' 84-96] וכן על הקדמתו של D. E. Smith ב-[10, עמ' 360].

ביולוגיה, ועוד... ולא כמדע תיאורטי טהור. גם בסוף עבודתו מזכיר לובצ'בסקי את הצורך בניסוי מדעי, אך מסביר מדוע ניסוי כזה אינו אפשרי.

2.1.2 סקירת עבודותיו

מסקירת עבודותיו של לובצ'בסקי ניתן לראות כי כבר ב 1815 החל לחקור את תיאוריית המקבילים. בכתביו מתקופה זו נמצאו מספר ניסיונות להוכיח את אקסיומת המקבילים [50], ומספר חקירות הדומות לאלו של לג'נדר. בכתב יד משנת 1823 לספרו העוסק בגיאומטריה אלמנטרית[51], מעיר לובצ'בסקי: "איננו מציגים אף הוכחה לאקסיומה החמישית, למרות שיתכן שהוכחה כזו אמנם אפשרית..." ממקומות נוספים בכתב יד זה ברור כי הוא עסק עוד בנושא בשנים 1815-1817. בסוף שלב זה שוכנע כי כל הניסיונות הקודמים להוכחת אקסיומת המקבילים אינם מוצלחים, ולא זו היא הדרך.

במהלך השנים 1823-1825 ניכר שינוי בעבודתו, ובמקום לנסות ולהוכיח את האקסיומה החמישית, הוא פנה לפיתוח גיאומטריה שאיננה תלויה באקסיומות של אוקלידס. בשנת 1826 העביר הרצאה בפני הצוות הפיסיקלי-מתמטי של אוניברסיטת קאזאן. בהרצאה זו (כתב היד שלה לא נמצא) הסביר לובצ'בסקי את העקרונות של גיאומטריה השונה מהגיאומטריה האוקלידית, אשר בה ניתן להעביר דרך נקודה נתונה שני מקבילים לישר נתון, וסכום הזוויות של משולש הוא פחות מ π. בשנים 1829-1830 פרסם מאמר On the principles of geometry [52] אשר מכיל את החלקים העיקריים של ההרצאה הקודמת, ויישומים נוספים של התיאוריה החדשה באנליזה. לאחר מכן הופיעו ברציפות:

- Imaginary Geometry (1835).[53]
- New principles of Geometry, with a complete Theory of Parallel (1838-1835).[54]
- The Applications of the Imaginary Geometry to some Integrals (1836).[55]

---

[50] אקסיומת המקבילים מכונה אצל לובצ'בסקי "האקסיומה החמישית", בדומה לשיטת הספירה המקובלת כיום עבור האקסיומות של אוקלידס.

[51] כתב-היד נשלח לסנט-פטרבורג בשנת 1823 להדפסה, אך הוא לא פורסם והתגלה בארכיון של אוניברסיטת קאזאן ב-1898

[52] Geometrical works of Lobatschewsky, kasan (1883-1886), vol 1, p.1-67 פורסם ברוסית, תורגם לגרמנית ע"י F. Engel

[53] The Scientific Publications of the University of Kasan (1835), Geometrical Works, vol 1, p.71-120. פורסם ברוסית, תורגם לגרמנית ע"י H. Liebmann.

[54] The Scientific Publications of the University of Kasan (1835-1838), Geometrical Works, vol 1, p.219-486. פורסם ברוסית, תורגם לגרמנית(F. Engel), אנגלית(G. B. Halsted) ולצרפתית.

- Geometrie Imaginaire (1837). [56]

נראה כי מאמרים אלו לא זכו להתייחסות מרובה, ועבודותיו לא עוררו הד מיוחד.

בספרו Geometrical Investigations on the Theory of Parallels[57] אשר פורסם בשנת 1840 והכיל סיכום של כל מחקרו, מנסה לובצ'בסקי למשוך את תשומת ליבם של המתמטיקאים למחקרו, כפי שהוא כותב בהקדמה לספרו: " ... פרסמתי את עבודתי בחלקים נפרדים ב Gelehrten Schriften der University Kasan בשנים 1836,1837,1838 תחת הכותרת " New Elements of Geometry, with a complete Theory of Parallels ". כנראה שהיקף העבודה הניא את בני ארצי מלעקוב אחר הנושא, אשר מאז לג'נדר איבדו בו עניין. אך אני עדין בדעה שתיאוריית המקבילים לא צריכה לאבד את הדרישה להתייחסות של אנשי הגיאומטריה, ולכן אני מתכוון לכתוב כאן את עיקרי החקירות שלי..." [7, עמ' 11]. נראה כי ספר זה שמהווה תקציר של עבודותיו הקודמות בנושא, הוא אשר הביא את הנושא לידיעת ציבור המלומדים באותה תקופה.

בשנת 1855, שנה לפני מותו, עיוור, הכתיב לתלמידיו סיכום של מחקרו ועבודתו בנושא תיאוריית המקבילים בשם Pangeometry[58] . במאמר זה הוא פוסח על רוב ההוכחות למשפטים תוך שהוא מפנה למאמרו Geometrical Investigations on the Theory of Parallels ליתר פירוט. היות ומאמר זה נכתב בסוף ימיו, הוא כולל בתמצות את ההתפתחות הסופית של רעיונותיו בנושא.

2.2 פנגיאומטריה

הניתוח הבא מתבסס על שניים ממאמריו של לובצ'בסקי:

- המאמר Geometrical researches on The theory of parallels , מתורגם לאנגלית ע"י George B. Halsted [7, עמ' 11-45].
- המאמר Pangeometry , מתורגם לאנגלית ע"י Henry P. Manning [8, עמ' 360-374].

---

[55] The Scientific Publications of the University of Kasan (1836), Geometrical Works, vol 1, p.121-218. פורסם ברוסית, תורגם לגרמנית (H. Liebmann).

[56] Geometrical Work, vol 2, p.581-613, Crelles Journal (1837). פורסם בצרפתית.

[57] Geometrical works, vol 2, p.553-578 , Berlin (1840). פורסם בגרמנית ותורגם לצרפתית (J. Houel) ולאנגלית (G.B. Halsted).

[58] The Scientific Publications of the University of Kasan (1855), Geometrical Works, vol 2, p.617-680 . פורסם במקביל ברוסית וצרפתית ותורגם לגרמנית (H. Libmann) ואיטלקית (G. Battaglini).

2.2.1 אקסיומות ומושגי יסוד

את מאמרו Pangeometry פותח לובצ'בסקי בבחינת מושגי היסוד והאקסיומות שאותם ניתן לקבל כבסיס לגיאומטריה, ומהם ניתן לפתח את כל שאר ההגדרות והמשפטים.

לובצ'בסקי יוצא נגד מושגי היסוד שאותם הניח אוקלידס : נקודה, קו, ישר, משטח ומישור. זאת היות וההגדרות אינן מצביעות על דרך יצירת המונחים שהן מגדירות, ולא ברור מהגדרות אלו עצם הקיום של מונחים אלו במציאות. הוא בוחן הגדרות שונות של ישר ומישור, כגון:

קווים ישרים   שני קווים המתאחדים כאשר יש להן שתי נקודות משותפות.

מישור   משטח A, כך שבהינתן ישר l, אם ל l ול A יש שתי נקודות משותפות, אזי $l \subset A$.

אך ניסיונות אלו להגדרה יותר משהם מגדירים את הקו הישר או המישור, הם מתארים אחת מהתכונות שלהם, שאותה יש לבדוק או לקבל כאקסיומה. לאור זאת, מושגי היסוד שאותם מבכר לובצ'בסקי הם ספירה ומעגל, שע"פ דעתו הגדרותיהן שלמות יותר כיוון שהן מכילות בתוכן גם את דרך יצירת הגדלים שאותם הן מגדירות[59].

אם נקבל את הספירה והמעגל כמושגי יסוד, נגדיר בעזרתם את הקו הישר והמישור:

בהינתן שתי נקודות קבועות A,B נבנה שתי ספירות בעלות רדיוס שווה סביב נקודות אלו כמרכזים. נבצע זאת עבור רדיוסים מגדלים שונים. המקום הגיאומטרי של חיתוכי זוגות הספירות יקרא מישור.

באופן דומה נגדיר קו ישר כמקום הגיאומטרי של חיתוכי זוגות מעגלים בעלי רדיוס שווה, שכולם מונחים באותו מישור, ומשורטטים מסביב לשתי נקודות קבועות של מישור זה כמרכזים.

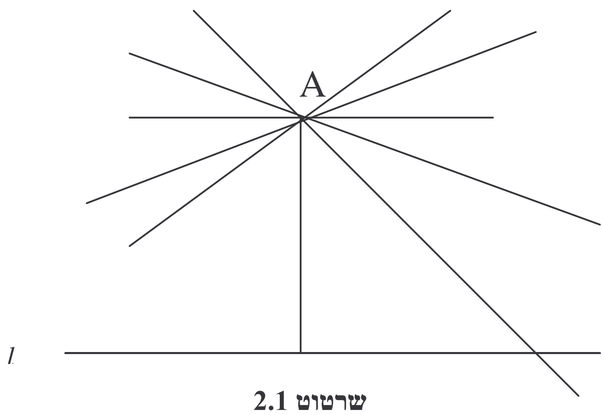
בקביעת האקסיומות שעליהן ניתן להסתמך, נראה כי הוא מקבל את אקסיומות 1-4 של אוקלידס, אף שהוא איננו מציין זאת באופן מפורש. בתחילת מאמרו "The theory of parallels " מביא לובצ'בסקי רשימה של משפטים אשר ידיעתם דרושה להמשך אך הוכחתם ,לטענתו, ברורה ואיננה מהווה כל בעיה, ולכן הוא איננו מביא אותה, ע"מ שלא לעייף את הקורא. בין משפטים אלו הוא כולל תכונה של הקו הישר: "הקו הישר מתאים לעצמו בכל המצבים. כלומר - אם נסובב משטח שמכיל את הקו הישר, דרך שתי נקודות שעל הישר, הישר לא ישנה את מקומו" [7, עמ' 11]. בהמשך רשימה זו מובאות מספר

[59] הוא איננו מציין מהן ההגדרות המדויקות אותן הוא מקבל, וכיצד ברור מהן עצם קיומן במציאות.

עובדות שאנו רגילים לקבלן כאקסיומות שהן הרחבה ותוספות על ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס. כגון: "שני קווים ישרים לא יכולים להיחתך בשתי נקודות", או העובדה כי קו ישר שממשיכים אותו לאינסוף, מחלק את המישור לשני חלקים, וכל קו שיעבור מצדו האחד של הישר לצדו השני, יחתוך אותו. בנוסף לכך מופיעים ברשימה משפטים שונים מ 28 המשפטים הראשונים של אוקלידס, כגון: זוויות קדקודיות - שוות, במשולש - צלעות שוות נמצאות מול זוויות שוות, ולהפך, במשולש - הצלע הגדולה נמצאת מול הזווית הגדולה, שלושת משפטי החפיפה, ועוד... עובדה נוספת שאותה הוא מקבל כברורה , החשובה להמשך היא כי שני ישרים המאונכים לישר שלישי אינם נפגשים לעולם. במקומות מסוימים, שאותם אציין בהמשך, מסתמך לובצ'בסקי באופן לא מודע על אקסיומת פש, וזאת מבלי לכלול אותה ברשימת המשפטים שעליהם הוא מסתמך. בפתיחה ל Pangeometry הוא יוצא נגד קבלת האקסיומה החמישית בניסוחה: "בהינתן ישר l ונקודה $P \notin l$, קיים דרך P מקביל אחד ויחיד ל l". או משפט השקול לה: "סכום שלוש הזוויות במשולש, שווה לשתי זוויות ישרות" (במילים אחרות: שווה ל π). על מנת להוכיח משפט זה, נאלצו מתמטיקאים לאמץ בצורה מפורשת או מרומזת הנחות יסוד שנגד קבלתן יוצא לובצ'בסקי. לדוגמא: ההנחה כי מעגל עם רדיוס הגדל לאינסוף הופך לקו ישר, וספירה עם רדיוס אינסופי למישור. או הקביעה כי זוויות משולש נקבעות רק ע"פ היחסים שבין הצלעות, ולא ע"פ אורך הצלעות עצמן. נגד קביעות שרירותיות אלו יוצא לובצ'בסקי במאמרו . אמנם ע"פ מדידות שניתן לבצע במשולשים שלנו, המשפט אודות סכום הזווית במשולש נכון, בתוך גבולות הטעות של המדידות, אך דבר זה איננו מספיק ע"מ להוכיח את המשפט, כיוון שכפי שנראה בהמשך, הסטייה מ π, אם היא אמנם קיימת, היא סטייה קטנה מאד, ולכן היא בתוך טווח טעות המדידה. על-אף שלא נתגלו סתירות בכל המשפטים והתוצאות שנובעים ממשפט זה, אין זו ראיה מספקת שכך אמנם הדבר.

2.2.2 Pangeometry - סקירה כללית

לובצ'בסקי איננו מקבל את הגדרת ישר מקביל כפי שהיא מופיעה אצל אוקלידס: "ישר l יקרא מקביל לישר m, אם ישר l איננו חותך לעולם את ישר m". הגדרה זו איננה מדגישה מספיק את יחודו של אותו ישר כישר יחיד עם תכונה זו. במקום זאת מגדיר לובצ'בסקי ישר מקביל באופן הבא:



שרטוט 2.1

הגדרה נתונה נקודה A במישור m, וישר l באותו מישור כך ש $A \notin l$. נגדיר מקביל דרך A ל l כישר הגבול בין הישרים באותו מישור, העוברים דרך A וחותכים את l , ובין אלו שאינם חותכים אותו. הצד שבו קורה החיתוך נקרא הצד של המקבילות. הזווית בין המקביל והאנך מ A ל l תקרא זווית ההקבלה (The angle of parallelism). היות וזווית זו תלויה באורך הקטע של האנך מ A ל l, נסמנה $\Pi(a)$ עבור קטע באורך a.

אם זווית ההקבלה היא $\pi/2$ אזי המקביל הוא מקביל יחיד וכל שאר הישרים דרך A חותכים את l.

לעומת זאת: אם זווית ההקבלה קטנה מ $\pi/2$ אזי קיימים שני מקבילים ל l דרך A: אחד מצד ימין, ואחד מצד שמאל, ויש לבצע הבחנה בצדדים של המקבילות. כמו-כן, יש להבחין בישרים שנותרו בין אלו שחותכים את l ואלו שאינם חותכים אותו.

יחס ההקבלה הוא יחס שחל על הישר כולו ולא רק על נקודה אחת בו (במילים אחרות: הוא איננו תלוי בנקודה A שבהגדרה). זהו יחס סימטרי וטרנזיטיבי.

נעבור לחקור את הנושא של סכום הזוויות במשולש והקשר של נושא זה לתיאוריית המקבילים.

נגדיר משולש ישר כמשולש שצלעותיו הן קווים ישרים.

תחילה מוכיח לובצ'בסקי כי סכום הזוויות במשולש ישר איננו עולה על π, ומכאן נובע משפט כי אם קיים משולש יחיד שבו סכום הזוויות שווה ל π, אז זהו המצב גם בכל משולש אחר.

ולכן תיתכנה רק שתי אפשרויות:

- או שסכום הזוויות בכל המשולשים הישרים שווה ל π. השערה זו משמשת בסיס לגיאומטריה "הרגילה" - האוקלידית.
- או שבכל משולש ישר סכום הזוויות קטן מ π. השערה זו משמשת בסיס לגיאומטריה אחרת, אותה מכנה לובצ'בסקי "גיאומטריה דמיונית" או "פנגיאומטריה".[60]

משפט אם שני ישרים המאונכים לישר שלישי מקבילים זה לזה (כלומר זווית ההקבלה היא זווית ישרה), אז סכום הזוויות במשולש ישר הוא π.

מכאן מגיעים למסקנה כי בגיאומטריה האוקלידית, $\Pi(p)$ היא זווית ישרה לכל אורך של p, ואילו בגיאומטריה הדמיונית $\Pi(p)<\pi/2$ לכל p.

זווית ההקבלה לקטע p מקבלת ברציפות ערכים שונים ע"פ האורך של p. $\Pi(p)\to 0$ עבור $p\to\infty$, ו $\Pi(p)\to\pi/2$ עבור $p\to 0$. על-מנת לתת לפונקציה ערך אנליטי כללי יותר, ניתן להרחיב את ההגדרה באופן שרירותי עבור ערכים שליליים של p. נגדיר $\Pi(p)+\Pi(-p)=\pi$.

מכאן כי לכל זווית A $0<A<\pi$ ניתן למצוא קטע p כך ש $\Pi(p)=A$ (כאשר אם $A<\pi/2$ אז p הוא מספר חיובי, ואם לא - מספר שלילי).

וכן מתקיים גם המשפט ההפוך: לכל אורך של p קיימת זווית A כך ש $\Pi(p)=A$.

כעת עובר לובצ'בסקי להגדיר מספר מושגים בסיסיים בגיאומטריה הדמיונית, אשר יהוו תחליף למושג הישר והמישור בגיאומטריה האוקלידית.

הגדרה מעגל גבול (limit circle או oricycle) מעגל עם רדיוס אינסופי.

הערה ב Pangeometry לאחר הגדרה זו מופיע תיאור מפורט של בניה, כיצד ניתן לקבל עקומה זו. ב "Theory of parallels" העקומה, שנקראת שם קו גבול (Boundary line), מוגדרת באופן אחר. לאחר מכן מוכיחים את המשפט כי מעגל שרדיוסו גדל לאינסוף שואף לקו הגבול, ומכאן כי ניתן לקרוא לקו הגבול מעגל עם רדיוס אינסופי.

[60] את העובדה כי סכום הזוויות במשולש ישר, בגיאומטריה כזו, קטן מ- π ומשתנה ממשולש למשולש, ואילו בגיאומטריה האוקלידית סכום הזוויות בכל המשולשים קבוע ושווה ל- π, מצאו לג'נדר וסקרי לפניו.

קשת של מעגל גבול תקרא קשת גבול . האנכים האמצעיים לכל המיתרים של מעגל הגבול מקבילים זה לזה. אנך אמצעי למיתר של העקומה יקרא ציר של מעגל הגבול, (או ציר של קשת גבול השייכת לאותו מעגל).

אם נסובב את מעגל הגבול (או קו הגבול) מסביב לאחד הצירים יתקבל משטח שיקרא משטח גבול או ספירת גבול (limit sphere או Orisphere) שהוא ספירה בעלת רדיוס אינסופי. ציר הסיבוב וכל הישרים המקבילים לו יהיו צירים של ספירת הגבול.

מישור שמכיל ציר של ספירת הגבול יקרא מישור קוטרי (diametral sphere). החיתוך של ספירת הגבול עם מישור קוטרי הוא מעגל גבול.

החלק של המשטח של ספירת הגבול, המוגבל ע"י שלוש קשתות של מעגל גבול, יקרא משולש ספירת גבול או משולש גבולי. הקשתות של מעגלי הגבול ייקראו הצלעות, והזוויות הדו-מישוריות בין המישורים של קשתות אלו - הזוויות של המשולש.

בגיאומטריה האוקלידית ידוע כי ישרים מקבילים שומרים ביניהם על מרחק שווה. לעומת זאת, בפנגיאומטריה המקבילים הולכים ומתקרבים זה לזה, במובן מסוים, ככל שמתרחקים בכיוון המקבילות. נבחן מהו היחס בין שתי קשתות גבול.

הגדרה נגדיר מרחק בין שתי קשתות גבול כאורך קטע הציר שבין קשתות אלו.[61]

משפט נתבונן בשני ישרים מקבילים המשמשים כצירים לשתי קשתות גבול s ו s'[62], כאשר כיוון המקבילות הוא מ s ל s', והמרחק בין s ל s' הוא x. אזי מתקיים: $s' = s \cdot E^{-x}$, כאשר E הוא קבוע שאיננו תלוי באורך הקשתות s ו s'.[63]

חשוב לשים לב כי E, שהוא היחס שבין s ו s' כאשר המרחק ביניהם הוא יחידה אחת $(x=1)$, יכול להיות כל מספר גדול מ 1, והוא איננו תלוי באורך הקשתות אלא רק ביחידת האורך שבה נמדד המרחק בין

---

[61] המרחק מוגדר היטב, היות והוא קבוע ואיננו משתנה עבור נקודות שונות על מעגל הגבול.

[62] נשתמש במושג s על מנת לתאר הן את האורך של s והן את השם של הקשת s, ע"פ ההקשר.

[63] דבר זה נכון גם עבור טור של קשתות גבול... s, s', s'', היות והיחס $\frac{s}{s'} = \frac{s'}{s''} = \frac{s''}{s'''} = \ldots = E$, בתנאי שהמרחק בין שתי קשתות רצופות שווה תמיד ל-x.

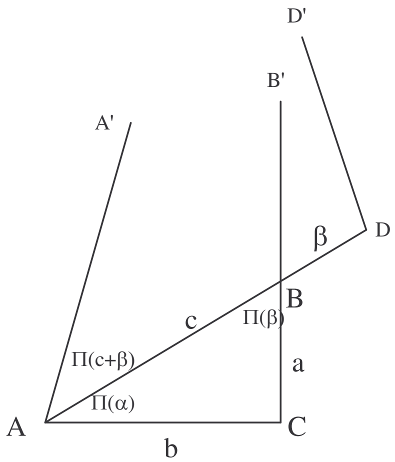
הקשתות שהוא שרירותי לחלוטין, לכן ניתן לבחור לשם פשטות, את יחידת האורך כך ש E ישמש כבסיס ללוגריתם הטבעי.

הערה ממשפט זה נובע כי כאשר x שואף לאינסוף אז אורך s' שואף ל 0, ומכאן כי המרחק בין שני מקבילים לא רק שקטן בכיוון המקבילות, אלא שהוא נעלם לבסוף, וישרים מקבילים מתנהגים כאסימפטוטות.

אם נסמן את השטח המוגבל בין שתי קשתות סמוכות ושני מקבילים ב P , אזי השטח של החלק של המישור המוגבל בין שני ישרים מקבילים והקשת s ואיננו מוגבל בצד של המקבילות יהיה $\frac{P}{1-E^{-x}}$.

בגיאומטריה האוקלידית E=1 ומכאן כי השטח של החלק של המישור המוגבל בין שני ישרים מקבילים, ומוגבל בצד האחד ע"י האנך המשותף להם, ובצד השני איננו מוגבל, הוא אינסופי.

[64]נבחן כעת מהו היחס בין קטע באורך x, לזווית ההקבלה $\Pi(x)$ של הקטע. לשם-כך נתבונן במשולש ישר ישר-זווית שצלעותיו הן a,b,c והזוויות מול אותן צלעות הן בגודל $\Pi(\alpha),\Pi(\beta),\pi/2$ בהתאמה (גדלים אלה מגדירים את β , α). נעתיק קטע באורך β על הישר של הצלע c, מעבר לקדקוד המתאים ל $\Pi(\beta)$. נעלה בקצה קטע זה אנך ל β, ונעביר מקביל לאנך זה, באותו צד של האנך, מהקדקוד המתאים ל $\Pi(\alpha)$. נאריך את צלע a מעבר לקדקוד המתאים ל $\Pi(\beta)$. מבחינת כל המקרים (β בהמשך צלע c, או על צלע c עצמה. $\beta>c$, $\beta<c$, $\beta=c$) נקבל כי מתקיימות שתי משוואות:



שרטוט 2.2

$$\Pi(b)=\Pi(c+\beta)+\Pi(\alpha) \qquad \Pi(b)=\Pi(c-\beta)-\Pi(\alpha)$$

[64]נושא זה מופיע אצל לובצ'בסקי מאוחר יותר, אך היות ואני לא מקפידה כאן על דרך ההוכחה המלאה של כל הנוסחאות, החלטתי להקדים אותו לכאן.

בעזרת משוואות אלו ומשוואות טריגונומטריות נוספות שאותן מחשב לובצ'בסקי בהמשך, מתקבלת הנוסחה $\tan 1/2\Pi(nc) = [\tan 1/2\Pi(c)]^n$ עבור כל n. כיוון שיחידת האורך למדידת אורך הישרים היא שרירותית נבחר יחידת אורך כך ש $\tan 1/2\Pi(1) = e^{-1}$, כאשר e הוא בסיס הלוגריתם הטבעי[65].

מקבלים כי לכל קטע באורך x (x חיובי או שלילי) מתקיים $\tan 1/2\Pi(x) = e^{-x}$.[66]

נוסחה זו מקיימת את מה שכבר הערנו לעיל כי $\Pi(x)\to 0$ עבור $x\to\infty$, $\Pi(x)\to\pi/2$ עבור $x\to 0$, ו $\Pi(x)\to\pi$ עבור $x\to-\infty$.

נבחן כעת מהי הגיאומטריה המתקיימת על פני ספירת הגבול.

משפט זווית מרחבית תלת-צדדית שווה למחצית סכום שלוש זוויות המשטח,פחות זווית ישרה[67].

בעזרת משפט זה מוכיח לובצ'בסקי את המשפט הבא:

משפט אם שלושה מישורים נחתכים ע"י שלושה ישרים מקבילים, ואם מגבילים כל מישור לחלק שבין המקבילים, אז הסכום של שלוש הזוויות הדו-מישוריות שמישורים אלו מגדירים, הוא π.

ע"פ המשפט לעיל, היות ומישורים קוטריים נחתכים בצירים של ספירת הגבול, שהם כולם מקבילים זה לזה, מכאן כי סכום הזוויות של משולש ספירת גבול הוא π, כפי שאנו רגילים בגיאומטריה האוקלידית. כלומר אם נחליף את הקווים הישרים במישור, בקשתות של מעגלי גבול על ספירת הגבול, נקבל את הגיאומטריה האוקלידית הרגילה. כמו-כן מתקיימת על פני ספירת הגבול הטריגונומטריה האוקלידית הרגילה, וכל הנוסחאות הטריגונומטריות המתקיימות במשולש ישר, יתקיימו גם במשולש ספירת גבול על פני ההורוספירה.[68]

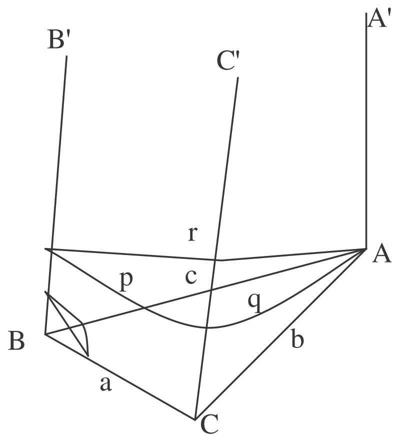
---

[65] לובצ'בסקי כבר השתמש בטכניקה זו של בחירת יחידת האורך. יש לבדוק כי הבחירה כאן זהה עם הבחירה שביצענו לעיל.
[66] לנוסחה דומה לזו הגיע גם בוליי (בדרך שונה), כפי שנראה בפרק 3.
[67] להסבר מפורט של המשפט, ראה סעיף 2.2.3, משפט 2.7.
[68] בכך גילה לובצ'בסקי שוב את המשפט של Watcher שהגיאומטריה של מעגלי גבול על ההורוספירה זהה לגיאומטריה של קווים ישרים במישור האוקלידי.

לאחר שבירר איזו גיאומטריה וטריגונומטריה מתקיימות על ספירת הגבול, עובר לובצ'בסקי לבחון את תכונות הטריגונומטריה המישורית והטריגונומטריה הספרית בגיאומטריה הדמיונית, ומהו היחס בינן לבין הטריגונומטריה המישורית והספרית בגיאומטריה האוקלידית.

סימון אם $\Pi(x)$ הוא גודל נתון, $0<\Pi(x)<\pi/2$, נסמן ב x' את הקטע המקיים $\Pi(x')=\pi/2-\Pi(x)$.

נתבונן במשולש ישר ישר-זווית ABC, אשר צלעותיו הן a,b,c , והזוויות שמול אותן צלעות יסומנו $\Pi(\alpha),\Pi(\beta),\pi/2$ בהתאמה.



שרטוט 2.3

מנקודה A נעלה אנך AA' למישור ABC, ונעביר לו מקבילים דרך B ו C, במישורים העוברים דרך צלעות המשולש והאנך AA' . נשרטט ספירה מסביב לנקודה B כמרכז, עם רדיוס שרירותי הקטן מ a. חיתוך הספירה עם שלושת המישורים העוברים דרך B ייצור משולש ספרי ישר-זווית אשר את צלעותיו וזוויותיו ניתן לחשב ע"פ הזוויות שבין המישורים. (נאמר כי המשולש הספרי שנוצר מתאים למשולש הישר ABC). דרך קדקוד A נעביר ספירת גבול כך ש AA' ציר שלה. חיתוכה עם המישורים העוברים דרך צלעות המשולש יוצר משולש גבולי עם צלעות p,q,r וזוויות $\Pi(\alpha),\Pi(\alpha'),\pi/2$ בהתאמה, אשר הגיאומטריה בו היא גיאומטריה אוקלידית, ולכן ניתן להשתמש עבורו בנוסחאות הרגילות עבור *sin* ו *cos*.

בעזרת חישובים שונים והצבה בנוסחאות טריגונומטריות שונות, מגיעים למספר נוסחאות המתקיימות במשולש הספרי המתאים למשולש הישר. נוסחאות אלו ידועות כנכונות בטריגונומטריה הספרית הרגילה, הנובעת מהגיאומטריה האוקלידית עבור משולשים ספרים ישרי זווית, ומהם אפשר להמשיך ולפתח את כל נוסחאות היסוד של הטריגונומטריה הספרית. המסקנה מכך היא כי הטריגונומטריה הספרית היא

טריגונומטריה אבסולוטית, המתקיימת הן בגיאומטריה האוקלידית והן בגיאומטריה הדמיונית, ללא תלות בעובדה אם סכום הזוויות במשולש ישר הוא π או לא[69].

הנושא האחרון שאותו בוחן לובצ'בסקי הוא מהי הטריגונומטריה המישורית בגיאומטריה הדמיונית. בעזרת חלק מהנוסחאות שאליהן הגענו בסעיפים הקודמים, וכן בעזרת הצבה וחישוב של נוסחאות טריגונומטריות נוספות, מגיעים לעוד נוסחאות טריגונומטריות רבות, אשר מהן ניתן להגיע בסופו של דבר לארבע נוסחאות חשובות על התלות ההדדית בכל משולש ישר בין הצלעות והזוויות. אם נניח כי צלעות משולש זה שואפות ל 0, ונציב בנוסחאות אלו את הקירובים המתאימים עבור $\sin\Pi(a), \cos\Pi(a)$ ו $\cot\Pi(a)$, נקבל את משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים הרגיל, וכן את הנוסחה כי סכום זוויות המשולש שווה ל π, מה שמתקיים בגיאומטריה האוקלידית.

מסקנה הגיאומטריה הדמיונית עוברת לגיאומטריה הרגילה כאשר צלעות המשולש שואפות ל 0.

עובדה נוספת היא כי אם נחליף את צלעות המשולש a,b,c בערכים דמיוניים ai,bi,ci , $[i=\sqrt{-1}]$ נקבל מאותן משוואות, משוואות הידועות לנו כנכונות עבור משולשים ספרים.

מסקנה הטריגונומטריה המישורית הדמיונית עוברת לטריגונומטריה הספרית אם הצלעות מקבלות ערכים דמיוניים.

עובדות אלו בצירוף העובדה כי הטריגונומטריה הספרית מתקיימת בגיאומטריה הדמיונית באופן אבסולוטי, מוכיחות כי הנוסחאות העומדות בבסיס הגיאומטריה הדמיונית מהוות בסיס לגיאומטריה כללית, ולכן אינן תלויות בסכום הזוויות במשולש. מכאן מסיק לובצ'בסקי כי הגיאומטריה הדמיונית היא מערכת גיאומטרית שלמה, ללא סתירות פנימיות.

לסכום מעיר לובצ'בסקי כי בבואנו לדון מהי הגיאומטריה "האמיתית" שקיימת בעולם יש לבצע תצפית אסטרונומית שתנסה לקבוע מהו באמת סכום הזוויות במשולש, ומהי זווית ההקבלה. אך היות והסטייה בערכים בין שתי התיאוריות היא כה מזערית, היא איננה ניתנת למדידה בכלים שעומדים לרשותנו, ולכן השאלה: איזו גיאומטריה היא ה"נכונה" יותר תישאר לעולם שאלה פתוחה ללא הכרעה. עם-זאת, כיוון

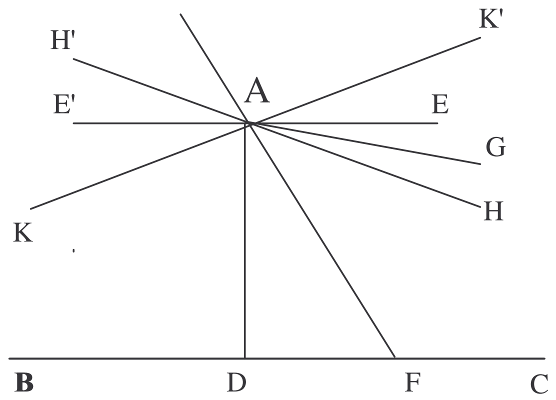
[69] לעובדה זו הגיעו לפניו כבר למברט ו-Largrange .

שגודל הסטייה קטן כל-כך ניתן להניח את האקסיומות האוקלידית עבור כל החישובים שאנו מבצעים באופן מעשי.

2.2.3 תיאוריית המקבילים - ניתוח מפורט[70]

לובצ'בסקי פותח את מאמרו ברשימת משפטים וטענות שהוכחתן פשוטה ועל-כן איננה מובאת במפורש, אך ניתן להסתמך עליהם בהמשך (משפטים הנובעים מהאקסיומות של אוקלידס, ללא אקסיומת המקבילים). לאחר רשימת המשפטים הנ"ל הוא פונה להגדיר את מושג "המקביל":

[71]**הגדרה 2.1** נתונה נקודה A במישור m, וישר l באותו מישור כך ש $A \notin l$. נחלק את כל הישרים p במישור m כך ש $A \in p$ לשתי קבוצות: אלו שחותכים את l ואלו שאינם חותכים את l. ישרי הגבול (boundary lines) של קבוצה אחת או השניה של הישרים הללו יקראו ישרים מקבילים לישר l.



שרטוט 2.4

נוריד מ A אנך AD לישר l, ונעביר לו אנך AE. ברור כי AE איננו חותך את l [72], השאלה היא האם AE הוא הישר היחיד, או שקיימים ישרים נוספים בתוך זווית EAD שאינם חותכים את l.

נאמץ את ההנחה כי יתכן שיש עוד ישרים, לדוגמא AG, שאינם חותכים את ישר l. במעבר מקבוצת הישרים החותכים, כמו AF, לישרים שאינם חותכים, כמו AG, חייבים להגיע למקביל AH ל l,

[70] הניתוח המפורט הבא מסתמך בעיקר על מאמרו של לובצ'בסקי " Geometrical researches on The theory of parallels "(1840),[7,עמ' 11-45], בתוספת השוואות והערות מהמאמר "Pangeometry" שפרסם כסיכום למחקרו בנושא בסוף ימיו (1855) [8, עמ' 360-374].

[71] הגדרת המושג "ישרים מקבילים" ו"זווית הקבלה" מובאת ב-[7, עמ' 13-14] באריכות. כאן אני מביאה את אותם רעיונות בלשוני.

[72] טענה מספר ארבע ברשימת הטענות הנ"ל אומרת- "שני ישרים שמאונכים לישר שלישי לא יחתכו לעולם, לא משנה כמה שנאריך אותם".

שהוא ישר גבול – כך שמצד אחד שלו כל הישרים אינם חותכים את l, ומהצד השני שלו כל הישרים חותכים את l.[73]

הערה בנקודה זו מסתמך לובצ'בסקי באופן לא מודע על אקסיומת פש, בהניחו כי אם ישר אחד איננו חותך את l, אז כל הישרים העוברים מעליו גם כן לא יחתכו את l. חייב להיות גבול ברור בין קבוצת הישרים החותכים את l, וקבוצת הישרים שאינם חותכים את l. כמו כן: בהנחה כי במעבר בין שתי הקבוצות חייבים להגיע לישר הגבול הוא מסתמך על תכונת הרציפות בין הישרים השונים החותכים/ לא חותכים את l.

זווית HAD בין המקביל AH והניצב AD נקראת זווית ההקבלה (The angle of parallelism).
נסמן אותה $\Pi(p)$ עבור $AD = p$.

אם $\Pi(p)$ היא זווית ישרה, אז ההארכה AE' של הניצב AE, היא גם מקבילה לl. כל ישר p כך ש $A \in p$ מלבד EE', או הוא עצמו או המשכו, עובר בתוך אחת מהזוויות EAD או $E'AD$ וכך ע"פ האופן שבו הגדרנו מקביל וזווית הקבלה, p חותך את l , ומכאן ש EE' הוא מקביל יחיד.
אם $\Pi(p) < \pi/2$ אז על הצד השני של AD ניצור אותה זווית $DAK = \Pi(p)$ ונקבל עוד ישר AK שמקביל לישר l מצדו השני של AD.[74] ע"פ זה מנקודה נתונה A ניתן להעביר שני מקבילים - אחד לכל צד, לישר נתון l כך ש $A \notin l$.

לפי השערה זו יש לבצע הבחנה בצדדים של המקבילות (sides in parallelism).
נמשיך את שני המקבילים AH ו AK בעזרת AH' ו AK' בהתאמה.
כל שאר הישרים p או המשכם, שעוברים דרך A, אם הם עוברים בתוך $2\Pi(p) = \angle HAK$ אז הם חותכים את l, ואם הם בצדם השני של AH ו AK, כלומר בתוך הזוויות $K'AH$ או $H'AK$ אז הם אינם חותכים את l. על פי מה שראינו עד עתה, לפי ההשערה $\Pi(p) = \pi/2$, דרך נקודה A קיים ישר מקביל יחיד ל l וכל שאר הישרים חותכים את l, ולפי ההשערה $\Pi(p) < \pi/2$, דרך נקודה A יש

[73] לובצ'בסקי איננו מוכיח כי הישר המקביל בעצמו איננו חותך את l. דבר זה נראה לו כנראה ברור מההגדרה, אף כי הוא איננו מציין זאת במפורש.
[74] פשוט ללובצ'בסקי כי זווית ההקבלה לצד ימין שווה לזווית ההקבלה לצד שמאל, ולכן הוא איננו טורח להוכיח זאת.

שני מקבילים - אחד בכל צד, ובנוסף, חייבים להבחין בישרים שנותרו בין אלו שחותכים ובין אלו שאינם חותכים את l.

לאחר שהגדרנו מהו ישר המקביל לישר נתון, ניתן להוכיח מספר משפטים:

משפט 2.1 ההקבלה אינה תלויה בנקודה מסוימת על הישר [7, עמ' 15].

כלומר יהי l מקביל ל-m דרך A ותהי $A \neq B \in l$ נקודה כלשהי, אזי-l מקביל ל-m דרך B.

זאת-אומרת: כל ישר BC שעובר מתחת לישר l, חותך את הישר m, וכל ישר BD שעובר מעל ל-l, איננו חותך את m.

משפט 2.2 יחס ההקבלה הוא יחס סימטרי. או בלשונו: שני ישרים מקבילים תמיד באופן הדדי [7, עמ' 16].

כלומר אם l מקביל ל-m, אזי גם m מקביל ל-l.

משפט 2.3 יחס ההקבלה הוא יחס טרנזיטיבי. או בלשונו - שני ישרים שמקבילים לישר שלישי, מקבילים ביניהם [7, עמ' 22].

הוכחת משפט זה מתחלקת למספר מקרים:

1. כאשר שלושת הישרים באותו מישור. (יש להבדיל בין המקרים כאשר שני הישרים החיצוניים מקבילים לישר האמצעי, או כאשר שני ישרים סמוכים מקבילים לישר חיצוני שלישי).
2. כאשר שלושת הישרים במישורים שונים (במקרה זה נניח כי ישר l שנמצא במישור A, מקביל לישר l' שנמצא במישור B. הישר השלישי l'' הוא ישר החיתוך של מישורים A ו B והוא מקביל גם ל l וגם ל l').

עובדה זו ניתנת לניסוח גם כך: אם שלושה מישורים נחתכים בשלושה ישרים שונים, ושניים מישרי החיתוך מקבילים, אזי שלושת הישרים שבחיתוכי המישורים מקבילים זה לזה.

נגדיר משולש ישר (rectilineal triangle) - משולש שכל צלעותיו הן קווים ישרים.

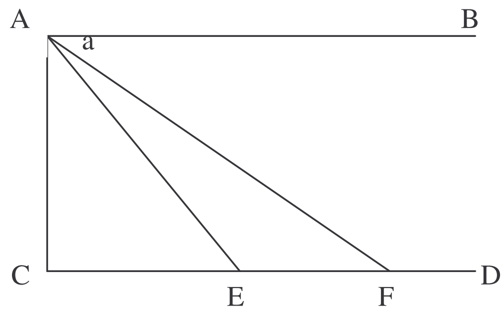
משפט 2.4 אם קיים משולש ישר שסכום זוויותיו שווה ל π, אז זהו המצב גם בכל משולש אחר [7, עמ' 17].

בהוכחת משפט זה מסתמכים על טענת-עזר נוספת:

טענת-עזר: **סכום הזוויות במשולש איננו עולה על π** [7, עמ' 16].

מכאן נובע כי תיתכנה רק שתי אפשרויות: או שסכום הזויות בכל משולש שווה ל π, או שסכום הזויות בכל משולש קטן מ π.

משפט 2.5 **אם שני אנכים לאותו ישר מקבילים זה לזה, אז סכום הזוויות במשולש ישר שווה ל π** [7, עמ' 19].



שרטוט 2.5

הוכחה יהיו AB ו CD מקבילים זה לזה כך ש $AB \perp AC$ וכן $CD \perp AC$.
E,F נקודות על CD כך ש E קרובה יותר ל C, ונניח כי סכום הזוויות במשולשים ACE ו AEF הוא $\pi-\beta, \pi-\alpha$ בהתאמה. $\alpha, \beta \geq 0$. נסמן $\angle BAF = a, \angle AFC = b$, אזי מחישוב נקבל כי $\alpha + \beta = a - b$. ע"פ טענת עזר שקדמה למשפט, אם הנקודה F מתרחקת מ C על הישר CD, זוויות a,b שואפות ל 0 כרצוננו, ומכאן כי $\alpha = \beta = 0$.

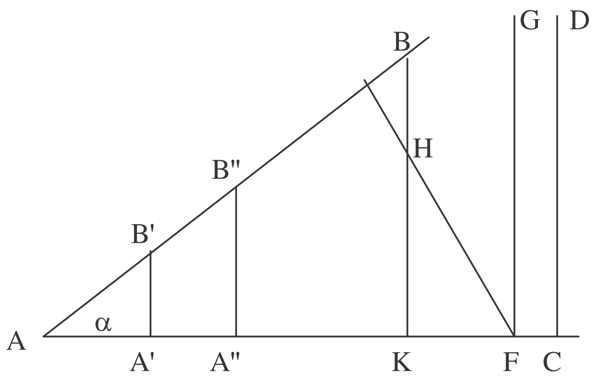
מכאן נובע כי: או שבכל משולש סכום הזוויות הוא π, ובאותו מקרה זווית ההקבלה $\Pi(p) = \pi/2$ לכל קטע באורך p, או שבכל משולש סכום הזוויות קטן מ π, ובאותו מקרה זווית ההקבלה $\Pi(p) < \pi/2$ לכל קטע באורך p. ההנחה הראשונה משמשת כבסיס לגיאומטריה האוקלידית ולטריגונומטריה המישורית הנובעת ממנה, ואילו ההנחה השניה, שניתן לקבלה באותו אופן בלי להגיע לשום סתירה בתוצאות, משמשת כבסיס לגיאומטריה אחרת שלובצ'בסקי נותן לה את השם: "גיאומטריה דמיונית"[75].

---

[75] ב pangeometry הוא מעיר כי יתכן שיותר מתאים לקרוא לגיאומטריה זו "פנגיאומטריה" ולא "גיאומטריה דמיונית" כיוון ששם זה מצביע על תורה גיאומטרית כללית שכוללת את הגיאומטריה הרגילה כמקרה פרטי.

נניח מעתה והלאה כי אנו פועלים בגיאומטריה הדמיונית.

משפט 2.6 **לכל זווית** $0<\alpha<\pi/2$ **קיים קטע** $p>0$ [76] **כך ש** $\Pi(p)=\alpha$ [7, עמ' 19].



הוכחה יהיו AB,AC שני ישרים כך ש $\angle BAC=\alpha$. מנקודה כלשהי B' על AB נוריד אנך $A'B'$ ל AC. מנקודה A'' על AC כך ש $AA'=A'A''$ נעלה אנך $A''B''$ ל AC, וכן הלאה. מכיוון שסכום הזוויות במשולשים $AA'B', AA''B''$ וכו'... הולך ויורד, וסכום הזוויות במשולש לא יכול להיות מספר שלילי, מכאן כי קיים אנך CD ל AC, כך ש CD איננו חותך את AB, כלומר: לא ניתן לבנות את משולש ACD.[77]

בעוברנו מקבוצת האנכים שחותכים את AB, לאלו שאינם חותכים אותו מגיעים ל FG - האנך הראשון שאיננו חותך את AB[78]. נשרטט $\angle GFH$ קטנה כרצוננו לכיוון הנקודה A. מנקודה H על FH נוריד אנך HK ל AC. המשכו של HK חייב לחתוך את AB, נניח בנקודה B, וכך נוצר משולש ABK. הישר FH "נכנס" למשולש זה, ולכן המשכו חייב לחתוך את AB, נניח בנקודה M. ומכאן כי FG מקביל ל AB (הוא איננו חותך את AB, אך כל ישר שעובר מצד שמאל לו חותך את AB), והקטע AF הוא הקטע המבוקש.

הערה בהוכחת משפט זה משתמש בוליי שלא במודע באקסיומת פש, בטענה כי אם FH "נכנס" למשולש ABK דרך נקודה פנימית לצלע BK, אז הוא חייב לחתוך את אחת מהצלעות האחרות של המשולש.

- מדרך ההוכחה של משפט זה נובע כי ככל שמקטינים את p זווית α גדלה, וככל שמגדילים את p זווית α קטנה. (משום כך מסמנים את הזווית $\Pi(p)$, על-מנת להדגיש שגודל הזווית תלוי בגודל הקטע).

בגיאומטריה האוקלידית $\Pi(p)$ שווה תמיד לזווית ישרה, לכל p.

---

[76] נסמן ע"י p הן את הקטע p והן את האורך של p, ע"פ ההקשר.

[77] בנקודה זו קיים אי-דיוק מסוים, כיוון שעדיין קיימת אפשרות כי סכום הזוויות במשולשים הולך ויורד, אך הוא שואף ל-0, כפי שמתקבל לבסוף במשולש הגבולי שמגרעתו היא π. לובצ'בסקי איננו מתייחס לאפשרות הזו.

[78] כאן מסתמך לובצ'בסקי על תכונת הרציפות.

בגיאומטריה הדמיונית הזווית $\Pi(p)$ עוברת על כל הערכים בין 0 ל $\pi/2$, כאשר $\Pi(p)\to 0$ עבור $p\to\infty$ ו $\Pi(p)\to\pi/2$ עבור $p\to 0$. על מנת לתת לפונקציה $\Pi(p)$ ערך אנליטי כללי יותר, נגדיר את ערך הזווית $\Pi(p)$ עבור p שלילי כך שיקיים את המשוואה $\Pi(p)+\Pi(-p)=\pi$.

מכאן ניתן להרחיב את משפט 2.6 ולומר כי לכל $0<\alpha<\pi$ ניתן למצוא קטע p כך ש $\Pi(p)=\alpha$, כאשר עבור $\alpha<\pi/2$, p הוא מספר חיובי.

באופן דומה ניתן לראות כי לכל קטע $p>0$ קיימת זווית $0<\alpha<\pi/2$ כך ש $\Pi(p)=\alpha$.

- על-מנת להוכיח את המשפט הבא נעזר לובצ'בסקי במשפט הלקוח מהגיאומטריה הספרית. לפני שנביא את המשפט נגדיר תחילה מספר הגדרות הקשורות לגיאומטריה הספרית:[79]

מעגל ראשי המעגל הנוצר מחיתוך הספירה עם מישור העובר דרך מרכז הספירה.

ישר על ספירה הישר AB הוא המעגל הראשי העובר דרך הנקודות A ו B על הספירה.

נקודה נגדית לכל נקודה A על הספירה נגדיר נקודה נגדית ל A : הנקודה שנמצאת ממול ל A, בקצה השני של הקוטר המתקבל מהמשך הרדיוס AO, כאשר O הוא מרכז הספירה. נסמנה A'.

משולש ספרי זהו התחום על פני הספירה הנוצר כתוצאה מחיתוך שלושה ישרים על הספירה. הישרים הנחתכים יקראו צלעות המשולש , ונקודות החיתוך של הישרים על הספירה יקראו קדקודי המשולש.

משולש נגדי לכל משולש ABC נגדיר את המשולש הנגדי לו: משולש שקדקודיו הם הנקודות הנגדיות לקדקודי משולש ABC. כלומר: התחום הכלוא בין הישרים שנחתכים בנקודות A',B',C'.

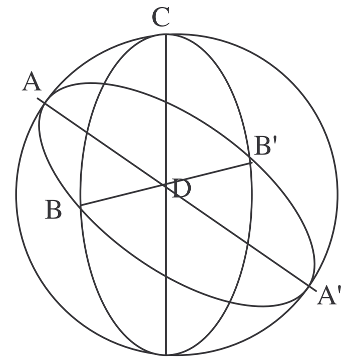
שוויון שטחים   שני תחומים נקראים שווי-שטח אם ניתן להפריד אותם למרכיבים חופפים בהתאמה.

זווית משטח (surface angle) זווית המשטח A היא הזווית הדו-מישורית (dihedreal angle)המתקבלת בנקודה A בין המישורים הנחתכים בנקודה זו .

משפט 2.7   זווית מרחבית תלת-צדדית (כלומר - בעלת שלוש פאות) שווה למחצית סכום שלוש זוויות המשטח,פחות זווית ישרה [7, עמ' 24].

[79] יש לציין כי לובצ'בסקי לא הגדיר את המונחים והגדלים שהשתמש בהם באופן מפורש אך מניתוח עבודתו נראה לי כי לכך הייתה כוונתו.

הוכחה נתון משולש ספירי ABC, נסמן את זוויותיו A,B,C. נאריך את הצלע AB כך שנקבל מעגל ראשי שמחלק את הספירה לשני חלקים שווים. נתבונן בחצי הספירה שמכיל את משולש ABC ונאריך את צלעות AC ו BC על חצי זה. מקבלים חלוקה של חצי הספירה לארבעה משולשים $ABC, ACB', B'CA', A'CB$ שגודלם יסומן P,X,Y,Z בהתאמה. מקבלים כי $P+X=B, P+Z=A$[80] וכן $P+Y=C$[81] וכיוון ש $\pi=P+X+Y+Z$[82] לכן $P=\frac{(A+B+C-\pi)}{2}$.

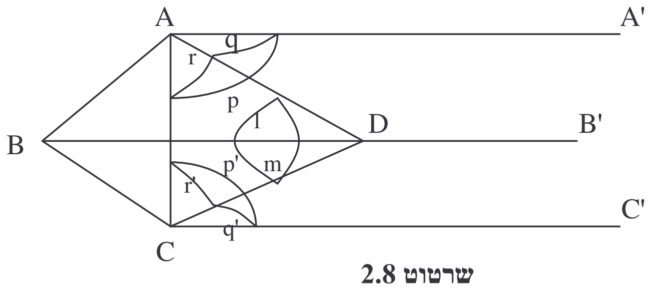


שרטוט 2.7

כעת ניתן להוכיח את המשפט שביקשנו ולהיעזר בתוצאה זו:

משפט 2.8 **אם שלושה מישורים נחתכים בשלושה ישרים מקבילים, ואם מגבילים כל מישור לחלק שבין המקבילים, אז הסכום של שלוש זוויות המשטח ששלושת מישורים אלו מגדירים, יהיה שווה ל π** [7, עמ' 28].

הוכחה נתונים שלושה מקבילים AA', BB', CC' בחיתוכי המישורים t,m,n. נבחר עליהם שלוש נקודות אקראיות A,B,C ונעביר דרכן מישור. כמו-כן נעביר מישור דרך AC ונקודה אקראית D על המקביל BB'. נסמן את הזוויות הדו-מישוריות בין המישורים t,m,n, הנמצאות בסמוך לישרים AA', BB', CC' על ידי X,Y,Z בהתאמה. מסביב לכל אחת מהנקודות A,C,D משרטטים ספירה, שחיתוכיה עם המישורים סביב אותה נקודה מגדירים משולש



שרטוט 2.8

---

[80]לובצ'בסקי מסמן על ידי A הן את קדקוד A והן את שטח העדשה אשר קדקודה ב-A, הכלוא בין הצלעות AB ו-AC מנקודה A ועד הנקודה הנגדית לה A'.

[81]זאת על פי משפט קודם כי משולשים נגדיים שווים בשטחם, ולכן Y מסמן את שטח המשולש $B'CA'$ וכן $BC'A$.

[82]לובצ'בסקי תופס זווית מרחבית מלאה כ- 2π, ולכן גודל הזווית המרחבית המתאימה לחצי כדור הוא π.

ספירי. את זוויות המשולשים הספריים מחשבים ע"פ הקשר שבין הזווית המרחבית של המשולש לזוויות המשטח (לפי משפט 2.7). מחישוב הזוויות של המשולש הספרי מסביב לנקודה D מקבלים כי כאשר הזווית בין מישור ACD ומישור $AA'CC'$ שואפת ל 0, ובאותו זמן גם צלעות המשולש הספרי שמסביב לנקודה D שואפות ל 0, אז מתקבל $X+Y+Z-\pi=0$ כלומר $X+Y+Z=\pi$.

- על פי זה אנו רואים כי במשולש הנוצר בין מישורים שנחתכים בישרים מקבילים, סכום הזוויות הדו-מישוריות הוא כפי שאנו רגילים בגיאומטריה האוקלידית.

לפני שנגדיר את המונחים הבאים ננסח תחילה שני משפטים נוספים:

משפט 2.9 האנכים האמצעיים לצלעות משולש ישר ABC נחתכים כולם בנקודה אחת, או שאינם נחתכים כלל [7, עמ' 29].[83]

מכאן כי אם נניח מראש ששני אנכים אמצעיים אינם נחתכים, אז גם האנך השלישי לא יחתוך אותם.

משפט 2.10 אם שני אנכים אמצעיים במשולש ישר ABC מקבילים זה לזה, אז גם האנך האמצעי השלישי מקביל אליהם [7, עמ' 29].

(ממשפט 2.9 ברור שהוא איננו חותך אותם, יש להוכיח כי הוא גם מקביל אליהם).

כמו במשפט 2.3 גם כאן נבחין בהוכחה בשני מקרים:

א) כאשר שני האנכים האמצעיים המקבילים נמצאים משני צדדי האנך האמצעי השלישי.

ב) כאשר שני המקבילים סמוכים זה לזה, והאנך האמצעי השלישי נמצא בצד.

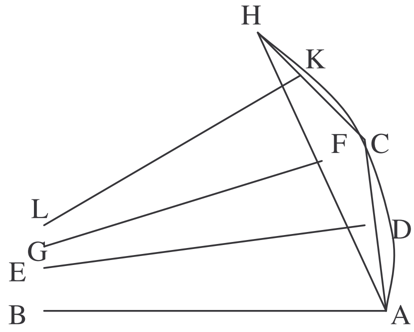
- לאחר שהקדמנו משפטים אלה, ניתן כעת לפנות ולהגדיר מושג חדש:

הגדרה 2.2 עקומה t במישור m תקרא קו גבול (boundary line או oricycle) אם כל האנכים האמצעיים למיתרים שלה מקבילים זה לזה [7, עמ' 30].

ניתן לקבל את קו הגבול ע"י בנייה שלו, נקודה אחר נקודה, באופן הבא:

[83] בגיאומטריה האוקלידית כל האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת.

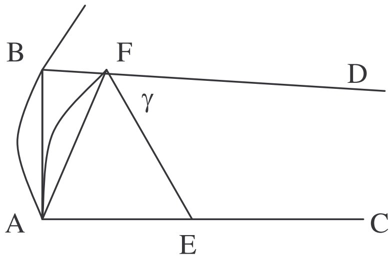
תהי A נקודה נתונה על ישר נתון AB במישור T (כל הבניות להלן הנן במישור T), לכל $0<\alpha<\pi/2$ נגדיר נקודה C באופן הבא:



נבנה זווית $0<\alpha<\pi/2$ שקדקודה הוא A, ואחת משוקיה מונחת על הקרן AB. נסמן את השוק השניה l_α. יהי x מספר ממשי שעבורו מתקיים $\Pi(x)=\alpha$. נקצה מנקודה A על l_α קטע באורך $2x$, קצה הקטע יסומן C. אוסף כל נקודות C שמוגדרות באופן הנ"ל הוא קו-הגבול (על-מנת להגדיר נקודות C גם בצד השני של AB יש לחזור על הבניה גם בצד זה). A יקרא קדקוד ו AB ציר של קו הגבול.

האנך DE שמעלים למיתר AC בנקודת האמצע D יהיה מקביל ל AB. באופן דומה - כל אנך FG שנעלה מנקודת האמצע של מיתר AH יהיה מקביל ל- AB, ולכן (ע"פ משפט 2.10) כל אנך אמצעי KL שנעלה מנקודת האמצע K של מיתר כלשהו CH של קו-הגבול יהיה גם-כן מקביל ל- AB. אנו רואים כי ל- AB אין תכונה מיוחדת שמייחדת אותו משאר האנכים האמצעיים, ולכן כל הישרים שמקבילים לציר של קו הגבול יכולים גם-כן להיבחר כצירים של קו הגבול.[84]

משפט 2.11 הגבול של מעגל שרדיוסו שואף לאינסוף, הוא קו-גבול [7, עמ' 31].



שרטוט 2.10

הוכחה בהינתן מיתר AB של קו-הגבול, מעבירים שני צירים BD,AC לקו הגבול משני קצות המיתר. על אחד הצירים (לדוגמא AC) בוחרים נקודה E שתשמש כמרכז המעגל ומשרטטים סביבה מעגל ברדיוס AE. המעגל יחתוך את הציר השני (BD) בנקודה F. נשרטט את הרדיוס EF ואת המיתר AF של המעגל. מקבלים כי זווית BAF בין שני המיתרים (AB של קו הגבול ו AF של המעגל) קטנה

[84] בגיאומטריה האוקלידית, כיוון ש- $\Pi(p)=\pi/2$ לכל p, קו הגבול הוא ישר l המאונך לכל הצירים שלו שמקבילים ביניהם.

מחצי הזווית שבין רדיוס המעגל - EF לציר השני (זווית $\angle EFD = \gamma$). אם נגדיל את הרדיוס, כלומר E מתרחק על הישר AC לאינסוף ו F מוגדרת באותו אופן, γ קטנה כרצוננו, ולכן הזווית בין שני המיתרים הולכת ושואפת ל 0 ו F על המעגל הולכת ושואפת ל B על קו הגבול. ניתן לכן לקרוא לקו הגבול מעגל עם רדיוס אינסופי. לאור זאת מכנה לובצ'בסקי את קו-הגבול גם בשם מעגל-גבול (limit circle).

הערה במאמרו Pangeometry קו הגבול איננו מוצג כפי שהוא מוגדר כאן. הוא פותח בהגדרה: מעגל גבול הוא מעגל עם רדיוס אינסופי, ולאחר מכן מופיע תיאור הבנייה הנ"ל כיצד לבנות את מעגל הגבול.כל נושא האנכים האמצעיים איננו מוזכר שם.

סיבוב קו הגבול מסביב לאחד הצירים שלו יוצר משטח שיקרא משטח-גבול (orisphere או boundary surface)[85] [86]. ציר זה יקרא ציר הסיבוב. ציר הסיבוב יחד עם כל שאר הצירים של קו הגבול, יהיה גם ציר של משטח הגבול.

משפט 2.12 לכל שתי נקודות A, B על משטח-הגבול המיתר AB יוצר זוויות שוות עם הצירים למשטח הגבול שמעלים משני קצותיו [7, עמ' 33]. [87]

דבר זה ברור מההגדרה אם אחד מהצירים הוא ציר הסיבוב, אך מההוכחה נובע כי זה נכון לכל שתי נקודות על משטח הגבול ולצירים שמעלים מהן. מכאן המסקנה היא כי אין תכונה מיוחדת בציר הסיבוב שבחרנו וכל אחד מהצירים יכול להיחשב כציר הסיבוב של משטח הגבול.

נגדיר מישור ראשי(principal plane): מישור שעובר דרך ציר של ספירת הגבול[88] (מישור זה יכול להכיל גם כמה צירים של ספירת הגבול).

החיתוך של ספירת הגבול עם מישור ראשי הוא מעגל גבול (כאשר אם המישור איננו ראשי, חיתוך זה הוא מעגל). החלק של המשטח של ספירת הגבול שמוגבל ע"י שלוש קשתות של מעגלי-גבול יקרא משולש-ספירת-גבול (limit sphere triangle) או משולש גבולי (boundary triangle). הקשתות של

[85] ב- Pangeometry משטח הגבול נקרא ספירת-גבול (limit sphere)-משטח שהוא הגבול שהספירה מתקרבת אליו אם הרדיוס גדל לאינסוף.
[86] בגיאומטריה האוקלידית משטח זה הוא מישור.
[87] בכך רומז לובצ'בסקי למונח "מקבילים שווי שוקיים" המופיע אצל בוליי, בפרק 3.
[88] ב—Pangeometry נקרא מישור זה מישור קוטרי (diametral plane) כיוון שהציר של ספירת הגבול משמש מעין "קוטר" של ספירת הגבול.

מעגלי הגבול ייקראו הצלעות, והזוויות הדו-מישוריות (dihedral angles) בין המישורים של קשתות אלו- הזוויות של המשולש.

נבחן כעת מהי הגיאומטריה המתקיימת על ספירת הגבול:

מכיוון שמשולש-ספירת-גבול נוצר מחיתוך של שלושה מישורים ראשיים, כשכל מישור מכיל קשת של מעגל-גבול שמשמשת כצלע של המשולש, ומכיוון שמישורים ראשיים חותכים זה את זה בישרים שמקבילים זה לזה, מכאן ע"פ משפט 2.8 סכום הזוויות במשולש ספירת-גבול הוא π. כלומר אם נחליף את הצלעות של משולש ישר במישור בקשתות של מעגלי גבול על ספירת הגבול נקבל כי כל תכונות הגיאומטריה האוקלידית מתקיימות במשולש שמתקבל. ומכאן כי גם כל הנוסחאות של הטריגונומטריה המישורית בגיאומטריה האוקלידית מתקיימות בפנגיאומטריה של משולש-ספירת-גבול.[89]

כך,לדוגמא, אם p,q,r צלעות של משולש ישר-זווית ספירי-גבולי, והזוויות שמול צלעות אלו הן $P,Q,\pi/2$ בהתאמה, ניתן להוכיח, כמו במשולש ישר בגיאומטריה האוקלידית, את המשוואות:

$$p = r\sin P = r\cos Q \qquad (2.1)$$

$$q = r\cos P = r\sin Q \qquad (2.2)$$

$$P + Q = \pi/2 \qquad (2.3)$$

נשים לב כי בספירה רגילה בעלת רדיוס סופי מתקיימת הגיאומטריה הספרית, שבה סכום הזוויות של משולש ספרי גדול מ π, אך כאשר רדיוס הספירה שואף לאינסוף אנו מקבלים את ספירת הגבול שבה מתקיימת הגיאומטריה האוקלידית, וסכום הזוויות של משולש ספירת גבול הוא π.

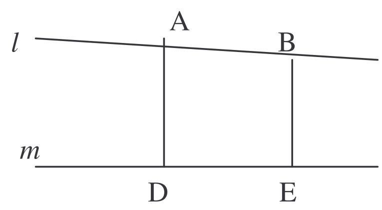
- בגיאומטריה האוקלידית אנו מוכיחים כי המרחק בין שני ישרים מקבילים הוא קבוע, נבחן כעת מהו המצב בגיאומטריה הדמיונית.

משפט 2.13 יהיו l ו m ישרים מקבילים, אזי ככל שמתרחקים בצד של המקבילות, המקבילים מתקרבים זה לזה [7, עמ' 21].

---

[89] בכך גילה לובצ'בסקי שוב את המשפט של Watcher שהגיאומטריה של מעגלי גבול על ההורוספירה זהה לגיאומטריה של קווים ישרים במישור האוקלידי.

- מנקודה $A \in l$ נוריד אנך AD ל m. נבחר נקודה $B \in l$ בצד של המקבילות הצד שבו נמצאת זווית ההקבלה $\Pi(AD)$, אזי, אם נוריד מ B אנך BE לישר m נקבל כי $BE < AD$, ומכאן ע"פ משפט 2.6 $\Pi(BE) > \Pi(AD)$.



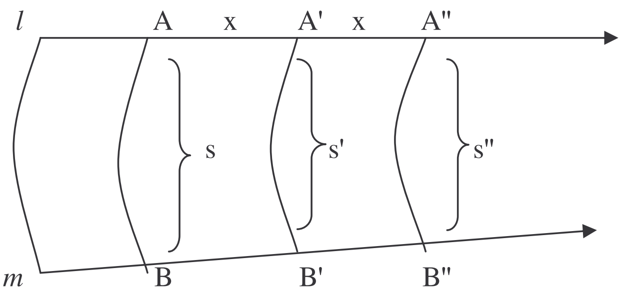
ככל ש B הולך ומתרחק מ A על ישר l, המרחק בין המקבילים הולך וקטן. נראה כי עבור $B \to \infty$ המרחק בין המקבילים הולך ושואף ל 0, כלומר ישרים מקבילים מתנהגים כאסימפטוטות:

שרטוט 2.11

נגדיר קשת-גבול: קשת של קו-גבול.

משפט 2.14 יהיו l ו m שני ישרים מקבילים המשמשים כצירים לשני מעגלי גבול של שתי קשתות גבול s ו s' כאשר כיוון ההקבלה הוא מ s ל s'. אורך הציר בין s ל s' יסומן x, אזי $s' = s \cdot E^{-x}$ כאשר E איננו תלוי באורך של הקשתות s ו s', ובקטע x [7, עמ' 32].

הוכחה [90] נתבונן בטור של קשתות גבול $s, s', s''...$ שנמצאות בין שני המקבילים l ו m המשמשים



כצירים לכל קשתות הגבול, ונניח כי אורך הקטעים של קווים מקבילים אלו בין שתי קשתות רצופות שווה תמיד ל x. נסמן ע"י E את היחס שבין s ל s' [91] עבור x ששווה ל 1 כאשר $E > 1$ (כיוון שהמרחק בין המקבילים קטן בכיוון המקבילות). מקבלים כי

$$\frac{s}{s'} = \frac{s'}{s''} = \frac{s''}{s'''} = ... = E \qquad (2.4)$$

ומכאן קל לראות כי $s' = sE^{-x}$.

---

[90] הוכחה זו מופיעה בפירוט במאמר Pangeometry (באנגלית מובא חלק זה מתוך התרגום הגרמני של המאמר), והיא שונה מעט מההוכחה המובאת במאמר "The Theory of parallels".

[91] לובצ'בסקי מסמן ע"י s הן את הקשת s והן את האורך של s, ולכן היחס שהוא מגדיר בין הקשתות, הוא בעצם, היחס שבין אורכי הקשתות.

חשוב לשים לב כי היחס E איננו תלוי באורך של קשת s, ונשאר קבוע אם l ו m מתרחקים או מתקרבים זה לזה. המספר E, שיכול להיות כל מספר (משועבד לתנאי ש $E>1$), תלוי רק ביחידת האורך שבה נמדד המרחק בין שתי קשתות רצופות, שהוא שרירותי לחלוטין, ולכן לשם פישוט החישוב נבחר את יחידת האורך כך ש E ישמש כבסיס ללוגריתם הטבעי, כלומר $E=e=2.71828...$.

הערה ממה שהוכחנו רואים כי עבור $x\to\infty$ $s'\to 0$ לפיכך המרחק בין שני מקבילים, לא רק שקטן בכיוון המקבילות, אלא שע"י הארכת המקבילים בכיוון זה הוא לבסוף נעלם, ולכן ישרים מקבילים מתנהגים כאסימפטוטות. תכונה זו שהוכחנו ביחס לקשתות $s,s',s''...$ מתאימה גם לשטחים $P,P',P''...$ שמוגבלים ע"י שתי קשתות רצופות של קווי-גבול ושני המקבילים. באותו אופן מקבלים כי $P'=PE^{-x}$.

אם נחבר n שטחים כאלו $P,P',P''...P^{n-1}$ הסכום יהיה

$$P\frac{1-E^{-nx}}{1-E^{-x}} \tag{2.5}$$

(ע"פ טור הנדסי). עבור $n\to\infty$ ביטוי זה ייתן לנו את השטח של החלק של המישור המוגבל בין שני ישרים מקבילים המשמשים כצירים של קו גבול, ומוגבל בצד אחד ע"י הקשת s של קו-הגבול ואיננו מוגבל בצד של המקבילות. ערך זה יהיה שווה ל:

$$\frac{P}{1-E^{-x}} \tag{2.6}$$

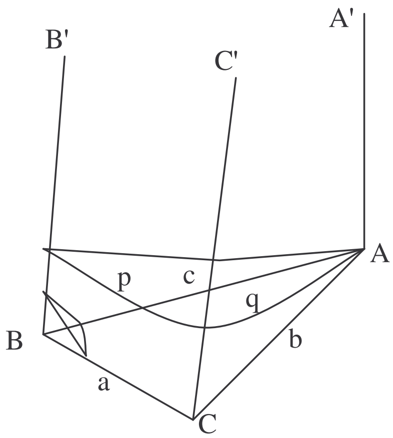
בגיאומטריה האוקלידית הקשתות $s,s',s''...$ הן ישרים שמאונכים למקבילים, היחס שמצוין ע"י E הוא קבוע ושווה ליחידה, ומכאן משמעות מה שהוכחנו בגיאומטריה האוקלידית היא כי שני קווים מקבילים שומרים תמיד על מרחק שווה, והשטח של המישור שנמצא בין שני ישרים מקבילים ומוגבל בצד אחד ע"י אנך המשותף להם ובצד השני איננו מוגבל הוא אינסופי.

לאחר שבירנו מהי הגיאומטריה והטריגונומטריה המתקיימות על ספירת הגבול, נפנה כעת לבחון מהי הטריגונומטריה המישורית המתקיימת בגיאומטריה הדמיונית לגבי משולשים ישרים, וכן מהי

הטריגונומטריה הספרית, ומהו היחס בינן לבין הטריגונומטריה (המישורית והספרית) של הגיאומטריה האוקלידית. הנושא שנבחן ראשון הוא הטריגונומטריה הספרית.

סימון אם $\Pi(x)$ הוא גודל נתון $0<\Pi(x)<\pi/2$, נסמן ב x' את הקטע המקיים

$$\Pi(x')=\pi/2-\Pi(x) \tag{2.7}$$



שרטוט 2.13

- נתבונן במשולש ישר ישר-זווית במישור m שצלעותיו a,b,c והזווית שמולן הן $A,B,\pi/2$ בהתאמה. כיוון שבגיאומטריה הדמיונית סכום הזוויות במשולש הוא פחות מ π, לכן זוויות A ו B הן ודאי זוויות חדות. ע"פ משפט 2.6 קיימים $\alpha,\beta>0$ כך ש $B=\Pi(\beta), A=\Pi(\alpha)$. נעלה מנקודה A אנך AA' למישור m. נעביר דרך אנך זה שני מישורים: m_b - מישור שעבורו מתקיים $AA'\in m_b$ וכן $b\in m_b$. ו m_c - מישור שעבורו מתקיים $AA'\in m_c$ וכן $c\in m_c$.

במישור m_c נעביר דרך B מקביל BB' ל AA'. נעביר מישור נוסף m_a כך שעבורו מתקיים $BB'\in m_a$ וכן $a\in m_a$. m_a חותך את m_b בישר CC' שמקביל ל AA' (ע"פ משפט 2.3). סביב נקודה B כמרכז נשרטט ספירה עם רדיוס שרירותי הקטן מ a. חיתוך הספירה עם שלושת המישורים העוברים דרך B ייצור משולש ספרי ישר-זווית אשר צלעותיו הן $\Pi(\beta),\Pi(c),\Pi(a)$ והזוויות שמול הצלעות הן $\Pi(\alpha'),\Pi(b),\pi/2$ בהתאמה[92]. נאמר כי למשולש הישר עם נתונים a,b,c,α,β מתאים משולש ספרי עם נתונים β,c,a,α',b. למשולש ספרי זה מתאים באופן דומה (אם נחליף את תפקידי הניצבים במשולש הספרי) משולש ישר נוסף עם צלעות a,α',β והזוויות שמולן $\Pi(b'),\Pi(c),\pi/2$ בהתאמה. לסיכום, נאמר כי למשולש הישר עם נתונים a,b,c,α,β מתאים משולש ישר נוסף עם נתונים a,α',β,b',c.

[92] אורך צלע מוגדר כגודל הזווית המרכזית הנמצאת מולה. הזוויות במשולש הספרי נמדדות לפי הזוויות שבין המישורים.

נבנה ספירת-גבול כך ש A הוא קדקוד בספירת הגבול, והאנך AA' למישור m משמש כציר שלה. המישורים $m_{a,}m_b,m_c$ הם מישורים ראשיים. חיתוך ספירת הגבול עם המישורים הנ"ל יוצר משולש ספירת-גבול שצלעותיו יסומנו p,q,r - חיתוך ספירת הגבול עם מישורים m_a,m_b,m_c בהתאמה. הזוויות מול אותן צלעות יהיו $\Pi(\alpha),\Pi(\alpha'),\pi/2$ בהתאמה. כיוון שהגיאומטריה במשולש ספירת גבול היא כמו הגיאומטריה האוקלידית לכן סכום הזוויות במשולש הוא π, וכן ניתן להשתמש עבור המשולש בנוסחאות הרגילות עבור sin ו cos:

$$\begin{aligned} p &= r\sin\Pi(\alpha) \\ q &= r\cos\Pi(\alpha) \end{aligned} \tag{2.8}$$

על ידי שימוש במשפטים קודמים, החלפת אותיות ע"פ המשולשים המתאימים שבנינו, והצבה בנוסחאות טריגונומטריות שונות[93] מגיעים למספר נוסחאות, כאשר: אם נחליף במשולש הספרי המתאים למשולש הישר עם הנתונים a,b,c,α,β את הצלעות $\Pi(c),\Pi(\beta),\Pi(a)$ והזוויות $\Pi(b),\Pi(\alpha'),\pi/2$ בסימון הצלעות a,b,c והזוויות שמולן $A,B,\pi/2$ בהתאמה, נקבל את הנוסחאות הבאות:

$$\sin a = \sin c \cdot \sin A \tag{2.9}$$

$$\sin b = \sin c \cdot \sin B \tag{2.10}$$

$$\cos A = \cos a \cdot \sin B \tag{2.11}$$

$$\cos B = \cos b \cdot \sin A \tag{2.12}$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \tag{2.13}$$

נוסחאות אלו ידועות כנכונות בטריגונומטריה הספרית עבור משולשים ישרי-זווית (כאשר הזווית הישרה היא C), ומהם ניתן לעבור לכל המשולשים הספירים באופן כללי. כלומר הטריגונומטריה הספרית נכונה באופן אבסולוטי והיא איננה תלויה בעובדה אם במשולש ישר סכום הזוויות הוא π, או פחות מ π.

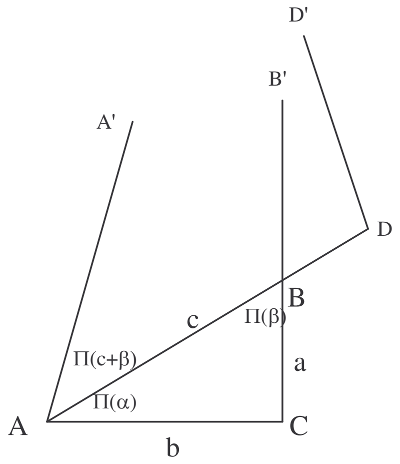
מסקנה הטריגונומטריה הספרית בגיאומטריה הדמיונית, זהה לטריגונומטריה הספרית בגיאומטריה האוקלידית.

נראה כי עובדה זו שימשה ללובצ'בסקי רמז לכך כי הגיאומטריה הדמיונית אמנם אפשרית.

- נחקור כעת את התנהגות הפונקציה $\Pi(x)$ עבור קטע x כלשהו.

[93] ליתר פירוט והרחבה ראה [7, עמ' 35-38].

כמו בסעיף הקודם נתבונן במשולש ישר ישר-זווית במישור m שצלעותיו a,b,c והזווית שמולן הן $\Pi(\alpha),\Pi(\beta),\pi/2$ בהתאמה. נאריך את היתר ונוסיף קטע באורך β מעבר לקדקוד המתאים לזווית $\Pi(\beta)$. מסוף קטע זה נעלה אנך DD' ונעביר לו מאותו צד של הישר מקביל AA' מהקדקוד של זווית $\Pi(\alpha)$. המשך צלע a מעבר לקדקוד $\Pi(\beta)$ (BB') גם-כן מקביל לישר זה. מקבלים



שרטוט 2.14

$$\Pi(b)=\Pi(\alpha)+\Pi(c+\beta) \qquad (2.14)$$

אם נשרטט את הקטע β על היתר בתוך המשולש, אז בכל מקרה ($c<\beta$ או $c=\beta, c>\beta$) מקבלים

$$\Pi(\alpha)+\Pi(b)=\Pi(c-\beta) \qquad (2.15)$$

ע"י חיבור שתי המשוואות והצבה בנוסחה מהסעיף הקודם מתקבלת הנוסחה הטריגונומטרית הבאה

$$[\tan 1/2\,\Pi(c)]^2=\tan 1/2\,\Pi(c-\beta)\cdot\tan 1/2\,\Pi(c+\beta) \qquad (2.16)$$

היות וזווית $\Pi(\beta)$ בצדו האחד של c יכולה להיבחר כרצוננו בין 0 ל $\pi/2$ מכאן ש β הוא מספר שרירותי בין 0 ל ∞. נבחר $\beta=c,2c,3c,4c...$ ונקבל כי לכל קטע c ולכל n חיובי ושלם

$$[\tan 1/2\,\Pi(c)]^n=\tan 1/2\,\Pi(nc) \qquad (2.17)$$

ניתן להוכיח בקלות כי משוואה זו נכונה גם עבור n שלילי או שבר. יהי n היחס שבין שני קטעים באורך x ו c, אם נניח כי

$$\cot 1/2\,\Pi(c)=a^c \qquad (2.18)$$

נקבל כי לכל ערך של x, חיובי או שלילי,

$$\tan 1/2\,\Pi(x)=a^{-x} \qquad (2.19)$$

כאשר a הוא מספר שרירותי, אך מכיוון שידוע כי $\Pi(x) \to 0$ עבור $x \to \infty$, לכן a הוא מספר גדול מהיחידה. היות והיחידות שבהן הקטעים נמדדים הן שרירותיות, לכן ניתן לבחור יחידת אורך שעבורה a הוא e הבסיס של הלוגריתם הטבעי.[94]

נוסחה זו מקיימת את מה שכבר הוכחנו:

(2.20) עבור $x \to 0$ $\quad \Pi(x) \to \pi/2$

(2.21) עבור $x \to \infty$ $\quad \Pi(x) \to 0$

(2.22) עבור $x \to -\infty$ $\quad \Pi(x) \to \pi$

הנושא האחרון אשר אותו חוקר לובצ'בסקי במאמרו "The Theory of parallels " הוא: מהי הטריגונומטריה המישורית המתקיימת בגיאומטריה הדמיונית?

הערה במאמר Pangeometry אשר עמד לפני ([8, עמ' 374 360]) הוא איננו חוקר נקודה אחרונה זו. בהערה לקראת סוף Pangeometry הוא כותב: ..." לפני שנוכיח את המשוואות שמבטאות בפנגיאומטריה את היחסים שבין הצלעות והזוויות של כל משולש ישר, נחפש לכל x את צורת הפונקציה שסימנו עד עתה ע"י $\Pi(x)$ "... אך לאחר נושא זה הוא לא ממשיך. לאור הערה זו, וכן לאור העובדה כי המאמר Pangeometry הוא סיכום של כל עבודתו בנושא, והוא כולל בקצרה כל מה שהופיע במאמר "The Theory of parallels " לכן אני מניחה כי המאמר אשר הופיע במקור שלפני, הוא קטוע ולא הובא בשלמותו[95].

- אם נתבונן במשולש מישורי כלשהו עם צלעות a,b,c וזוויות A,B,C בהתאמה, ונוריד אנך לצלע c נקבל משולש/ שני משולשים ישרי-זווית. עבור משולשים אלו ניתן להשתמש בנוסחאות שקיבלנו לעיל עבור משולשים ישרים ישרי זווית [ניתן לבדוק ולראות כי נוסחאות אלו מתקיימות בכל מקרה: אם האנך נופל בתוך המשולש/ על אחת מצלעות המשולש/ מחוץ למשולש]. נשתמש במשפטים נוספים שקיבלנו בסעיפים הקודמים ובעזרת הצבות רבות ופיתוח המשוואות נקבל עוד נוסחאות טריגונומטריות רבות[96].

[94] לובצ'בסקי כבר השתמש בטכניקה זו, של בחירת יחידת האורך, בהוכחה של משפט 2.14. יש לבדוק כי הבחירה כאן זהה עם הבחירה שכבר ביצענו, במשפט 2.14.
[95] השערה זו נתמכת גם על ידי העובדה כי ב[4, עמ' 94] מופיע ציטוט מתוך התרגום האיטלקי או הגרמני של Pangeometry אשר איננו מופיע בתרגום האנגלי שלפני.
[96] ליתר פירוט והרחבה ראה [7, עמ' 41-44].

בסופו של דבר מגיעים לארבע נוסחאות חשובות בדבר הקשר והתלות ההדדית שבין הצלעות a,b,c והזוויות שממולן A,B,C בהתאמה, המתקיימות בכל משולש ישר :

$$\sin A \tan \Pi(a) = \sin B \tan \Pi(b) \tag{2.23}$$

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1 \tag{2.24}$$

$$\cot A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} \tag{2.25}$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)} \tag{2.26}$$

הערה[97] נשים לב כי נוסחה (2.24) דומה מאד לנוסחה שאליה הגיע Taurinus

$$\cosh \frac{a}{k} = \cosh \frac{b}{k} \cosh \frac{c}{k} - \sinh \frac{b}{k} \sinh \frac{c}{k} \cos A \tag{2.27}$$ [98]

ניתן לעבור מהנוסחה של טארינוס לזו של לובצ'בסקי ע"י שימוש בנוסחה אחרת של טארינוס

$$\cosh \frac{a}{k} = \frac{1}{\sin B} \tag{2.28}$$

כאשר נציב במקום B $\Pi(a)$. המעבר ההפוך יתאפשר ע"י שימוש בנוסחה (2.19) של לובצ'בסקי. נוסחה זו זהה לנוסחה (2.28) של טארינוס, רק בצורה אחרת. בנוסחה (2.19) a הוא מספר שרירותי שמייצג את היחס הקבוע שבין שתי קשתות גבול המוגבלות ע"י שני צירים, כאשר המרחק בין הקשתות משמש כיחידת האורך. לובצ'בסקי בוחר יחידת אורך נוחה כך ש a יהיה שווה ל e - הבסיס של הלוגריתם הטבעי. אם נרצה להתאים את התוצאה של לובצ'בסקי לגיאומטריה הלוגריתמית-ספרית של טארינוס, או לגיאומטריה הלא-אוקלידית של גאוס, ניקח $a = e^{\frac{1}{k}}$. במקרה זה נקבל מנוסחה (2.19)

$$\tan 1/2\Pi(x) = e^{\frac{-x}{k}} \tag{2.29}$$

נוסחה שהיא זהה לנוסחה (2.28) של טארינוס כאשר $a = x$ ו $B = \Pi(x)$. כפי שראינו לעיל, תוצאה זו מעבירה באופן ישיר את הנוסחה של לובצ'בסקי לזו של טארינוס.

[97] ע"פ [4, עמ' 89-90].
[98] משפט 1.26.

מסקנה   הגיאומטריה הלוגריתמית-ספירית (Logarithmic-spherical geometry) של טארינוס זהה לגיאומטריה הדמיונית של לובצ'בסקי.[99]

- עבור צלעות a,b,c ששואפות ל 0 ניתן להשתמש עבור צלע a בקירובים

$$\cot\Pi(a) = a \tag{2.30}$$

$$\sin\Pi(a) = 1 - \frac{a^2}{2} \tag{2.31}$$

$$\cos\Pi(a) = a \tag{2.32}$$

ובאופן דומה עבור צלעות b ו c.

מהצבת ערכים אלה בנוסחאות (2.23)-(2.26) נקבל

$$b\sin A = a\sin B \tag{2.33}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \tag{2.34}$$

$$a\sin(A+C) = b\sin A \tag{2.35}$$

$$\cos A + \cos(B+C) = 0 \tag{2.36}$$

שתי המשוואות הראשונות ידועות מהגיאומטריה האוקלידית כמשפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים. שתי האחרונות מובילות בעזרת המשוואה הראשונה למסקנה כי $A+B+C=\pi$.

מסקנה   כאשר הצלעות של משולש ABC שואפות ל 0, הגיאומטריה הדמיונית עוברת לגיאומטריה האוקלידית. כלומר למרות שבבסיס כל גיאומטריה עומדות הנחות שונות בדבר סכום הזוויות במשולש מישורי, קיים הבדל בין שתי הגיאומטריות רק עבור משולשים עם צלעות "גדולות מספיק".[100]

נציב במקום הצלעות a,b,c את הערכים הדמיוניים ia,ib,ic $(i=\sqrt{-1})$, ונשתמש עבור צלע a בקירובים –

[99] דרך נוספת להוכיח את העובדה הזו היא: אם נציב את הערכים $k=1, C=0, B=\pi/2, A=\Pi(C)$ בנוסחה של טארינוס $\cos C = \sin A\sin B\cosh(C/k) - \cos A\cos B$ אזי נקבל את התוצאה של לובצ'בסקי $\Pi(c) = 2\arctan e^{-c} = arc\cot(\sinh c) = \arccos(\tanh c)$ בצורה של $\sin\Pi(c)\cosh c = 1$.

[100] ולהפך- מניתוח תורתו של גאוס מתברר כי ההנחה שהגיאומטריה האוקלידית תקפה עבור ערכים קטנים מאד, יכולה להילקח כנקודת ההתחלה של פיתוח הגיאומטריה הלא-אוקלידית (ע"פ הערה ב-[4, עמ' 91]).

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos(a)} \tag{2.37}$$

$$\cos \Pi(a) = i \cdot \tan a \tag{2.38}$$

$$\tan \Pi(a) = \frac{1}{\sin a \cdot i} \tag{2.39}$$

ובאופן דומה עבור הצלעות b ו c. מהצבת ערכים אלו בנוסחאות הנ"ל נקבל

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a \tag{2.40}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{2.41}$$

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \cot a \tag{2.42}$$

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C \tag{2.43}$$

משוואות אלו ידועות כנכונות עבור משולשים ספיריים.

מסקנה הטריגונומטריה הדמיונית עוברת לטריגונומטריה הספרית אם הצלעות מקבלות ערכים דמיוניים.[101]

נראה כי כל העובדות הנ"ל של קיום הגיאומטריה והטריגונומטריה האוקלידית על ספירת הגבול, העובדה כי הטריגונומטריה הספרית מתקיימת באופן אבסולוטי גם בגיאומטריה האוקלידית וגם בגיאומטריה הדמיונית, והמעבר המהיר מהטריגונומטריה המישורית של הגיאומטריה הדמיונית לטריגונומטריה המישורית האוקלידית ולטריגונומטריה הספרית, כל אלו שימשו עבור לובצ'בסקי הוכחה כי הגיאומטריה הדמיונית עקבית כמו הגיאומטריה האוקלידית.

בסיום עבודתו מציין לובצ'בסקי כי העובדה שמצא דרך לחישוב אורך עקומות, וכן שטח ונפח גופים[102], מוכיחה כי הגיאומטריה הדמיונית היא מערכת גיאומטרית שלמה. מנוסחאות היסוד של הטריגונומטריה הדמיונית ניתן לראות כי הפנגיאומטריה היא ענף באנליזה, הניתן להרחבה לכל השיטות האנליטיות המקובלות בגיאומטריה האוקלידית. נוסחאות היסוד בטריגונומטריה זו אינן מסתמכות על ההנחה כי סכום הזוויות במשולש הוא π, ומכאן כי הן משמשות בסיס למערכת גיאומטרית כללית.

[101] לתוצאה זו ניתן להגיע גם בשיטתו של טארינוס לפיתוח גיאומטריה לוגריתמית-ספירית (ע"פ [4, עמ' 94]). כמו-כן גם למברט הגיע אליה בעבודתו.

[102] בעבודות אחרות שלו מפתח לובצ'בסקי הרבה מאד את החישובים האנליטיים בגיאומטריה הדמיונית.

[103]ע"מ לנסות לגלות מהי "הגיאומטריה הנכונה" יש ליישם את הגיאומטריה החדשה למקרה מעשי וכך לקבל יותר מידע על אופיו של k שנמצא באופן מרומז בנוסחאות של לובצ'בסקי ובאופן מפורש בנוסחאות של טארינוס. לצורך כך חקר לובצ'בסקי משולש ABC שצלעו BC (a) שווה לרדיוס של מסלול כדור-הארץ ו A הוא כוכב קבוע שכיוונו מאונך ל BC. ממדידות וחישובים שונים הוא הגיע למסקנה כי k גדול ממיליון פעמים הקוטר של מסלול כדור-הארץ. מכאן, כי אם הגיאומטריה האוקלידית נכונה והאקסיומה החמישית מתקיימת במרחב ממשי, k חייב להיות מספר ששואף לאינסוף ולכן חייבים להיות כוכבים שזווית ההקבלה שלהם שואפת ל 0 אך מכיוון שתצפיות אסטרונומיות נכונות תמיד רק בגבול מסוים לעולם לא נוכל לקבוע האם זהו אמנם המצב או לא. היות וידוע גודלו העצום של k ביחס למדידת אורכים, המסקנה היא כי ההשערות האוקלידיות תקיפות לכל מטרה שימושית.

נגיע לאותה מסקנה אם נתייחס לשאלה של סכום הזוויות במשולש. התוצאות של תצפיות אסטרונומיות מראות כי המגרעת של משולש [104] שצלעותיו שואפות למרחק שבין כדור-הארץ לשמש איננה יכולה להיות יותר מ 0.0003 . אם נחשוב כעת על משולש שמשורטט על פני כדור הארץ ולא משולש אסטרונומי, בהסתמך על המשפט כי שטח משולש פרופורציונאלי למגרעת שלו, המגרעת האפשרית תיפול בתוך גבולות טעות המדידה. ולכן, ניתן להחשיב את המגרעת כ 0 בחישובים מעשיים, ולהניח את האקסיומות של אוקלידס לצורכי כל ניסיון ממשי.

---

[103]ע"פ [4, עמ' 94-96].

[104] המגרעת היא ההפרש שבין סכום הזוויות במשולש ל- π, כלומר- $\pi-(A+B+C)$.

*"I have created a new universe from nothing. All that I have sent you till now is but a house of cards compared to the tower... " (*János Bolyai in a letter to his father, 1823)

פרק 3 עבודתו של בוליי

3.1 רקע היסטורי[105]

János Bolyai (1860-1802) נולד ב Kolozsvár שבהונגריה . הוא למד מתמטיקה מילדות אצל אביו, Farkas Bolyai (1775-1856) פרופסור למתמטיקה ב Maros Vasarhelyini, וחבר קרוב לגאוס מתקופת לימודיו ב Goettingen (1796-1799). בתקופה שבה למד בוליי בוינה באקדמיה המלכותית להנדסה (1817-1822), העסיקה אותו מאד אקסיומת המקבילים. באותה תקופה היה חבר קרוב ל Carl Szász ונראה כי הזרעים לרעיונות שהנחו אותו בכתיבת מאמרו נזרעו בדיונים בנושא שבין שני הסטודנטים. היה זה רעיונו של Szász להגדיר את המקביל כפי שמגדיר אותו בוליי בתחילת עבודתו (ראה סעיף 3.2), וכן רעיונות נוספים עלו משיחותיהם המשותפות כמו: קו הנמצא במרחק שווה מישר נתון, או הרעיון המרכזי של עקומה גבולית מסוימת, אשר אם נצליח להוכיח כי היא קו ישר, הרי שנצליח מכך להוכיח את אקסיומת המקבילים. ב 1821 עזב Szász את וינה,ובוליי המשיך במחקרו לבדו. עד 1820 ניסה עדיין בוליי להוכיח את אקסיומת המקבילים, בדרך דומה לזו שפעלו בה לפניו סקרי ולמברט, וממכתביו לאביו נראה כי חשב שהצליח במטרה זו. ההכרה בטעויות שעשה, הובילה לשינוי במחשבתו והוא שינה את כיוון עבודתו והחל לבנות גיאומטריה אבסולוטית של המרחב, כאשר הוא פועל בשיטה הדדוקטיבית, ללא הנחה מוקדמת על נכונותה של אקסיומת המקבילים. כפי שהוא מעיד על עצמו, בתחילת 1823 הצליח לחדור לעומק הבעיה והגיע כבר לרעיונות המרכזיים של עבודתו, ומה שהוסיף לאחר מכן היו רק השלמות לנושא וביטוי פורמלי של הדברים. ב 3.11.1823 כתב מכתב לאביו ובו נאמר בין השאר:..."אני מתכוון לפרסם עבודה בנושא המקבילים, ברגע שאגמור לסדר את הדברים, וכאשר הנסיבות יאפשרו זאת. עדיין לא סיימתי את העבודה אך הדרך שבה הלכתי מובילה באופן כמעט ודאי להשגת המטרה, אם הדבר אמנם אפשרי. המטרה עדיין לא הושגה אך גיליתי עד עכשיו דברים נפלאים כל-כך, עד שאני בעצמי נדהם מהם. יהיה בכך נזק גדול מאד אם דברים אלה יאבדו. כאשר תראה אותם תבין זאת בעצמך. כרגע אינני יכול לומר יותר, רק אומר לך כי מ"כלום" ייצרתי עולם חדש שלם ! כל

[105] הסקירה הבאה מתבססת על הקדמתו של G. Bruce Halsted לתרגומו של המאמר של בוליי , כפי שהיא מופיעה ב- [2, עמ' III-XXX] וכן סקירתו של R. Bonola ב-[4, עמ' 96-101].

הדברים שכתבתי לך עד עתה הם כמו בית של קלפים בהשוואה לטירה... אני בטוח שהדבר יביא לי הרבה כבוד, אם אסיים כבר את התגלית..."

בתגובה למכתב זה ענה לו אביו כי אם אמנם הצליח לפתור את הבעיה, כדאי שלא יתעכב הרבה ויפרסם את הדברים, וזאת משתי סיבות: "ראשית - רעיונות עוברים בקלות רבה מאחד לשני, ויכולים להקדים אותך בפרסום הדברים, ושנית - קיימת אמת מסוימת בעובדה כי דברים רבים מתגלים באותו זמן במספר מקומות, כפי שסיגליות צצות בכל פינה באביב..."

ב 1825 שלח בוליי תקציר של מחקרו לאביו וכן למורה שלו - Johann Walter Von Eckwher .

ב 1829 שלח לאביו את כתב היד המלא, ובעידודו הוא תירגם את עבודתו ללטינית, והם החליטו לפרסמה כנספח לכרך הראשון של עבודתו של האב בשם Tentamen , אשר יצא לאור ב 1832. הנספח כולל עמוד כותרת בשם " The Science of Absolute Space ". מתחת לכותרת נכתב: Independent of the truth or falsity of Euclid`s Axiom XI (which can never be decided a priori).

ואחריו 24 עמודים שבהם מופיע גוף המאמר .(..."24 העמודים יוצאי הדופן, בכל תולדות ההיסטוריה של המחשבה"... כפי שמעיר Halsted בהקדמתו).הוא פורסם בלטינית ותורגם מאוחר יותר לצרפתית, איטלקית, גרמנית ואנגלית.

העבודה נשלחה לראשונה לגאוס ב 1831 אך לא זכתה לתשומת ליבו, וב 1832 היא נשלחה אליו בפעם שניה. במכתב תשובה לאביו של בוליי כותב גאוס כי הוא איננו יכול לשבח את עבודתו של בנו מכיוון שאם יעשה זאת , ישבח את עצמו...הוא טוען כי עבודתו של בוליי, הדרך שבה פעל, והתוצאות שאליהן הגיע תואמות באופן כמעט מלא את מחשבותיו בנושא ב 35 שנה האחרונות. גאוס מציין כי כוונתו הייתה שלא לפרסם את הדברים במהלך חייו, היות וקיימים מעט מאד אנשים שיתייחסו בעניין הראוי לנושא. עם זאת הוא חשב לכתוב את הדברים, על מנת שהרעיונות לא ימותו ביחד אתו...

הנספח זכה ליחס המגיע לו לאחר 35 שנה של שכחה, ע"י פרופסור R. Baltzer מדרזדן. הוא פרסם ב 1866 תרגום של תיאוריית המקבילים של לובצ'בסקי, והיסב את תשומת הלב לעבודתו של בוליי. מאוחר יותר פרסם פרופסור J. Hoüel מבורדו, חוברת שבה מופיעה תמצית הספר של בוליי (האב והבן),ועזר בכך להפצת הרעיונות בקרב אנשי המדע.

3.2 תורת המרחב האבסולוטי

הניתוח הבא מתבסס על מאמרו של בוליי "The Science of Absolute Space" ע"פ שני תרגומים שלו לאנגלית:

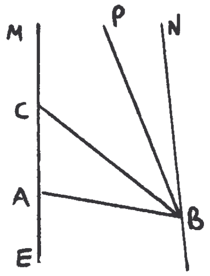
- התרגום של George Bruce Halsted [2, עמ' 1-48].
- התרגום של Henry p. Manning [3, עמ' 375-389].

3.2.1 סקירה כללית

בבואנו לדון מהן הנחות היסוד שעליהן מסתמך בוליי, יש לשים לב כי בוליי בעצמו איננו מציין על מה הוא מסתמך כבסיס לעבודתו, ופעמים רבות איננו נותן גם הגדרות מדויקות למונחים שבהם הוא משתמש, וקריאת עבודתו מחייבת אותנו לנסות להבין מה עמד לנגד עיניו כאשר כתב את המאמר.

- בבסיס עבודתו נראה כי בוליי מניח את ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס וממילא את 28 המשפטים שנובעים מהם ללא שימוש באקסיומת המקבילים. במקומות שונים במאמרו הוא מסתמך באופן לא מודע על האקסיומות אשר פותחו כ 60 שנה מאוחר יותר ע"י הילברט כאשר הוא משתמש במושגים שונים שאותם הוא לא מנסה כלל להגדיר או להוכיח, כגון: השימוש במושג אורך קו, חפיפת קטעים, מושג הרציפות, צד של ישר, ועוד...

הוא נעזר, הן בהגדרת המקביל והן במספר משפטים נוספים אותם נציין בתיאור המפורט יותר של המאמר המופיע בסעיף 3.2.2., באקסיומת פש ובמשפטים הנובעים ממנה מבלי לציין זאת, וקרוב לוודאי מבלי שירגיש בכך.



שרטוט 3.1

המושג הבסיסי שממנו יוצא בוליי הוא כמובן מושג המקביל:

הגדרה במישור נתון T, הקרן $\overrightarrow{BN}$ <u>מקבילה</u> לקרן $\overrightarrow{AM}$, אם היא איננה חותכת את $\overrightarrow{AM}$ אך כל קרן אחרת $\overrightarrow{BP}$ בתוך $\angle ABN$ כן חותכת אותה. נסמן $BN||AM$.

דרך כל נקודה B שאיננה על $\overrightarrow{AM}$ קיים מקביל ל $\overrightarrow{AM}$: ניקח קרן $\overrightarrow{BP}$

שחותכת את $\overrightarrow{AM}$ ונסובב אותה מסביב ל B , עד המקום שבו לראשונה הקרן איננה חותכת את $\overrightarrow{AM}$.

קרן זו היא המקביל.

מההגדרה ברור כי המקביל לקרן מנקודה מסוימת לכיוון מסוים הוא יחיד.

יחס ההקבלה איננו תלוי בנקודת ההתחלה של הקרן $\overrightarrow{AM}$ ולא של הקרן $\overrightarrow{BN}$, ולכן ניתן להרחיב את ההגדרה ולדבר על ישר AM בכיוון הנקודה M .(כיוון זה יקרא "כיוון ההקבלה").

יחס ההקבלה הוא יחס סימטרי וטרנזיטיבי.

ברור לבוליי כי אם נסובב את $\overrightarrow{BP}$ מסביב ל B עד המצב שבו סכום הזוויות החד-צדדיות $\angle ABN+\angle BAM$ יהיה π, הישרים לא יחתכו.[106]

השאלה היא: האם זהו הישר הראשון שאיננו חותך? האם זהו המקביל ?

בוליי מוכיח כי אם קיים זוג ישרים מקבילים שעבורם סכום הזוויות החד-צדדיות הוא π, אזי <u>לכל</u> זוג של ישרים מקבילים סכום הזוויות החד-צדדיות הוא π. ומכאן נובע גם כי אם קיים זוג ישרים מקבילים שעבורם סכום הזוויות החד-צדדיות קטן מ π, אזי <u>לכל</u> זוג של ישרים מקבילים סכום הזוויות החד-צדדיות קטן מ π.

כלומר, או שאנו נמצאים בגיאומטריה האוקלידית שמקבלת את אקסיומת המקבילים, שכל שני ישרים שיוצרים עם ישר שלישי שחותך אותם זוויות חד-צדדיות שסכומן קטן מ π, חייבים להפגש. נסמן גיאומטריה זו E. או שאנו נמצאים בגיאומטריה הלא-אוקלידית (היפרבולית) שמסתמכת על שלילת אקסיומת המקבילים. נסמן גיאומטריה זו H.

במאמרו בונה בוליי גיאומטריה אבסולוטית (נסמנה EH) אשר איננה מניחה לא את אקסיומת המקבילים ולא את שלילתה. גיאומטריה זו מתבססת על המושגים L ו F :

הגדרה עבור נקודה נתונה A, הנמצאת על קרן $\overrightarrow{AM}$, נתבונן באוסף כל הנקודות B כך שאם נעביר דרכן קרן $\overrightarrow{BN}$ כך ש $BN\|\ AM$ אזי נקבל $\angle NBA=\angle MAB$ (ניתן לכנות מקבילים אלו

[106]דבר זה נובע ממשפט 31 של אוקלידס שאיננו תלוי באקסיומת המקבילים.

"מקבילים שווי שוקיים" כאשר "זוויות הבסיס" שלהן שוות). אוסף כל הנקודות B מהצורה הנ"ל בצירוף עם נקודה A עצמה, יקרא F . חיתוך F עם כל מישור שמכיל את AM יקרא L.

$\overrightarrow{AM}$ תקרא <u>הציר של L</u> (או של F). לכל ציר $\overrightarrow{AM}$ קיימים L ו F יחידים.

היות והיחס "הקבלה שוות שוקיים" הוא יחס טרנזיטיבי, לכן L של $\overrightarrow{AM}$ הוא גם L של כל $\overrightarrow{BN}$, אשר הוא "מקביל שווה שוקיים" ל $\overrightarrow{AM}$, וכנ"ל לגבי F. היות ול $\overrightarrow{AM}$ אין תכונה שמייחדת אותו, לכן כל הקרניים אשר הן "מקבילים שווי שוקיים" ל $\overrightarrow{AM}$ הם צירים של L (או של F), ובין כל הצירים של L (או של F) מתקיים היחס "הקבלה שוות-שוקיים". L הוא קו אחיד, (בעל עקמומיות קבועה), ו F הוא משטח אחיד. כל שתי נקודות ב F מגדירות קו L באופן יחיד.

ב E, מכיוון שהנחנו כי סכום הזוויות החד-צדדיות בין שני מקבילים לישר שלישי שחותך אותם הוא π, משמעות הגדרה זו היא כי L הוא קו ישר שמאונך ל $\overrightarrow{AM}$, ו F הוא מישור שמאונך ל $\overrightarrow{AM}$.

ב H, לעומת זאת, L משיק למאונך לציר $\overrightarrow{AM}$ בנקודה A, ו F הוא המשטח הנוצר מסיבוב L מסביב לציר $\overrightarrow{AM}$. זווית בין קווי L תוגדר כזווית שבין המישורים שמכילים את L ומאונכים ל F.

בעזרת מונחים אלו מקבלים את אקסיומת המקבילים במובן רחב יותר: אם שני קווי-L יוצרים עם קו-Lשלישי שחותך אותם זוויות חד-צדדיות שסכומן קטן מ π, אז הם חותכים זה את זה.

המשמעות מכך היא כי בנינו גיאומטריה אבסולוטית –EH אשר בעזרת המונחים הכללים L ו F מקיימת את אקסיומת המקבילים, ומכאן שמתקיימים בה גם כל המשפטים בגיאומטריה האוקלידית וטריגונומטרית המישור הנובעים מאקסיומת המקבילים. כלומר, אם נחליף את הקווים הישרים במישור בקווי-L , נקבל ב F את אותה גיאומטריה וטריגונומטריה "מישורית" כפי שהם בגיאומטריה האוקלידית. לדוגמא: אם נתבונן במעגל במובן של המקום הגיאומטרי של כל הנקודות ב F הנמצאות במרחק קבוע מנקודה מסוימת אזי היקף מעגל ב F שרדיוסו הוא קו-L r הוא $2\pi r$ ושטח מעגל זה הוא πr^2.

נגדיר יחס חדש בין שני קווי-L, או בין ישרים לעקומות, האמור להיות מעין חיקוי להקבלה. על מנת להבחין בין יחס זה ליחס ההקבלה הרגיל החל בין ישרים, נקרא לו "<u>יחס ההקבללה</u>" .

הגדרה <u>המקביליל</u> לישר או לקו-L AB הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות מצד אחד של AB, ומרחקן מ AB קבוע. האנך מכל נקודה על המקביליל ל AB יקרא <u>ציר של המקביליל</u>.

אם AB הוא קו-L של הציר $\overrightarrow{AM}$ ו $C \in \overrightarrow{AM}$ אזי המקביליל ל AB דרך C הוא קו-L של $\overrightarrow{CM}$.

לעומת זאת, אם AB הוא ישר[107] אזי המקביליל לו הוא עקומה, שתיקרא "עקומה שוות מרחק".

ע"פ ההגדרה כל הקטעים של הצירים הנמצאים בין שני המקבילילים הם בעלי אותו אורך.

הגדרה <u>מרחק בין מקבילילים</u> אורך קטע הציר שבין המקבילילים.

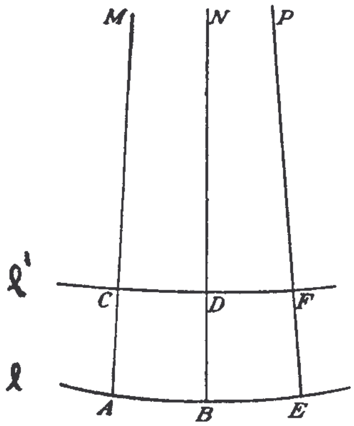
<u>מרחק בין ישרים מקבילים</u> AM ו BN בנקודה A, הוא אורך הקשת AB של קו-L שלהם.

על פי זה קווי-L מקבילילים שומרים על מרחק קבוע ביניהם, בעוד שבישרים מקבילים ב H המרחק בין המקבילים הולך וקטן בכיוון ההקבלה.

הצירים של קווי-L מקבילילים מחלקים אותם באותו היחס.

כלומר, בהינתן שני קווי- L מקבילילים l ו l' , $A,B,E \in l$, $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{EP}$ צירים של l (כאשר כיוון ההקבלה של הצירים הוא מ l ל l') ו C,D,F נקודות החיתוך של הצירים הנ"ל עם l' בהתאמה, מתקיים היחס $CF/CD=AE/AB$[108].

[109] יחס זה תלוי אך ורק במרחק שבין l ו l' ואיננו מושפע מהמרחק שבין הצירים.



שרטוט 3.2

אם נסמן את אורך הקטע AC ב x (אות קטנה), אז CD/AB – היחס המתאים לו, יסומן ב X (אות גדולה). נקרא ל X "<u>יחס ההקבלה</u> של x".

לכל קטע AC נתון, ניתן להעביר בשני קצותיו קווי-L מקבילילים ובעזרת ציר נוסף לקבל את יחס ההקבלה המתאים לו.

ברור כי ב E יחס ההקבלה שווה ל 1 לכל x, לעומת זאת ב H יחס ההקבלה גדול תמיד מ 1, והוא הולך וגדל ככל ש x גדל.

---

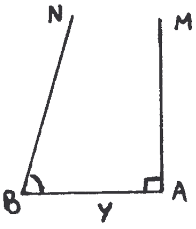
[107] AB יקרא "ישר הבסיס".

[108] זהו יחס בין אורכי הקשתות. בוליי משתמש כאן בסימון AB הן עבור שם הקשת, והן עבור אורך הקשת, על פי ההקשר.

[109] אותו דבר נכון גם עבור ישרים ועקומות שוות מרחק: הקשתות של עקומות שוות-מרחק פרופורציונאליות לקטעים שמקצים קצוות הצירים על ישר הבסיס, או על עקומה שוות מרחק אחרת בעלת אותם צירים.

ניתן להוכיח כי לכל y,x מתקיים $Y = X^{\frac{Y}{X}}$.

אם AB ו CD שני קווי-L מקבילים במרחק x, נסמן את הזוויות שיוצר הקטע BC עם הצירים AM ו BN v,u בהתאמה, אזי $sin\ v/X=sin\ u$.



שרטוט 3.3

הגדרה[110] אם $BN||AM$, $\angle BAM = \pi/2$, נקרא ל $u=\angle ABN$

<u>זווית ההקבלה</u> עבור קטע $AB=y$. היות וזווית זו תלויה בגודל הקטע y, נסמנה $\Pi(y)$.

בדומה ליחס ההקבלה, אם CD עקומה שוות מרחק ל AB, היחס AB/CD הוא יחס קבוע הנקבע רק ע"פ המרחק בין המקבילים ואיננו תלוי באורך הקטע AB.אם המרחק בין המקבילים הוא x נסמן יחס זה $X'=AB/CD$.

בדומה למשפט הקודם, אם נסמן את הזוויות שיוצר הקטע AD עם הצירים של העקומה - AC ו BD - v,u בהתאמה אזי $X'= sin\ v/sin\ u$. אם AC נע לאורך הישר AB עד אינסוף ו BD נשאר קבוע במקומו, אז מתקיים $X'=sin\ \Pi / 1(x)$.

אם נבחן מהו הקשר בין הגודל y של קטע לזווית ההקבלה שלו, נקבל משפט בסיסי בגיאומטריה ההיפרבולית: $Y = cot\frac{\Pi(y)}{2}$.

בולייי בוחן מהו היחס שבין הטריגונומטריה הספרית הידועה לנו ב E, לטריגונומטריה הספרית ב H, וכן מהו היחס בין הטריגונומטריה המישורית ב E לטריגונומטריה המישורית ב H. נגדיר:

<u>משולש ישר</u> משולש אשר צלעותיו הן קווים ישרים, (בניגוד למשולש הנוצר מקווי-L).

תחילה מוכיח בולייי את המשפט המרכזי הבא:

משפט ב H, בכל משולש ישר יחס היקפי המעגלים הבנויים על הצלעות כרדיוסים, שווה ליחס סינוסי הזוויות שמול הצלעות הללו.

בגיאומטריה האוקלידית E, היקף מעגל בעל רדיוס a הוא כמובן $2\pi a$, ולכן בגיאומטריה E זהו בדיוק משפט הסינוסים הרגיל. לעומת זאת, ב H היקף מעגל שרדיוסו x איננו $2\pi x$ כי אם גודל אחר שאותו

[110] בולייי איננו משתמש בהגדרה זו, ואני הוספתי אותה למען הבהירות, וכן על מנת שיהיה קל יותר להשוות את התוצאות שאליהן הגיעו בולייי ולובצ'בסקי.

נחשב בהמשך $\pi k(X - X^{-1})$ כאשר X הוא יחס ההקבלה של הרדיוס x, ו k הוא גודל שיוגדר להלן. המשפט שלפנינו הוא אפוא אבן הפינה לבניית טריגונומטריה ב H, והוא הצעד הראשון והחשוב בדרך המוליכה לכך שב H וב E מתקיימת אותה טריגונומטריה.

ממשפט זה מסיק בוליי את המשפט הבא, שיהווה בסיס לטריגונומטריה הספרית ב H:

הגדרה גודל צלע של משולש ספרי הוא כגודל הזווית המרכזית u הנשענת על אותה קשת.

ע"פ הגדרה זו סינוס הצלע הוא $sin\ u$.

משפט בכל משולש ספירי ב H, היחס בין הסינוסים של הצלעות שווה ליחס שבין הסינוסים של הזוויות הנגדיות לצלעות.

ממשפט זה נובע כי אם ΔABC הוא משולש ספרי ישר זווית, כאשר B זווית ישרה, והצלעות שמול הקודקודים A,B,C הן a,b,c בהתאמה, אזי בטריגונומטריה הספרית של H מתקיים היחס

$$sin\ a = sin\ A \cdot sin\ b$$

שהוא יחס בסיסי הידוע לנו מהטריגונומטריה הספרית ב E. נוסחה זו, ביחד עם מספר נוסחאות נוספות השקולות לה ועוד נוסחאות שנובעות ממנה, מהוות את הבסיס לטריגונומטריה הספרית ב E, ומכאן שהמשך פיתוחה של נוסחה זו ב H יוביל לטריגונומטריה ספרית ב H הזהה לזו שב E. כלומר, קיבלנו כי הטריגונומטריה הספרית נכונה באופן אבסולוטי ללא תלות בקביעה האם אנו נמצאים ב E או ב H. (עובדה שאליה הגיע גם לובצ'בסקי, אם כי מכיוון אחר[111]).

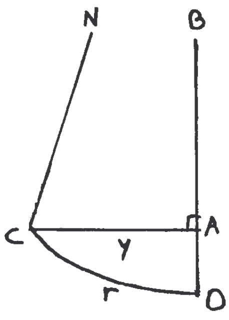
כעת עובר בוליי לבחון מהו היחס בין הטריגונומטריה המישורית ב E לטריגונומטריה המישורית ב H. לצורך פיתוח הטריגונומטריה הלא-אוקלידית נגדיר תחילה את המושג k שהוא מושג בסיסי ב H:

הגדרה אם CN ו DB צירים של קו-L l $(C,D \in l)$ ו A נקודה על BD כך ש $CA \perp DB$.

נסמן ב r את אורך הקשת DC (על l), ונסמן ב y את אורך הקטע AC, אזי $\Pi(y)=\angle ACN$.

[111] כמו-כן, גם למברט ו-Largrange הגיעו אליה, כפי שציינתי בפרק 1.

מתברר כי הגודל $k=\dfrac{r}{\cot \Pi(y)}$ הוא קבוע שאיננו תלוי ב r (וממילא גם לא ב $\Pi(y)$) וכן $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{r}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{k\cdot\cot \Pi(y)}{y}=1$ או $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\cot \Pi(y)}=k$. כן מתברר כי k הוא אורך הקטע אשר יחס ההקבלה שלו הוא e, בסיס הלוגריתמים הטבעי[112], ומכאן כי ניתן לבחור את k כיחידת האורך הטבעית. מההגדרה ברור כי k מוגדר ב H אך איננו מוגדר ב E, ולכן גודל זה מהווה בסיס לטריגונומטריה מישורית לא אוקלידית.



שרטוט 3.4

בעזרת k מבצע בוליי חישובים טריגונומטריים רבים, ומגיע לנוסחאות הבסיסיות של הטריגונומטריה הלא-אוקלידית. הוא מנסח (ומוכיח) מספר נוסחאות המבטאות את הקשר שבין הזוויות לצלעות במשולש ישר-זווית, וכן מספר נוסחאות לגבי גופים בסיסיים בטריגונומטריה, כגון:

- היקף מעגל בעל רדיוס y: $\quad h^\circ y=\pi k\,(Y-Y^{1})$
- שטח מעגל בעל רדיוס y : $\quad S^\circ y=\pi k^2[Y-2+Y^{-1}]$
- שטח פני ספירה: $\quad \dfrac{p^2}{\pi}$ (p - היקף מעגל ראשי של הספירה)
- נפח כדור בעל רדיוס y : $\quad 1/2\pi k^3(Y^2-Y^{-2})-2\pi k^2 y$

ועוד...

בכל הביטויים הנ"ל מתברר כי אם ניתן ל k לשאוף לאינסוף, (תוך התעלמות מכך שהוא מבטא גודל קבוע),הרי שנקבל את הנוסחאות והביטויים המוכרים לנו מהגיאומטריה האוקלידית . מהנוסחאות של המשולש ישר-הזווית מקבלים כי סכום הזוויות במשולש הוא π, היחס סינוס במשולש ישר-זווית מוגדר בצורה המקובלת כיחס שבין הניצב שמול הזווית ליתר, וכן מתקבל משפט פיתגורס. כמו-כן מתקבלות הנוסחאות הרגילות ב E עבור היקף ושטח מעגל, נפח כדור ושטח פני ספירה[113].

---

[112] וכיוון שאמרנו כי $Y=X^{\frac{Y}{X}}$, מכאן שניתן להחליף את יחס ההקבלה A ב- $e^{\frac{a}{k}}$, בכל הביטויים להלן שבהם הוא יופיע, (וכנ"ל לכל אות אחרת).

[113] שטח פני הספירה ב-E זהה בדיוק למה שקיבלנו ב-H, היות והגודל k איננו מוזכר בנוסחה.

במובן זה ניתן לומר כי הטריגונומטריה המישורית נכונה בכל מקרה, ללא תלות בשאלה באיזו גיאומטריה אנחנו פועלים, כאשר בהנחה כי אמנם קיים k כזה, אם אנחנו ב H – k יציין את הגודל הקבוע שעבורו יחס ההקבלה הוא e, והנוסחאות הטריגונומטריות ב H הן אלה אשר הופיעו לעיל, ואם אנחנו ב E, נחליף את ביטויים אלו בגבול של אותם ביטויים כאשר k שואף לאינסוף. (הביטויים אשר אינם מכילים את הגודל k נכונים באופן אבסולוטי ללא תלות בתנאי כלשהו).

צרוף כל העובדות שאליהן הגענו:

א) הגיאומטריה ב F זהה לגיאומטריה ב E, כאשר קווי-L מחליפים ישרים.

ב) הטריגונומטריה הספרית ב E וב H זהות לחלוטין.

ג) הטריגונומטריה המישורית ב E זהה לטריגונומטריה המישורית ב H, במובן שתואר לעיל.

כל אלו מובילים להשערה כי יתכן בהחלט כי קיימת גיאומטריה נוספת H, השונה מהגיאומטריה האוקלידית אך איננה מובילה לשום סתירה, וכי שתי הגיאומטריות תיתכנה באותה מידה. נראה כי דבר זה סיפק את בוליי ושימש עבורו כתחליף לבניית מודל שיוכיח באופן מפורש את קיום הגיאומטריה ההיפרבולית. בנקודה זו סיכם לובצ'בסקי את הדיון אודות הגיאומטריה ההיפרבולית, אך בוליי ממשיך במספר נושאים נוספים.

המטרה שעומדת כעת בפני בוליי היא להוכיח כי בגיאומטריה ההיפרבולית ניתן לתת פתרון ל"בעיית ריבוע המעגל" (מה שלא ניתן לביצוע בגיאומטריה האוקלידית), כלומר, בהינתן מעגל בעל רדיוס a, ניתן לבנות ריבוע השווה בשטחו לשטח המעגל הנתון. לצורך כך נפנה תחילה לשני נושאים נוספים.

הנושא הראשון הוא: בניות גיאומטריות ב H בעזרת סרגל ומחוגה בלבד. הבניות שאותן מבצע בוליי הן:

- בניית מקביל לישר AM דרך נקודה D שאיננה על AM (ב E או ב H).
- עבור זווית חדה נתונה u, מציאת הקטע y כך ש u זווית ההקבלה של הקטע. (או במילים שלו: "כיצד לשרטט ישר שמאונך לאחת משוקי זווית חדה נתונה ומקביל לשוק השנייה של הזווית").
- מציאת נקודת החיתוך של מישור וקרן מחוץ למישור, ומציאת ישר החיתוך של שני מישורים (במקרה שקיימים חיתוכים כנ"ל).

- מציאת נקודת החיתוך של קו-L של BN, עם כל ישר המקביל ל BN. (או במילים שלו: נמצא על $AM||BN$ נקודה A כך ש BN ,AM "מקבילים שווי שוקיים").

בעזרת הנ"ל ניתן לשרטט קווי-L ע"פ הקצוות שלהם, וכך ניתן לבצע ב F את כל הבניות הגיאומטריות, הניתנות לביצוע במישור ב E, כגון: כל זווית שניתנת לחלוקה למספר חלקים שווים ב E ניתן לחלקה גם ב H , ועוד...

ע"פ זה ניתן לבנות ב F ,באופן ממשי, את הקטע x המתאים על הציר $\overrightarrow{AM}$ שעבורו נקבל $X=2$. ובעזרת קירוב קטן כרצוננו ניתן באותו אופן לבנות את k שעבורו $K=e$.

הנושא הבא הוא מציאת הקשר שבין שטח משולש לסכום זוויותיו. בעזרת סדרה של משפטים הנבנים בהדרגה, זה בעקבות זה, מוכיח בוליי כי למשולשים ישרים השווים בשטחם יש אותו סכום זוויות.

ב H גם ההפך נכון: אם למשולשים יש אותו סכום זוויות, אזי הם משולשים שווי שטח.דבר זה נובע מהעובדה שאותה מסיקים מחשובים קודמים, כי ב H סכום הזוויות של כל משולש מישורי הוא פחות מ π. כמו-כן ידוע כי במשולש ספרי, סכום הזוויות הוא יותר מ π.

אם נגדיר <u>מגרעת משולש</u> (מישורי, ב H) כהפרש שבין π לסכום זוויות המשולש, <u>ועודף משולש</u> (על הספירה) כהפרש שבין סכום זוויות המשולש ל π, נקבל את המשפט הבא:

משפט ב H, משולשים מתייחסים זה אל זה בשטחם כיחס המגרעת שלהם[114].

כמו-כן: על הספירה, משולשים מתייחסים זה אל זה בשטחם כיחס העודף שלהם.[115]

קיבלנו כי ב H שטח כל משולש (מישורי או ספירי) הוא פונקציה של סכום זוויותיו, ולכן ניתן לדבר על: "מהו שטח משולש אשר המגרעת/העודף שלו הוא z ". מחשובים מתברר כי שטח משולש ספרי שהעודף שלו הוא z הוא $\frac{zp^2}{4\pi^2}$, ושטח משולש מישורי שהמגרעת שלו היא z הוא $z\cdot k^2$.

אם נתבונן ב<u>משולש האסימפטוטי</u> שהוא משולש ישר שכל צלעותיו מקבילות זו לזו, הרי שבמשולש זה סכום הזוויות שואף ל 0, ומכאן כי $z\to\pi$, וממה שהוכחנו לעיל נובע כי שטח המשולש האסימפטוטי הוא πk^2 . נסמן שטח זה Δ_∞ . בוליי מוכיח בעזרת הבניות הגיאומטריות שהוכחנו לעיל כי ניתן לבנות מעגל

---

[114] גאוס ניסח משפט זה- במישור ההיפרבולי, שטח כל משולש פרופורציוני למגרעת זוויותיו.

[115] ניתן להרחיב משפט זה גם לכל מצולע ולא רק למשולשים.

מישורי ב H השווה בשטחו ל Δ_∞ , וכן ניתן לבנות ריבוע אשר שטחו שווה גם כן ל Δ_∞[116], וכך פתרנו את בעיית ריבוע המעגל.

יוצא מכך כי הגיאומטריה ההיפרבולית היא גיאומטריה המאפשרת את "ריבוע המעגל". ומכאן נשאר הדיון האם הגיאומטריה "האמיתית" היא "גיאומטרית ריבוע המעגל" או הגיאומטריה האוקלידית , אך זוהי שאלה שאיננה ניתנת להכרעה מראש ללא הסתמכות על הנחות כלשהן, ומכאן כי שתי הגיאומטריות נכונות באותה מידה. (את נקודה זו, חוסר היכולת להחליט ללא הנחות מוקדמות איזו גיאומטריה היא ה"אמיתית", אומר בוליי כי יוכיח בהזדמנות אחרת).

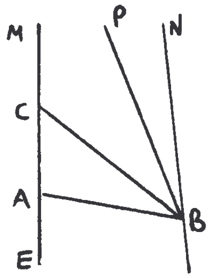
נראה כי על-אף שבוליי לא מצא מודל שמאשר את אפשרות קיום הגיאומטריה ההיפרבולית (ונראה כי גם לא היה מודע לצורך למצוא מודל כזה), הוא הניח כי אפשרות זו תקפה בהחלט, היות ובכל מחקרנו לא הגענו לאף סתירה, בהסתמך על ההנחות שהנחנו בראשית הדיון. חיזוק נוסף לסברה זו הוא ההתאמה שמצאנו בין הטריגונומטריה ההיפרבולית והטריגונומטריה האוקלידית (ספרית ומישורית). עם זאת, נראה כי הדבר לא הניח את דעתו לחלוטין, היות ויתכן שאמנם קיימת סתירה שעדיין לא הגענו אליה. ראוי לציין כי גם בשנים שלאחר פרסום מאמר זה אנחנו מוצאים כי בוליי המשיך לחקור: האם ניתן להוכיח באופן מפורש כי אקסיומת המקבילים איננה תוצאה של האקסיומות האחרות ? (מה שיאשר באמת את אפשרות קיומה של H), דבר שעבורו לא הצליח לגבש דעה ברורה. בשלב מסוים הוא האמין כי לא ניתן להוכיח בשום דרך איזו גיאומטריה היא "האמיתית", אבל אח"כ אנחנו מוצאים כי הוא חזר שוב לרעיונות הקודמים ופרסם עוד הוכחה לאקסיומת המקבילים. לתקופה מסוימת הוא הניח כי בכך הוכיח כי ההנחה של שלילת אקסיומת המקבילים העומדת בבסיס הגיאומטריה ההיפרבולית איננה נכונה, אך לאחר כמה זמן הוא מצא את הטעות בהוכחה שלו ולא המשיך עוד לחקור בכיוון זה. (מאוחר יותר בנה פואנקרה את המודל עבור הגיאומטריה ההיפרבולית ובכך הוכיח באופן סופי כי גיאומטריה כזו אמנם קיימת).

3.2.2 ניתוח מפורט[117]

בוליי פותח את מאמרו בהגדרת המושג "מקביל":

[116] ריבוע זה מורכב מ-8 משולשים, אשר המגרעת בכל אחד מהם היא $\pi/8$, ומכאן ששטח כל משולש הוא $\pi/8 \cdot k^2$, ולכן שטח הריבוע כולו הוא πk^2 .

[117] בסקירה הבאה ההגדרות והמשפטים המובאים כפי שהם מובאים במאמר (חוץ מתיקוני ניסוח ולשון) יובאו בכתב זה, ואילו ניתוח הדברים וכתיבת רעיון ההוכחה בלשוני יופיעו בכתב זה.



שרטוט 3.5

הגדרה 3.1 נתונה קרן $\overrightarrow{AM}$[118] במישור T. אם $\overrightarrow{BN}$ נמצאת גם היא במישור T ואיננה חותכת את $\overrightarrow{AM}$, אך כל קרן $\overrightarrow{BP}$ בתוך $\angle ABN$[119] כן חותכת אותה, נאמר כי $\overrightarrow{BN}$ מקביל ל $\overrightarrow{AM}$. נסמן $BN||AM$[120][121].

ברור כי דרך כל נקודה B שאיננה על $\overrightarrow{AM}$ קיימת $\overrightarrow{BN}$ כזו ורק אחת, וכן ש $\angle BAM+\angle ABN\le\pi$.

ניתן למצוא את המקביל באופן הבא:

אם $\overrightarrow{AM}$ היא קרן נתונה ו B נקודה קבועה שאיננה על $\overrightarrow{AM}$ נסובב את הקרן $\overrightarrow{BC}$[122] מסביב לנקודה B עד שנקבל $\angle BAM+\angle ABC=\pi$. באיזה שהוא מקום $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ לראשונה איננו חותך את $\overrightarrow{AM}$. בנקודה זו מתקבל המקביל [2,עמ' 5].

בהגדרה זו עם ההנחות שבאות בעקבותיה מסתמך בוליי על מספר עובדות מבלי לציין זאת באופן מפורש:

1. ברור לו כי כאשר סכום הזוויות החד-צדדיות $\angle BAM+\angle ABC$ הוא π, אז הקרניים $\overrightarrow{AM}$ ו $\overrightarrow{BN}$ לא יפגשו, ולכן סכום הזוויות $\angle BAM+\angle ABC$ בין מקבילים, איננו יכול להיות גדול מ π. (דבר זה נובע ממשפט 31 של אוקלידס שאיננו נובע מאקסיומת המקבילים).

2. בוליי משתמש באופן לא מודע באקסיומת הרציפות בכך שהוא מניח כי קיימת קרן מסוימת שבה $\overrightarrow{BC}$ איננו חותך את $\overrightarrow{AM}$ לראשונה. כלומר הקרניים $\overrightarrow{BC}$ משורטטות באופן רציף, ללא "חורים" ביניהן.

3. בוליי מניח מבלי לציין זאת כי כאשר נמצא קרן אחת שאיננה חותכת את $\overrightarrow{AM}$ לראשונה, אז כל הקרניים שבצידה השני של הקרן גם הם לא יחתכו את $\overrightarrow{AM}$.

בכך הוא מסתמך באופן לא מודע על משפט הנובע מאקסיומת פש:

---

[118] הגדרת קרן ע"פ המובן הרגיל אצלנו-החצי של ישר AM המתחיל ב- A ומכיל את נקודה M.

[119] נציין כאן כי כל הזוויות אצל בוליי הן זוויות שקטנות מ- π. לא קיים אצלו מושג של זווית נישאה.

[120] הערת המתרגם: זהו יחס בין קרניים, אך בכתיבת היחס מוותרים על סימון הקרן מעל האותיות (הערה 4 ב-[3, עמוד 377]).

[121] בוליי מסמן יחס זה במקור [3] בעזרת 3 קווים. אני מסמנת את יחס ההקבלה, בעזרת שני קווים, כפי שאנו רגילים לסמן ישרים מקבילים, וכפי שמופיע בתרגום המאמר ע"פ מקור [2].

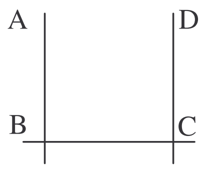
[122] הערת המתרגם: כאן הוא מדבר בעצם על הקטע $\overline{BC}$, כיוון שהוא מתכוון לכך שנקודה C זזה לאורך הקרן $\overrightarrow{AM}$. אך בגלל המצב המתקבל במקרה הגבולי שבו C כבר איננה על $\overrightarrow{AM}$, לכן הוא אומר- הקרן $\overrightarrow{BC}$ (הערה 5 ב-[3, עמוד 377]).

אם ישר עובר דרך קדקוד משולש ודרך נקודה פנימית למשולש[123], אז הוא חייב לעבור דרך הצלע שממולו.

הערה היות ויחס ההקבלה מוגדר על קרניים, מכאן שיחידות המקביל הינה רק בכיוון הקרן, ואם ניקח צדדים שונים של A ניתן לקבל שתי קרניים מקבילות שאינן בהכרח על ישר אחד.

מההגדרה ברור לבוליי ללא הוכחה כי ההקבלה של $\overrightarrow{BN}$ ל $\overrightarrow{AM}$ איננה תלויה בנקודת ההתחלה של הקרן $\overrightarrow{AM}$. כלומר: אם E נקודה כלשהי על הישר AM [124] אזי $BN||EM$ [2,עמ' 5].

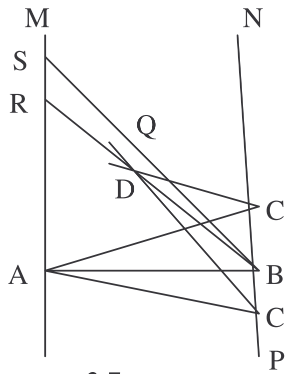
בוליי מוכיח כי כאשר נקודה C שואפת לאינסוף על הקרן $\overrightarrow{AM}$ אזי $\angle ACB$ שבין BC ל $\overrightarrow{AM}$ שואפת לאפס (ראה שרטוט 3.5).



שרטוט 3.6

סימון אם D נקודה פנימית ל $\angle ABC$ [125] כך שהישרים BA ו CD אינם נחתכים, אזי:

- $\underline{ABCD}$ יסמן את החלק של $\angle ABC$ הכלוא בין הקרניים $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ והקטע $\overline{BC}$.(נאמר "המרובע הפתוח $ABCD$").
- $\underline{BACD}$ יסמן את החלק של מישור ABC הכלוא בין הישרים BA ו DC.



שרטוט 3.7

משפט 3.1 אם $BN||AM$, C נקודה על הישר BN[126], אזי גם $CN//AM$ [2,עמ' 6][127].

הוכחה[128] ניקח נקודה D פנימית ל $MACN$.

---

[123] הגדרת נקודה פנימית במשולש נובעת מחיתוך חצאי המישורים שמגדירות צלעות המשולש.

[124]כאן מוסיף בוליי את התנאי "בהנחה שבכל המקרים $AE<AM$" והוא איננו מפרש את הסימון. הערת המתרגם: נראה שהוא מתכוון כי E איננה נמצאת מעבר ל- M על הישר AM. או במילים אחרות ש- M נלקחה מספיק רחוק על הקרן, כך שתהיה מעבר לכל נקודה E שניקח (הערה 6 ב-[3, עמ' 377]).

[125] בוליי איננו מגדיר באופן מדויק מהי נקודה פנימית לזווית. נראה כי הוא מסתמך על ההגדרה האינטואיטיבית כי נקודה פנימית לזווית היא נקודה שכל ישר שנעביר דרכה יחתוך את אחת משוקי הזווית או את שתיהן.

[126]בוליי איננו מציין ש- C נקודה על הישר BN, ומניח כי הקורא יראה זאת בעצמו מהשרטוט. זה המקום לציין כי בהרבה מקומות במאמרו מסתמך בוליי על שרטוטים ועל הרגשה אינטואיטיבית ואיננו מקפיד על הגדרה מדויקת של הדברים.(פעמים רבות הוא מניח כי הקורא ילמד בעצמו נתונים מהשרטוט, או שהוא משתמש בנקודות וישרים שרק לאחר-מכן הוא מסביר כיצד לבנות אותם).

[127]משפט זה שונה ממה שכתבנו לעיל, היות ולא הוכחנו עדין כי יחס ההקבלה הוא יחס סימטרי. ולכן חוסר התלות של המקביל BN בנקודת ההתחלה, איננו נובע מחוסר התלות של AM בנקודת ההתחלה.

[128] הוכחה זו איננה חשובה במיוחד, אך אני מביאה אותה ע"מ לנתח ולבדוק על מה מסתמך בוליי בהוכחה.

<u>מקרה א'</u> נקודה C חלה בקרן $\overrightarrow{BN}$.

על-פי הגדרת המקביל, $\overrightarrow{BD}$ חותך את $\overrightarrow{AM}$, נניח בנקודה R , ומכאן שגם $\overrightarrow{CD}$ חותך את $\overrightarrow{AM}$.

<u>מקרה ב'</u> נקודה C חלה בקרן $\overrightarrow{BP}$ (P נקודה על הישר BN, בצידה השני של B).

נעביר $BQ||CD$. $\overrightarrow{BQ}$ עובר בתוך $\angle ABN$[129], ולכן ע"פ הגדרת המקביל, $\overrightarrow{BQ}$ חותך את $\overrightarrow{AM}$, נניח בנקודה S , ומכאן שגם $\overrightarrow{CD}$ חותך את $\overrightarrow{AM}$.

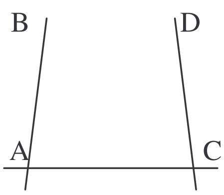
מסקנה בכל מקרה $\overrightarrow{CN}$ איננו חותך את $\overrightarrow{AM}$, אך כל קרן אחרת $\overrightarrow{CD}$ בתוך $\angle ACN$ כן חותכת את $\overrightarrow{AM}$, ומכאן כי $CN//AM$ [2, עמ' 6].

בהוכחה זו קיימות הנחות סמויות שבוליי משתמש בהם ללא ציון מפורש, (וקרוב לוודאי מבלי שירגיש בכך). בשני המקרים העובדה ש $\overrightarrow{CD}$ חותך את $\overrightarrow{AM}$, נובעת מהסתמכות על אקסיומת פש:

במקרה א' $\overrightarrow{CD}$ "נכנס" למשולש ABR בנקודה פנימית של הצלע BR. מהבנייה הוא לא יכול לחתוך את AB , ומכאן שיחתוך את $\overrightarrow{AM}$.

במקרה ב' $\overrightarrow{CD}$ "נכנס" למשולש ABS בנקודה פנימית של הצלע AB. כיוון ש $BQ||CD$ הוא לא יכול לחתוך את BQ, ומכאן כי יחתוך את $\overrightarrow{AM}$.

מאחר והוכחנו את חוסר התלות של שני המקבילים בנקודת ההתחלה, מכאן ואילך אם נדבר על "המקביל $\overrightarrow{AM}$ " ואין חשיבות לנקודת ההתחלה A נאמר גם "(הישר) המקביל AM", כאשר מוסכם שלוקחים את הישר בכיוון M (כיוון זה יקרא "כיוון ההקבלה").



שרטוט 3.8

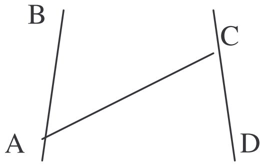
נוסיף כעת סימון חשוב שילווה אותנו לכל אורך עבודתו של בוליי:

סימון אם $\angle CAB = \angle ACD$ נסמן $AB\ \underline{\Omega}\ CD$.

---

[129] BN ו- $\overrightarrow{CD}$ נחתכים בנקודה C שמעבר ל- B , ומכאן ש- $\overrightarrow{BN}$ לא יחתוך את $\overrightarrow{CD}$ בנקודה נוספת, ולכן $\overrightarrow{BN}$ נמצא מעבר ל- $\overrightarrow{BQ}$.

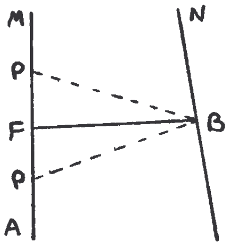
הערה נשים לב כי מהמשך עבודתו ברור שבוליי מעונין בסימון זה לציין את העובדה שהזוויות החד-צדדיות שמתקבלות בין הקטע



שרטוט 3.9

$\overline{AC}$ והישרים AB ו CD שוות, אך כיוון שהוא לא הוסיף שום שרטוט או תנאי להגדרה זו יש כאן חוסר דיוק, כיוון שאותו סימון עבור שרטוט 3.9 היה אומר שהזוויות <u>המתחלפות</u> שוות.

משפט 3.2 אם $BN//AM$ אזי קיימת נקודה F בישר AM כך ש $BN\ \underline{\Omega}\ FM$ (כלומר $\angle BFM=\angle FBN$) [2,עמ' 7].



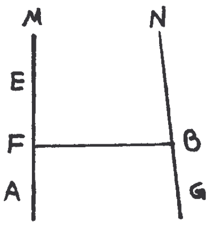
שרטוט 3.10

בהוכחת משפט זה מסתמך בוליי על תכונת הרציפות: הוא מוכיח כי ניתן לקחת נקודה P על הישר AM כך ש $\angle BPM < \angle PBN$ ואם נזיז את נקודה P לאורך הישר AM נגיע למצב שבו $\angle BPM > \angle PBN$. בגלל תכונת הרציפות קיימת נקודה F ביו שני המקרים הנ"ל שעבורה נקבל $\angle BFM = \angle FBN$.[130]

משפט 3.3 יחס ההקבלה הוא יחס סימטרי.

אם נוסיף לכך את מה שהוכחנו כבר על אי התלות של שני המקבילים בנקודת ההתחלה של הקרן נקבל את הניסוח כפי שהוא מופיע אצל בוליי:

אם $BN||AM$, E נקודה כלשהי על AM, G נקודה כלשהי על BN, אזי $GN//EM$ ו $EM//GN$ [2,עמוד 7].



שרטוט 3.11

בהוכחת הסימטרייה נעזר בוליי בעובדה כי ניתן למצוא (ע"פ משפט 3.2) נקודה F כך ש $FM\ \underline{\Omega}\ BN$, ומכאן נובע כי המרובע הפתוח $MFBN$ חופף למרובע הפתוח $NBFM$[131], ולכן כיוון ש $BN||FM$ מכאן נובע שגם $FM||BN$ ולכן $EM||GN$.

משפט 3.4 יחס ההקבלה הוא יחס טרנזיטיבי. או בלשונו:

אם $BN||AM$ וכן $CP||AM$ ו C איננה נקודה על הישר BN, אז גם $BN||CP$ [2, עמ' 8].

[130] מהוכחה זו ברור כי עבור נקודה B נתונה, נקודה F הנ"ל היא יחידה.

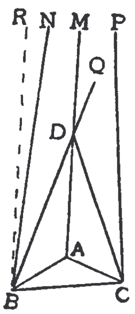
[131] בוליי איננו מגדיר באופן מפורש מה זו בדיוק חפיפה. נראה כי הוא מסתמך על ההגדרה האינטואיטיבית כי שתי צורות הן חופפות אם ניתן להניח אותן אחת על השניה כך ש"תכסינה" אחת את השניה באופן מדויק.

את העובדה שהישרים לא נחתכים ניתן להוכיח בקלות מיחידות המקביל (לכיוון מסוים) דרך נקודה מחוץ לישר. על-מנת להוכיח כי הישרים מקבילים מחלק בוליי את ההוכחה למספר מקרים:

א) כאשר שלושת הישרים באותו מישור:

1. אם AM נמצא בין BN ל CP - דבר זה נובע באופן כמעט מיידי מהגדרת ההקבלה ומהמשפטים הקודמים שהוכחנו.

2. אם BN ו CP שניהם באותו צד של AM - כאן מסתמך בוליי על האקסיומה כי קו ישר מחלק את נקודות המישור שאינן עליו לשני תחומים שנקראים צידי הישר. כל קו שעובר מנקודה בצדו האחד של הישר לנקודה בצדו השני חותך את הישר[132].



שרטוט 3.12

ב)כאשר שלושת הישרים אינם במישור אחד: תהי BD קרן במישור ABN בתוך $\angle ABN$. ההוכחה נעזרת בסיבוב חצי המישור BCD [133] סביב BC עד המצב שבו הוא לראשונה איננו חותך את AM, באופן דומה למה שנעשה בהגדרת המקביל.

מההוכחה נובע כי אם $CP||AM$,B נקודה מחוץ למישור CAM , אזי BN (ישר החיתוך של מישורים BCP ו BAM), מקביל ל AM ול CP . [134]

סימון $AB||\underline{\Omega}\,CD$ פירושו: $AB||CD$ וגם $AB\underline{\Omega}\,CD$.[135]

נרחיב את משפט 3.4 ונקבל משפט נוסף:

משפט 3.5 היחס $\underline{\Omega}||$ הוא טרנזיטיבי[136] [2, עמ' 11].

גם כאן מתחלקת ההוכחה לשני מקרים:

כאשר שלושת הישרים במישורים שונים, או כאשר כולם באותו מישור.

---

[132] בוליי איננו מגדיר את המושג "צידי הישר" וכן איננו מנסח את האקסיומה הנ"ל שעליה הוא מסתמך.

[133] **הגדרה-** חצי המישור ABC פירושו- החצי של מישור ABC שמתחיל בישר AB ומכיל את נקודה C.

[134] הערת המחבר- אם היינו מקדימים את המקרה השלישי למקרים האחרים, ניתן היה להוכיח אותם בצורה קצרה ואלגנטית יותר, כפי שנעשה במשפט 3.5 (מצוטט בהערה 5 ב-[3, עמ' 380] מתוך edition 1, volume 1, Errata of the Appendix).

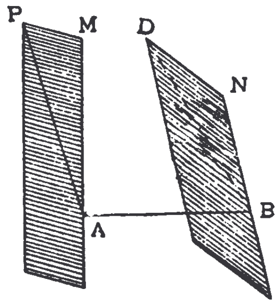
[135] בגיאומטריה האוקלידית משמעות סימון זה היא כי כל אחת מהזוויות החד-צדדיות היא זווית ישרה, כלומר- AC אנך משותף ל-AB ו-CD.

[136] לגבי ההקבלה כבר הוכחנו את יחס הטרנזיטיביות. מה שנותר להוכיח הוא כי היחס נכון גם עבור זוויות חד-צדדיות שוות, בנוסף להקבלה.

- במקרה הראשון (שלושת הישרים במישורים שונים) ההוכחה נעזרת במשפט 3.4 שכבר הוכחנו ובשתי טענות-עזר נוספות:

טענת-עזר 1: אם $BN||\underline{\Omega}CP$ ו AM הוא אנך אמצעי לקטע BC, אז $BN||AM$ (ובאותו אופן כמובן גם $CP||AM$) [2, עמ' 9] .

טענה זו נובעת, כפי שבוליי מוכיח, משקולי סימטרייה פשוטים.



שרטוט 3.13

טענת-עזר 2: אם $BN||AM$, כך ש $\angle BAM = \pi/2$,

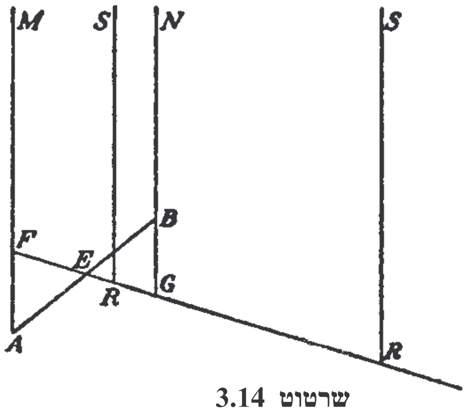
P,D נקודות מאותו צד של מישור $MABN$ (נסמנו Π) כך שחצי המישור MAP ניצב ל Π, וחצי המישור BND יוצר עם Π זווית חדה (בכיוון הנקודה P), אזי חצאי המישורים MAP ו BND חותכים זה את זה [2,עמ' 10] [137].

- במקרה השני (שלושת הישרים באותו מישור), נעביר ישר נוסף FS מחוץ לאותו מישור כך ש $FS||\underline{\Omega}AM$. מהמקרה הראשון שכבר הוכחנו $FS||\underline{\Omega}BN$ (כיוון ששניהם $||\underline{\Omega}$ ל AM ואינם באותו מישור) ובאותו אופן $FS||\underline{\Omega}CP$, ומכאן כפי שהוכחנו כבר $BN||\underline{\Omega}CP$.

משפט 3.6 אם קיים זוג ישרים מקבילים שסכום הזוויות החד-צדדיות בינם לבין ישר חותך כלשהו הוא π , אזי לכל זוג של ישרים מקבילים סכום הזוויות החד-צדדיות בינם לבין ישר שחותך אותם הוא π [2, עמ' 13] .

הוכחה[138] נניח כי $BN||AM$, $\angle BAM + \angle ABN = \pi$. צריך להוכיח כי אם $CP||DQ$ אז גם $\angle DCP + \angle CDQ = \pi$

דרך E אמצע הקטע AB, מעבירים ישר שחותך את AM בנקודה F כך ש $\angle EFM=\angle DCP$.



שרטוט 3.14

[137] יש לשים לב כי בוליי מוכיח את כללי יותר-כאשר סכום הזוויות הפנ בהמשך במשפט באופן זה, אך איננו

[138] ההוכחה איננה חשובה במיוחד, אך אני מביאה אותה בגלל מרכזיותו של המשפט.

ממשיכים את הישר BN עד ל G - נקודת החיתוך עם הקרן $\overrightarrow{FE}$. מקבלים כי $FM \| GN$ ומתקיים $\angle GFM + \angle FGN = \pi$ (כיוון ש $\Delta EAF \cong \Delta EBG$). בונים RS כך ש $MFRS \cong PCDQ$ ומוכיחים כי בכל מקרה (R נופל בתוך הקטע FG/על G/מחוץ לקטע FG) $\angle RFM + \angle FRS = \pi$ ומכאן שגם $\angle DCP + \angle CDQ = \pi$.

מסקנה **אם קיים זוג ישרים מקבילים שעבורם סכום הזוויות החד-צדדיות קטן מ π, אז לכל זוג של ישרים מקבילים סכום הזוויות החד-צדדיות קטן מ π** [2,עמ' 14].

הוכחת המסקנה ברורה בהסתמך על משפט 3.6 ועל העובדה כי ברור שבכל מקרה סכום הזוויות החד-צדדיות $\pi \geq$ (ע"פ מה שהבאנו בהגדרה 3.1 של המקביל).

ממשפט זה ברור כי קיימות שתי אפשרויות:

- או שאנו נמצאים בגיאומטריה האוקלידית שמקבלת את אקסיומת המקבילים[139], ומכאן כי סכום הזוויות החד-צדדיות בין כל זוג מקבילים הוא π. נסמן גיאומטריה זו ב E.

- או שאנו נמצאים בגיאומטריה הלא-אוקלידית (הגיאומטריה ההיפרבולית) שמניחה את שלילת אקסיומת המקבילים. ע"פ זה סכום הזוויות החד-צדדיות בין מקבילים קטן מ π. נסמן גיאומטריה זו ב H[140].

משפט שלא יצוין עבורו אם הוא ב E או ב H, הכוונה היא שהוא נכון בצורה אבסולוטית, גם ב E וגם ב H. גיאומטריה שאיננה תלויה בקיום אקסיומת המקבילים או בשלילתה תיקרא <u>גיאומטריה אבסולוטית,</u> ונסמנה EH.

נפנה כעת להגדרת מושגים חדשים בגיאומטריה EH.(ב E מושגים אלו הם ישר ומישור).

הגדרה 3.2 נתונה נקודה A. נעביר דרכה קרן $\overrightarrow{AM}$. נתבונן באוסף כל הנקודות B כך שאם נעביר דרכן קרן $\overrightarrow{BM}$ המקבילה ל $\overrightarrow{AM}$ נקבל $BN\,\underline{\Omega}\,AM$.

נסמן את A ואוסף הנקודות B ב F. נסמן ב L את החיתוך של F עם מישור שמכיל את הקרן $\overrightarrow{AM}$.

[139] בוליי מכנה את אקסיומת המקבילים אקסיומה מספר XI. זאת כנראה ע"פ עבודתו של James Williamson שתירגם את עבודתו של אוקלידס לאנגלית. בתרגום שלו אקסיומת המקבילים היא הנחה מספר 11 בין ה-Common Notions. בעבודתו של Heiberg היא מופיעה כאקסיומה החמישית, ובעבודות אחרות אף כאקסיומה 12,13 ועוד.. (על מיקומה של אקסיומת המקבילים בין האקסיומות של אוקלידס, ראה בהרחבה בסעיף 1.1).

[140] בוליי מסמן את הגיאומטריה האוקלידית ב Σ ואת הגיאומטריה הלא-אוקלידית ב S.

ל F יש נקודה אחת ויחידה על כל ישר שמקביל ל $\overrightarrow{AM}$. L מתחלק ע"י הקרן $\overrightarrow{AM}$ לשני חלקים סימטריים. נקרא לקרן $\overrightarrow{AM}$ "<u>הציר של L</u>." ברור כי בכל מישור T שמכיל את $\overrightarrow{AM}$ קיים עבור הציר $\overrightarrow{AM}$ L יחיד. נקרא לו "ה L של הציר $\overrightarrow{AM}$ במישור T".

אם נסובב את L סביב $\overrightarrow{AM}$ נקבל את F ש $\overrightarrow{AM}$ הוא הציר שלו. לכן ניתן לקרוא ל F באותו אופן , "ה F של הציר $\overrightarrow{AM}$" [2,עמ' 12].

- ממשפט 3.2 נובע כי לכל שתי קרניים מקבילות $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}$ ולכל נקודה C על $\overrightarrow{AM}$ קיימת נקודה יחידה D על $\overrightarrow{BN}$ כך ש $CM\ \underline{\Omega}\ DN$. מכאן מובן מדוע ל F יש נקודה אחת ויחידה על כל ישר שמקביל ל $\overrightarrow{AM}$, ומכך גם נובע כי ה L של הציר $\overrightarrow{AM}$ במישור T הוא יחיד.

משפט 3.7 אם B היא נקודה ב L של הציר $\overrightarrow{AM}$ ו $BN\|\underline{\Omega}AM$, אזי ה L של $\overrightarrow{AM}$ הוא גם ה L של $\overrightarrow{BN}$ [2,עמ' 12] [141].

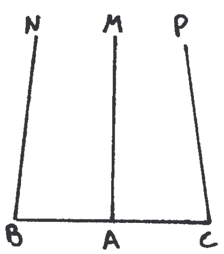
הוכחת משפט זה פשוטה מאד בהסתמך על משפט 3.5 ועל ההגדרה של L.

מכאן כי אין כל ייחוד בקרן $\overrightarrow{AM}$ וכל קרן $\overrightarrow{BN}$ שמקיימת $BN\|\underline{\Omega}AM$ יכולה גם-כן לשמש כציר של L, וכל הצירים של L מתקיים ביניהם היחס $\underline{\Omega}\|$.

משפט 3.8 [ב E], ה L של הציר $\overrightarrow{AM}$ הוא ישר שמאונך ל $\overrightarrow{AM}$ [2,עמ' 15] [142].

ההוכחה ברורה בהסתמך על העובדה כי ב E סכום הזוויות החד-צדדיות בין מקבילים הוא π וב L הזוויות החד-צדדיות בין המקבילים שוות.

ב H ,לעומת זאת, לא קיימות שלוש נקודות של L או של F שנמצאות על ישר אחד. כיוון שנניח כי $\overrightarrow{AM}$ הוא ציר של L הנמצא בין הצירים $\overrightarrow{BN}$ ו $\overrightarrow{CP}$. מכיוון שסכום הזוויות החד-צדדיות בין מקבילים ב H קטן מ π, וב L הזוויות החד-צדדיות בין מקבילים שוות. מכאן



שרטוט 3.15

---

[141] אותו דבר נכון באותו אופן עבור F.

[142] מכאן ברור כי ב-E ה-F של הציר $\overrightarrow{AM}$ הוא מישור שמאונך לציר $\overrightarrow{AM}$.

שהזוויות משני צדדיה של $\overrightarrow{AM}$ $\angle BAM$ ו $\angle CAM$ שתיהן קטנות מ $\pi/2$, ולכן B ו C אינן על ישר אחד.

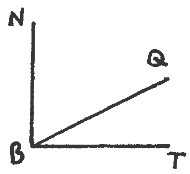
הגדרה 3.3 משטח או קו m יקרא <u>אחיד</u>, אם לכל שתי נקודות A,B ב m ניתן להזיז את m לאורך עצמו כך ש B תעבור אל A, כלומר: m בעל עקמומית קבועה.

משפט 3.9 [ב H], L הוא קו אחיד ו F הוא משטח אחיד [2,עמ' 15].[143]

משפט 3.10 [ב H], החיתוך של F עם כל מישור שעובר דרך נקודה A של F ומשופע לציר $\overrightarrow{AM}$, הוא מעגל [2,עמ' 16].

משפט 3.11 [ב H], אם $\overrightarrow{BN}$ הציר של L במישור M, ו BT אנך ל $\overrightarrow{BN}$ ב M, אזי BT משיק ל L [2,עמ' 17].

הוכחה מהגדרת L ותכונות H ברור כי אין ל L אף נקודה נוספת על $\overrightarrow{BT}$ חוץ מ B . מצד שני עבור כל קרן אחרת $\overrightarrow{BQ}$ במישור M, נתבונן בחיתוך של המישור העובר דרך $\overrightarrow{BQ}$ ומאונך למישור M , עם F של $\overrightarrow{BN}$. ממשפט 3.10 חיתוך זה הוא מעגל. ברור כי מרכז המעגל יהיה על הקרן $\overrightarrow{BQ}$[144]. אם BQ הקוטר של מעגל זה, אזי L של $\overrightarrow{BN}$ חותך את $\overrightarrow{BQ}$ בנקודה נוספת Q.



שרטוט 3.16

מעובדה זו כי L חותך את BT בנקודה יחידה, אך כל קרן אחרת $\overrightarrow{BQ}$ במישור M חותכת את L בשתי נקודות, נובע כי BT משיק ל L .

קיבלנו כי הן ב E והן ב H, L מאונך לכל הצירים שלו.

הגדרות אלו והמשפטים שהוכחנו בעקבותיהם מובילים אותנו למשפט מרכזי וחשוב בדבר הגיאומטריה הקיימת ב F. נגדיר תחילה מספר מושגים שישמשו אותנו בהמשך:

---

[143] הערת המחבר- אין זה הכרחי להגביל הוכחה זו ל-H בלבד, היות וניתן בקלות לשנות את הוכחת המשפט כך שתהיה תקפה באופן אבסולוטי ל-E ול-H (מצוטט בהערה 1 ב-[3, עמוד 385] מתוך edition 1, volume 1, Errata of the Appendix).

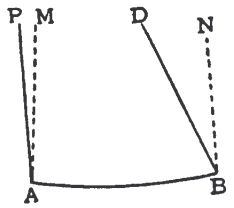
[144] הערת המתרגם: דבר זה נובע כנראה מהסימטרייה של F ביחס למישור M, ובעקבות כך מהסימטרייה של החיתוך ביחס לישר BQ (הערה 2 ב-[3, עמוד 386]).

הגדרה 3.4 <u>זווית L :</u> זווית בין קווי-L ב F . זווית זו שווה לזווית בין המישורים המכילים את L ומאונכים ל F [145].

הגדרה 3.5 <u>הקו AP ב F </u>: קו-L שעובר דרך הנקודות A ו P [146].

הגדרה 3.6 <u>קרן AP ב F </u>: החלק של הקו AP שמתחיל ב A ומכיל את הצד שבו נמצא P.

משפט 3.12 [ב H] שני קווי-L AP ו BD הנמצאים באותו F, ויוצרים עם קו-L שלישי AB זוויות חד-צדדיות שסכומן קטן מ π , חותכים זה את זה [2,עמ' 17].



שרטוט 3.17

הוכחה יהיו $\overrightarrow{AM}$ ו $\overrightarrow{BN}$ צירים של F. ע"פ טענת-עזר 2 למשפט 3.5, חצאי המישורים AMP ו BND נחתכים בישר שלישי CE שמקביל לצירים[147]. מכיוון של F יש נקודה על כל אחד מהישרים שמקבילים ל $\overrightarrow{AM}$ מכאן ש F חותכת את CE בנקודה מסוימת Q. נקודה זו היא נקודת החיתוך של $\overrightarrow{AP}$ ו $\overrightarrow{BD}$.

נשים לב כי משפט זה הוא בדיוק אקסיומת המקבילים של אוקלידס, כאשר את הקווים הישרים במישור מחליפים קווי-L ב F , ומכאן כי כל משפטי הגיאומטריה והטריגונומטריה המישורית הנובעים מאקסיומת המקבילים מתקיימים גם-כן ב F. כלומר, אם נחליף את הקווים הישרים במישור בקווי-L , נקבל ב F את אותה גיאומטריה וטריגונומטריה "מישורית" כפי שהם ב E. במובן זה ניתן לומר כי הגיאומטריה האוקלידית מתקיימת ב F . בוליי הרחיב כאן בעזרת המושגים "קווי-L " ו " F " , שהם מושגים אבסולוטיים, את הגדרת הקו הישר והמישור ב E גם עבור קו עקום ומשטח ב H, ובעזרתם הוא בנה גיאומטריה אבסולוטית - EH המתקיימת ב E וב H.

ע"פ מה שאמרנו, ניתן להשתמש ב F בכל הפונקציות הטריגונומטריות כפי שהן מופיעות ב E. לדוגמא: היקף "מעגל" [148] ב F בעל רדיוס שהוא קו-L באורך r הינו $2\pi r$, נסמנו h_F °r (להבדיל מ h °r

---

[145] ב-H, L הוא קו עקום וקיים מישור יחיד שמכיל אותו וכך הוגדרה הזווית בין המישורים כזווית שבין קווי-L . ב-E לעומת זאת, L הוא קו ישר וקיימים מישורים רבים שמכילים אותו, לכן ניקח את המישור המאונך ל-F והזווית בין מישורים אלו (ע"פ ההגדרה המקובלת לזווית בין מישורים) היא הזווית שבין קווי-L ב-E.

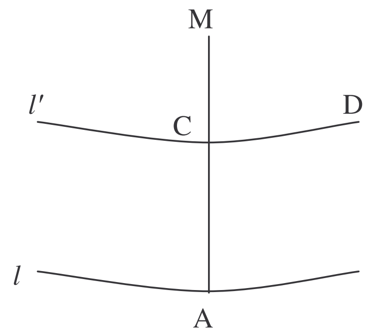
[146] ממה שהוכחנו עד עתה נובע כי כל שתי נקודות של F מגדירות קו-L באופן יחיד.

[147] ראה הערה 33 .

[148] כאשר מתייחסים למעגל במובן של: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע מנקודה מסוימת.

שישמש כסימן עבור היקף מעגל מישורי בעל רדיוס שהוא קו ישר, באורך r), ושטח ה"מעגל" הנ"ל ב F הוא πr^2, יסומן $s_F \circ r$ (ובגיאומטריה מישורית $s \circ r$)[149].

נגדיר יחס חדש בין שני קווי-L, או בין ישרים לעקומות , האמור להיות מעין חיקוי להקבלה. על מנת להבחין בין יחס זה ליחס ההקבלה הרגיל החל בין ישרים, נקרא לו "<u>יחס ההקבללה</u>" . תחילה נגדיר יחס הקבללה בין שני קווי-L :



שרטוט 3.18

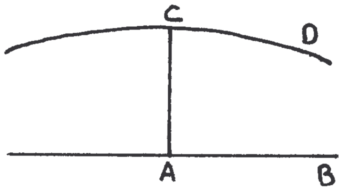
הגדרה 3.7 יהי l קו-L של הציר $\overrightarrow{AM}$. C נקודה על $\overrightarrow{AM}$. נזיז את הקטע AC לאורך l בשני הכיוונים עד אינסוף (AC כל העת מאונך ל l). נסמן את המסלול CD ש C יוצר בתנועה זו l'. l' יקרא "<u>המקבילל</u> ל l דרך C". נסמן $l \,|||\, l'$ [150][2,עמ' 18-19].

משפט 3.13 l' - המקבילל ל l - הוא ה L של $\overrightarrow{CM}$ [2,עמ' 18].

ניתן לנסח משפט זה גם כך:

קווי-L של קרניים המתחילות מנקודות שונות על הציר של L, מקבילים ביניהם . או:

אם $\overrightarrow{AM}$ הוא ציר של קו-L l, אזי הוא ציר גם של כל קווי-L המקביללים ל l.[151]



שרטוט 3.19

באופן דומה נגדיר יחס הקבללה בין ישר לעקומה:

הגדרה 3.8 אם $AC \perp AB$, נזיז את הקטע AC לאורך AB (כאשר הוא נשאר כל העת מאונך

[149] π מוגדר כמחצית ההיקף של מעגל ב-F ברדיוס 1, או כמספר ...3.1415926 .

[150] במקור [3] יחס זה מסומן ע"י שני קווים להבדיל מיחס ההקבלה המסומן ע"י 3 קווים.

[151] בגיאומטריה האוקלידית קווי-L הם ישרים, ומקביללים הם מקבילים רגילים, ולכן-משמעות משפטים אלו היא: כל הישרים המאונכים לישר אחד (המשמש כאנך משותף), מקבילים ביניהם או-
ישר m המאונך לישר l, מאונך גם לכל הישרים שמקבילים ל- l. ומכאן שמשפט זה הוא משפט אבסולוטי ונכון בשתי הגיאומטריות.

ל AB). המסלול CD ש C יוצר בתנועה זו יקרא "המקביליל לישר AB דרך C". נסמן

$CD|||AB$

[2,עמ' 21-23].

מקביליל זה הוא עקומה (על-אף שבוליי לא מזכיר זאת באופן מפורש). עקומה זו נקראת עקומה שוות מרחק ו AC הוא הציר שלה. AB נקרא ישר הבסיס.

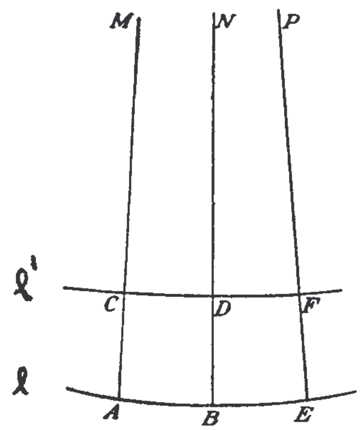
הערה עקומה שוות מרחק היא קו אחיד.

בהמשך מעיר בוליי כי הקווים האחידים היחידים ב H , הם: קווי-L, מעגלים ועקומות שוות מרחק [2, עמ' 31].

מההגדרות הנ"ל ברור כי כל הקטעים של הצירים הנמצאים בין שני המקבילילים, (בשני המקרים), הם באותו אורך. במילים אחרות: המקביליל לישר או לקו-L AB הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות מצד אחד של AB, ומרחקן מ AB קבוע.

מרחק בין קווים מקבילילים יוגדר כאורך קטע הציר שבין המקבילילים. (במקרה שלנו $\overline{AC}$).

מרחק בין ישרים מקבילים AM ו BN בנקודה A, יוגדר כאורך הקשת AB של קו-L שלהם. לפי ההגדרות לעיל המרחק בין קווים מקבילילים הוא קבוע, אך המרחק בין ישרים מקבילים ב H הולך וקטן בכיוון ההקבלה.[152]



שרטוט 3.20

למה הצירים של קווי-L מקבילילים, מחלקים אותם באותו יחס. כלומר: בהינתן שני קווי- L מקבילילים l ו l' , $A,B,E \in l$, $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{EP}$ צירים של l (כאשר כיוון ההקבלה של הצירים הוא מ l ל l') ו C,D,F נקודות החיתוך של הצירים הנ"ל עם l' בהתאמה, אם $AB=BE$ אזי גם $CD=DF$[153] . ולכל שלוש נקודות E,B,A על l כך ש $AB=n\cdot CD$ יתקיים גם $AE=n\cdot CF$, כלומר, תמיד מתקיים היחס[154] $AB/CD = AE/CF$

[152] חשוב לשים לב כי בוליי איננו מתייחס לשאלה מהו אורך וכיצד ניתן למדוד אותו, וכן מהי הגדרת מרחק בין ישרים או בין קווי-L. הוא מתייחס לעניין האורך באופן אינטואיטיבי ומסתמך בכך על אקסיומות החפיפה של הילברט בלי לציין זאת ומבלי שיהיה מודע לכך.

(זאת גם אם הקטעים פרופורציונאליים וגם אם לא). יחס זה איננו תלוי בגודל הקשת AB , אלא נקבע באופן ישיר על פי אורך הקטע AC על הציר [2,עמ' 19] [155].

במילים אחרות: היחס בין אורכי קטעים של קווי-L מקבילים נקבע אך ורק ע"פ המרחק בין המקבילים, ולא ע"פ המרחק שבין הצירים.

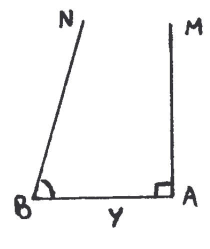
סימון עבור קטע AC שאורכו יסומן ע"י אות קטנה (לדוגמא x), נסמן את היחס המתאים AB/CD ע"י האות הגדולה המתאימה (לדוגמא X) [2, עמ' 19]. X יקרא "<u>יחס ההקבלה</u> של x".

ברור כי ב E יחס ההקבלה הוא 1 לכל x , היות והמרחק בין המקבילים AM ו BN נשאר קבוע בכל נקודה.לעומת זאת ב H יחס ההקבלה גדול תמיד מ 1 והוא הולך וגדל ככל ש x גדל, כיוון שהמקבילים הולכים ומתקרבים זה לזה.

נשים לב כי לכל קו-L ABE ניתן למצוא קו-L נוסף CDF כך ש $CDF|||ABE$ ואורך הקשת CDF שווה לאורך הקשת AB (זאת היות והצירים הולכים ומתקרבים), ומכך מתקבלת העובדה המוזרה כי $AMBN \cong AMEP$ למרות ש $AMBN$ מוכל בתוך $AMEP$. במילים אחרות: החלק האינסופי של המישור הנמצא בין שני ישרים מקבילים הוא קבוע לכל זוג של מקבילים שניקח[156]. על כך מעיר בוליי כי עובדה זו אמנם מוזרה, אך אין בה כדי להצביע על סתירה ב H.

משפט 3.14 לכל x,y מתקיים $Y = X^{y/x}$ [2,עמ' 19] [157].

ממשפט זה נובע בפשטות כי אם $q=y-x$ אזי $Q=Y/X$.



שרטוט 3.21

לצורך פישוט הדיון בהמשך נוסיף כאן מונח חדש:

הגדרה 3.9 אם $BN||AM$ ו $AB\perp AM$, הגודל של הקטע AB יסומן y , נקרא ל $\angle ABN$ "<u>זווית ההקבלה</u> של הקטע y".

---

[153] ניתן אף להרחיב ולומר- אם $AE=n\cdot AB$ (n שלם או שבר) אזי $CF=n\cdot CD$.
[154] בוליי מדבר על יחס בין קשתות, אך כוונתו היא ליחס שבין אורכי הקשתות. הוא משתמש בסימון AB הן עבור שם הקטע,והן עבור אורך הקטע, על פי ההקשר.
[155] ניתן להוכיח כי גם הצירים של עקומות שוות מרחק מחלקים אותן ביחס שווה. כלומר- הקשתות של עקומות שוות-מרחק פרופורציונאליות לקטעים שמקצים קצוות הצירים על ישר הבסיס, או על עקומה שוות מרחק אחרת בעלת אותם צירים.
[156] עובדה דומה היא כי אם $B \in \overrightarrow{AM}$ הקרן $\overrightarrow{AM}$ חופפת לקרן $\overrightarrow{BM}$ למרות ש- $\overrightarrow{AM} \subset \overrightarrow{BM}$.
[157] ההוכחה פשוטה ולא חשובה במיוחד.

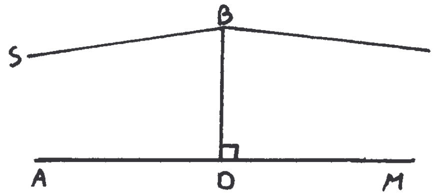
בהמשך נוכיח כי זווית זו תלויה בגודל הקטע y, ולכן נסמנה $\Pi(y)$.

הערה בוליי איננו משתמש במושג זה (המופיע אצל לובצ'בסקי), אך הוא נעזר בחישוביו בזווית הנ"ל מבלי שיקרא לה בשם מיוחד.

מחישוביו בהמשך רואים כי הוא מניח על זווית ההקבלה מספר הנחות מבלי לציין זאת:

- לקטעים שווים, זוויות הקבלה שוות.

מכאן נובע גם: אם נוריד מנקודה כלשהי B אנך BD לישר AM ונעביר מ B מקבילים BS ו BT לקרניים $\overrightarrow{DA}$ ו $\overrightarrow{DM}$ בהתאמה, אזי זווית ההקבלה לצד ימין שווה לזווית ההקבלה לצד שמאל.



שרטוט 3.22

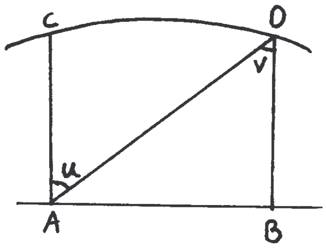
ולהפך: אם הזוויות משני צידיו של BD שוות, וידוע כי קרן אחת (לדוגמא $\overrightarrow{BT}$) מקבילה ל DM, אזי גם $DA||BS$.

– ככל שמקטינים את הקטע y , זווית ההקבלה $\Pi(y)$ גדלה.

- לכל זווית חדה α קיים קטע באורך y כך ש α היא זווית ההקבלה של הקטע.

משפט 3.15 אם CD עקומה שוות מרחק ל AB,ו AC ו BD צירים, נסמן את הזוויות שיוצר הקטע AD עם הצירים AC ו BD v,u בהתאמה. אזי: $CD/AB=\sin u/\sin v$ [2,עמ' 21].

בדומה ליחס ההקבלה יחס זה הוא יחס קבוע, הנקבע רק ע"פ המרחק בין המקבילים ואיננו תלוי באורך הקטע AB. אם המרחק בין המקבילים הוא x , נסמן את היחס המתאים לו $X' = CD/AB = \sin u / \sin v$.

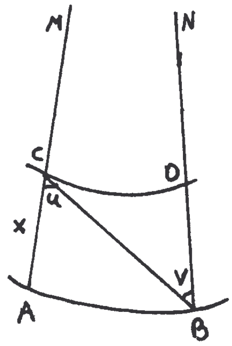


שרטוט 3.23

אם AC נע לאורך הישר AB עד אינסוף ו BD נשאר קבוע במקומו , אז $u \to \pi/2$ ו $v \to \Pi(x)$ ולכן

$$X' = 1/\sin\Pi(x) \qquad (3.1)$$

משפט 3.16 אם AB ו CD שני קווי-L מקבילים



שרטוט 3.24

במרחק x, נסמן את הזווית שיוצר הקטע BC עם הצירים AC ו BD v,u בהתאמה, אזי $X=\sin u/ \sin v$ [2,עמ' 23].[158]

תוצאה אם המרחק בין שני קווי-L מקבילים AB ו CD הוא x ו $\angle BCA=\pi/2$. נסמן את אורך הקטע BC באות y, אזי $X=1/\sin \Pi(y)$.

<u>במילים אחרות</u>: אם נוריד מנקודה B על קו-L, אנך BC באורך y לציר AM של L, אזי יחס ההקבלה המתאים לקטע AC הוא $1/\sin \Pi(y)$.

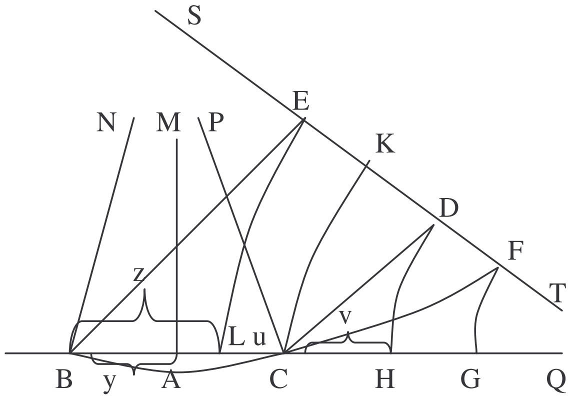
בעזרת משפט זה ניתן לנסח משפט אודות הקשר שבין יחס ההקבלה של קטע y לזווית ההקבלה של הקטע:

משפט 3.17 [ב H], לכל קטע y , מתקיים

$$Y = \cot \frac{\Pi(y)}{2} \qquad (3.2)$$

[2,עמ' 23].

הוכחה[159] מנקודה A על הישר IQ נעלה אנך AM לישר, ונסמן משני צידי A קטעים $AB=AC$ באורך y. מנקודות B ו C נעביר מקבילים BN ו CP ל AM.



שרטוט 3.25

$\Pi(y)= \angle ABN=\angle ACP$, נסמן זווית זו ב u. בעזרת הישר CD נחצה את זווית PCQ ($\angle PCD=\angle DCQ$). על סמך תכונות זווית ההקבלה שהבאתי בהערה לעיל, קיים ישר ST המאונך ל CD כך ש $DS||CP$ ו $DT||CQ$.[160] מנקודה B נוריד אנך BE ל DS . מטרנזיטיביות ההקבלה ואי התלות של המקבילים בנקודת ההתחלה מקבלים כי $ES||BN$ ו $ET||BQ$ ומכאן ש $\angle NBE=\angle EBQ=u/2$ (זווית ההקבלה של הקטע BE). יהי BCF קו-L של BN, ו CK,DH,FG ו EL קווי-L של CQ,DT,FT ו ET בהתאמה. נסמן את הקטע CH ב v ו

---

[158] משפט זה דומה מאד למשפט הקודם (למרות שההוכחה שונה בעיקרה), והוא מצביע על הדמיון הרב שבין שני היחסים X, ו- X'.

[159] למרות הסרבול הרב של ההוכחה, אני מביאה אותה בפירוט, בגלל חשיבותו של המשפט.

[160] זוויות PCD ו- DCQ הן זוויות חדות המשמשות כזווית ההקבלה של הקטע CD.

BL ב *z*. מהעובדה כי קווי-*L* מקבילים שומרים ביניהם על מרחק שווה וכן מהסימטרייה של קווי *L* של המקבילים לישר מצד ימין ומצד שמאל, נובע כי *CG=2CH=2v* וכן *BG=2BL=2z*. היות ו-*BC=BG-CG* נקבל (ע"י חלוקת המשוואה ב-2) *y=z-v* , ומכאן ע"פ משפט 3.14 *Y=Z/V*. אך מהתוצאה של משפט 3.16 נקבל

Z=1/sin u/2 (עבור הקטע *BL*) וכן *V=1/sin (π/2-u/2)* (עבור הקטע *CH*) ומכאן נקבל כי

$$Y=\frac{1/\sin u/2}{1/\cos u/2}=\cot\frac{u}{2} \qquad (3.3)$$

משפט זה שהוא משפט מפתח בגיאומטריה היפרבולית מבסס את הקשר שבין זווית ההקבלה של קטע, לגודל הקטע ומכאן גם ליחס ההקבלה המתאים לו.

כפי שנראה עוד בהמשך, אם *k* הוא אורך הקטע אשר יחס ההקבלה שלו *K* שווה לבסיס הלוגריתמים הטבעי - *e*, אזי ממשפט 3.14 נובע כי $Y=e^{y/k}$ וניתן לכתוב את נוסחה (3.2) גם כך:

$$e^{y/k}=\cot\frac{\Pi(y)}{2}. \qquad (3.4)$$

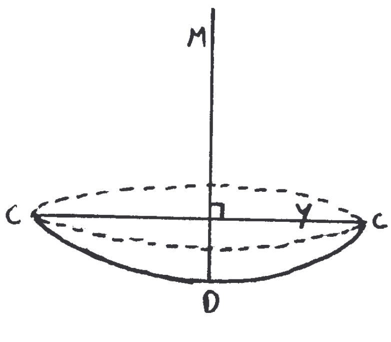
נעבור לבחון את הקשר שבין הגיאומטריה האבסולוטית והטריגונומטריות הספרית והמישורית. קיימות טריגונומטריות ספרית ומישורית ידועות ב E, השאלה היא: האם טריגונומטריות אלו זהות לטריגונומטריות ב H או שונות מהן?

הגדרה 3.10 מצולע ישר מצולע אשר צלעותיו הן קווים ישרים (בניגוד למצולע הנוצר מקווי-*L*).

משפט 3.18 ב H, היחס בין היקפי המעגלים הבנויים על צלעות משולש ישר כרדיוסים, הוא כיחס סינוס הזוויות שמול אותן צלעות [2,עמ' 20].

הוכחת משפט זה שהוא משפט מפתח בגיאומטריה המישורית ב H מסתמכת על שתי עובדות חשובות:

- העובדה כי בניגוד לכך שהגיאומטריה הלא-אוקלידית במישור איננה ידועה לנו (ומכאן כי גם

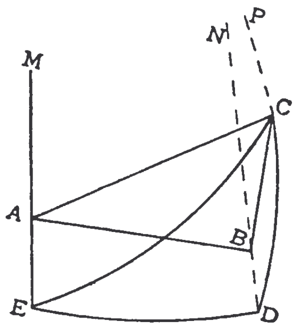


שרטוט 3.26

לא ידוע לנו מהו היקף מעגל בגיאומטריה זו), ב F ידוע כי מתקיימת הגיאומטריה האוקלידית, כאשר קווי-L מחליפים ישרים.

- העובדה כי אם נסובב ב F קו-L CD מסביב לנקודה קבועה עליו D, יתקבל "מעגל" ב F ששווה בהיקפו להיקף של מעגל מישורי שרדיוסו הוא (קו ישר) y - האנך מנקודה C לציר של F מנקודה D.

הוכחה [161] יהי ABC משולש ישר. $\angle ABC$ זווית ישרה. AM מאונך למישור של המשולש, BN ו CP מקבילים ל AM, דרך B ו C, במישור של הצלעות AB ו AC בהתאמה. נבנה מנקודה C את F של הציר $\overrightarrow{CP}$, ונסמן את החיתוך שלו עם המישורים העוברים דרך צלעות המשולש AB,BC,AC ב ED,DC,EC בהתאמה. מתקבל משולש ישר-זווית אשר צלעותיו הן קווי-L. במשולש זה ידוע כי מתקיימת הגיאומטריה האוקלידית, ולכן:



שרטוט 3.27

$$EC/DC=1/\sin DEC=^{162}1/\sin CAB \quad (3.5)$$

מאותה סיבה ידוע גם כי $h_F{}^\circ r=2\pi r$ ומשום כך

$$EC/DC=h_F{}^\circ EC/\ h_F{}^\circ DC \quad (3.6)$$

והיות וכפי שציינו לעיל, ניתן להתייחס להיקף מעגל ב F בעל רדיוס (קו-L) באורך x, גם כהיקף של מעגל מישורי רגיל שרדיוסו (הישר) הוא חצי המיתר המתאים לקשת של קו-L באורך $2x$, לכן

$$h_F{}^\circ EC/\ h_F{}^\circ DC=\ h{}^\circ AC/\ h{}^\circ BC \quad (3.7)$$

וקיבלנו את המבוקש:

$$h{}^\circ AC/h{}^\circ BC=1/\sin CAB. \quad (3.8)$$

[161] ההוכחה מסתמכת על כך שהמשולש הוא ישר זווית, אך ניתן להרחיב אותה למשולש כללי בהסתמך על כך שכל משולש ניתן לחלוקה לשני משולשים ישרי זווית. (בוליי איננו טורח להוכיח זאת).

[162] ע"פ הגדרת זווית-L.

בגיאומטריה האוקלידית E, היקף מעגל בעל רדיוס a הוא כמובן $2\pi a$ ולכן $2\pi a:2\pi b=a:b$ ומשמעות משפטנו ב E היא

$$a/b/c=\sin A/\sin B/\sin C \qquad (3.9)$$

כלומר, משפט הסינוסים הרגיל. לעומת זאת, ב H היקף המעגל שרדיוסו x איננו $2\pi x$ כי אם גודל אחר שאותו נחשב בהמשך $\pi k(X-X^{-1})$ כאשר X הוא יחס ההקבלה של הרדיוס x, ו k הוא גודל שיוגדר להלן. היקף זה מתואר גם בעזרת $2\pi k \sinh\frac{x}{k}$ [163] ומכאן משמעות משפט זה ב H היא

$$\sinh\frac{a}{k}/\sinh\frac{b}{k}/\sinh\frac{c}{k}=\sin A/\sin B/\sin C \qquad (3.10)$$

ולכן ניתן להגדיר משפט זה כ"משפט הסינוסים ההיפרבולי" בגיאומטריה ההיפרבולית.

העובדה כי משפט הסינוסים ב E ,שהוא משפט חשוב מאד בטריגונומטריה האוקלידית, מתקיים גם בטריגונומטריה ב H, מחזקת מאד את ההשערה כי ב E וב H מתקיימת אותה טריגונומטריה.

משפט זה מוביל אותנו להוכחת משפט חשוב אודות הטריגונומטריה הספרית ב H. כחומר רקע נקדים מספר הגדרות הקשורות לגיאומטריה הספרית:[164]

3.11 הגדרות (על פי [1, עמ' 146-148])

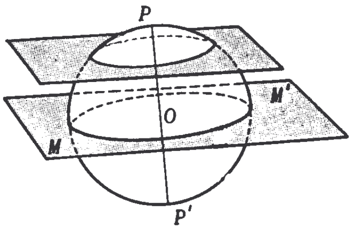
<u>מעגל ראשי</u> חיתוך הספירה עם מישור העובר דרך מרכז הספירה.

<u>ישר AB</u> המעגל הראשי העובר דרך נקודות A ו B[165].

<u>קטע AB</u> הקשת AB הקצרה ביותר על הישר AB.

<u>אורך של קטע AB על הספירה</u> יוגדר כגודל הזווית המרכזית AOB הנוצרת ע"י חיבור A ו B עם מרכז הספירה O.[166]

<u>קטבים של מעגל</u> שתי נקודות החיתוך (P',P בשרטוט 3.28)



שרטוט 3.28

---

[163] סינוס היפרבולי ע"פ ההגדרה המקובלת- $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

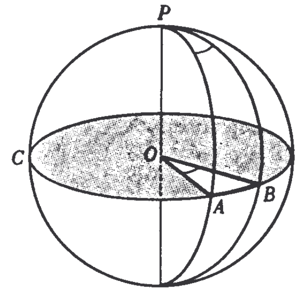
[164] בוליי איננו מגדיר הגדרות אלו ולא נותן כל הסבר או הקדמה לנושא, אלא משתמש במושגים ללא הגדרה, אך נראה מעבודתו כי הוא פועל ע"פ ההגדרות המקובלות כדלקמן.

[165] אם A ו-B אינם בשני קצות קוטר, מעגל כזה הוא יחיד.

[166] על פי זה, היות ואורך קטע נמדד ברדיאנים, יחידות המדידה של זוויות, אפשר לדבר על המושג "סינוס של צלע".

של הספירה עם הקוטר של הספירה המאונך למישור של המעגל.[167]

<u>זווית ספרית</u> הזווית על הספירה שנקבעת מחתוך קשתות של שני מעגלים ראשיים. קשתות אלו תקראנה שוקי הזווית, ונקודות החיתוך תהינה קודקוד הזווית. (יש כמובן שתי נקודות חיתוך, והזוויות לידן שוות).



שרטוט 3.29

בשרטוט 3.29 - APB זווית ספרית, ABC המעגל הראשי ש P הוא הקוטב שלו, O - מרכז הספירה. הזווית הספרית APB תוגדר כזווית שבין המישורים של המעגלים הראשיים שהקשתות שלהם הן שוקי הזווית - מישורים APO ו BPO. זווית זו היא הזווית המרכזית AOB השווה לגודל הקשת AB, ומכאן כי גודל הזווית הספרית APB הוא כאורך הקשת AB הכלואה בין שוקי הזווית על המעגל הראשי ש P הוא הקוטב שלו.

<u>משולש ספרי</u> החלק של הספירה המוגבל ע"י שלוש קשתות של מעגלים ראשיים. קשתות אלו נקראות צלעות המשולש, וקדקודי הזוויות הספריות נקראים קדקודי המשולש.

לאחר הקדמה זו נחזור לדיון בטריגונומטריה הספרית, ב H:

משפט 3.19 **בכל משולש ספרי היחס בין הסינוסים של הצלעות שווה ליחס שבין הסינוסים של הזוויות הנגדיות לצלעות** [2,עמ' 21].

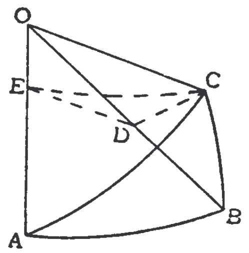
יהי ABC משולש ספרי. נסמן את צלעותיו a,b,c ואת הזוויות מול אותן צלעות A,B,C בהתאמה, אזי

$$\sin b/ \sin a = \sin B/ \sin A \qquad (3.11)$$

הוכחה[168] נתבונן במשולש ספרי ישר-זווית $\angle ABC = \pi/2$. נחבר את קדקודי המשולש למרכז הספירה - O, ונעביר דרך קדקוד C מישור שמאונך לרדיוס הספרה - OA, נקודות החיתוך של המישור עם OA,OB יסומנו E,D בהתאמה. ע"פ משפט 3.18 למשולשים CDO ו CEO נקבל

$$h°EC/\ h°OC/\ h°DC = \sin COE/1/\sin COD \qquad (3.12)$$

ולפי הגדרת זווית ספרית שהבאנו לעיל , זה שווה ל $\sin AC/1/\sin BC$.



שרטוט 3.30

---

[167] P',P הם קטבים של מעגל ראשי יחיד.

[168] שוב מדבר בוליי במשפט על משולש כללי, אך בהוכחה הוא מתייחס רק למשולש ישר-זווית, והמעבר ברור כמו במשפט הקודם.

מצד שני, ע"פ משפט 3.18 עבור משולש *CED* נקבל

$$h°EC/ h°DC = \sin CDE / \sin CED \qquad (3.13)$$

ומכאן כי

$$\sin AC / \sin BC = \sin CDE / \sin CED \qquad (3.14)$$

אך היות ו $\angle CDE=\angle CBA=\pi/2$ ו $\angle CED=\angle CAB$ קיבלנו

$$.\sin AC / \sin BC = 1/\sin CAB \qquad (3.15)$$

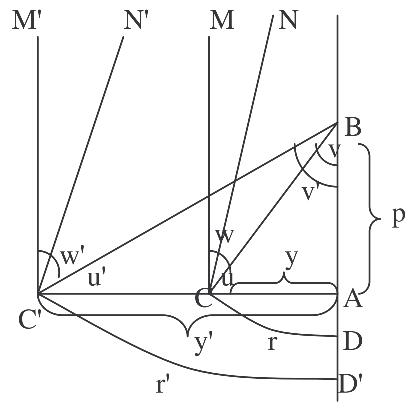
מסקנה אנו מקבלים כי בטריגונומטריה הספרית ב H מתקיים היחס

$$\sin a = \sin A \cdot \sin b \qquad (3.16)$$

יחס זה זהו יחס בסיסי הידוע לנו מהטריגונומטריה הספרית ב E, לגבי משולש ספרי ישר-זווית, כאשר הזווית הישרה היא *B*, ונוסחה זו, ביחד עם מספר נוסחאות נוספות השקולות לה ועוד נוסחאות שנובעות ממנה, מהוות את הבסיס לטריגונומטריה הספרית ב E,ומכאן שהמשך פיתוחה של נוסחה זו ב H, יוביל לטריגונומטריה ספרית ב H הזהה לזו שב E. המסקנה העולה מכך היא כי הטריגונומטריה הספרית נכונה באופן אבסולוטי ב E וב H, ואיננה תלויה בנכונות אקסיומת המקבילים. מעניין לשים לב כי לובצ'בסקי הגיע בדיוק לאותה מסקנה מכיוון שונה לגמרי, גם הוא בהסתמך על משוואות טריגונומטריות של משולש ספרי ישר-זווית.

לאחר שמצאנו כי הטריגונומטריה הספרית נכונה באופן אבסולוטי, עובר בוליי לבחון מהו היחס בין הטריגונומטריה המישורית ב E והטריגונומטריה המישורית ב H. לצורך כך מגדיר בוליי מושג חדש k[169] אשר יהווה אבן פינה של הטריגונומטריה המישורית הלא-אוקלידית:

משתי נקודות *A* ו *C* על ישר נתון נעלה אנכים *AB*



שרטוט 3.31

[169] בוליי מסמן אותו בעזרת האות *i*. אני שיניתי את הסימון לאות *k*, על מנת שלא ייווצר בלבול עם $i=\sqrt{-1}$.

ו CM. B נקודה כלשהי על הקרן $\overrightarrow{AB}$, נסמן את AB ב p, ו AC ב y. נסמן את הזוויות המתקבלות בין הקטע BC ל p,y, CM, באותיות w,v,u בהתאמה.

ממשפט 3.18 נקבל

$$sin\ u/\ sin\ v = \text{h}^\circ\text{p}/\ \text{h}^\circ\text{y} \tag{3.17}$$

אם נחזור על אותו תהליך לגבי נקודה אחרת C' בהמשך הישר AC כאשר את כל הסימונים שהגדרנו - w,v,u,y וכו'... נסמן כעת בעזרת ' מעל האות המתאימה, נקבל גם כאן ממשפט 3.18 כי $\sin u'/\sin v' = h^\circ p/h^\circ y'$. מכאן נובע כי $h^\circ p = \dfrac{sin\,u}{sin\,v}\cdot h^\circ y = \dfrac{sin\,u'}{sin\,v'}\cdot h^\circ y'$. ממשפט 3.15 $sin\ v\ /\ sin\ w$ הוא מספר קבוע, ומכאן $\dfrac{sin\,v}{sin\,v'} = \dfrac{sin\,w}{sin\,w'} = \dfrac{cos\,u}{cos\,u'}$ ולכן מקבלים $\dfrac{sin\,u}{cos\,u}\cdot h^\circ y = \dfrac{sin\,u'}{cos\,u'}\cdot h^\circ y'$ או במילים אחרות

$$h^\circ y/h^\circ y' = \tan u'/\tan u = \cot u/\cot u' \tag{3.18}$$

נעביר כעת מ C מקביל CN ל AB, ו CD קו-L של CN ו AB, נסמן את האורך של CD באות r. $\angle ACN = \Pi(y)$ (נבצע פעולות דומות לגבי C'). ממה שהסברנו לעיל (כי אם נחליף את הישרים בקווי-L, אז הגיאומטריה ב F היא הגיאומטריה האוקלידית) נובע כי

$$h^\circ y/h^\circ y' = h_F^\circ r/h_F^\circ r' = r/r' \tag{3.19}$$

כלומר, $r/r' = \cot u/\cot u'$. אם ניתן ל B לשאוף לאינסוף על הקרן AB הרי ש $u\rightarrow\Pi(y)$ וכן $u'\rightarrow\Pi(\ y'\ )$ ולכן $r/r' = \cot\Pi(y)/\cot\Pi(y')$ וקיבלנו כי $\dfrac{r}{cot\ \Pi(y)}$ הוא קבוע שאיננו תלוי ב r (וממילא גם לא ב y וב $\Pi(y)$). נסמן את קבוע זה באות k

$$k = \frac{r}{\cot\Pi(y)} \tag{3.20}$$

אם ניתן ל y לשאוף ל 0, הרי ש $r\rightarrow y$[170] ומכאן $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{r}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{k\cdot\cot\Pi(y)}{y} = 1$ כלומר:

[170]אפשר לומר כי כאשר $y\rightarrow 0$, r עובר תהליך של "יישור" קו-L, והוא הולך ומתקרב לישר y.

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\cot\Pi(y)}=k \tag{3.21}$$

ממשפט 3.17 נובע כי

$$\cot\Pi(y)=\frac{Y-Y^{-1}}{2} \tag{3.22}$$

ולכן $\lim_{y\to 0}\frac{2y}{Y-Y^{-1}}=k$ או באופן אחר $\lim_{y\to 0}\frac{2y\cdot K^{\frac{y}{k}}}{K^{\frac{2y}{k}}-1}=k$ אך אם נחשב את הגבול של ביטוי זה

כאשר $y\to 0$ נמצא כי הוא $\frac{k}{\ln K}$ ומכאן מקבלים כי $\frac{k}{\ln K}=k$, כלומר

$\ln K=1$ $K=e=2.7182818...$.

משמעות מה שקיבלנו היא כי הגודל שהוגדר כ $\frac{r}{\cot\Pi(y)}$ הוא גודל הקטע k שיחס ההקבלה שלו הוא e בסיס הלוגריתמים הטבעי, ולכן אפשר לומר, באופן דומה, כי נבחר את k כיחידת האורך הטבעית.

מההגדרה ברור כי k מוגדר ב H אך איננו מוגדר ב E (היות ולא קיים ב E אף גודל שיחס ההקבלה שלו שונה מ 1) ולכן גודל זה מהווה בסיס לטריגונומטריה מישורית לא אוקלידית.

בעזרת k, ובעזרת המשפטים ב H שהגענו אליהם עד כאן, ניתן לנסח משפטים בדבר היחסים הקיימים ב H, בין צלעות וזוויות במשולש ישר-זווית. כמו כן ניתן להגיע לנוסחאות של היקף, שטח או נפח של גופים שונים ב H. נוסחאות ומשפטים אלו ישמשו כבסיס לטריגונומטריה ההיפרבולית. לדוגמא: ע"פ מה שהוכחנו $h^\circ y = h_F{}^\circ r = 2\pi r$ ולכן אם $r=k\cdot\cot\Pi(y)$ אז

$$h^\circ y = 2\pi k\cdot\cot\Pi(y)=\pi k(Y-Y^{-1})=2\pi k\sinh\frac{y}{k} \tag{3.23}$$

כלומר, היקף מעגל בעל רדיוס y בטריגונומטריה ההיפרבולית הוא

$$h^\circ y=\pi k\,(Y-Y^{-1}) \tag{3.24}$$

הערה ע"פ משפט 3.14, אפשר לסמן את Y גם כ $e^{\frac{y}{k}}$, וכנ"ל גם לכל יחסי ההקבלה הבאים.

משפטי היסוד בדבר הקשר שבין צלעות לזוויות במשולש ישר-זווית שאותם מוכיח בוליי הם (כאשר b,a הם ניצבים, הזוויות שמולם יסומנו α ,β בהתאמה, ו c הוא היתר) :

(3.25)   היחס בין c,a,α

$$1/\sin\alpha = (C - C^{-1})/(A - A^{-1}) = \sinh\frac{c}{k} / \sinh\frac{a}{k}$$

(3.26)   היחס בין a,β,α

$$\cos\alpha / \sin\beta = 1/2(A + A^{-1}) = \cosh\frac{a}{k}$$

(3.27)   היחס בין a,b,c

$$1/2(C + C^{-1}) = 1/2(A + A^{-1}) \cdot 1/2(B + B^{-1})$$

$$(C - C^{-1})^2 = 1/4(A + A^{-1})^2 \cdot (B - B^{-1})^2 + (A - A^{-1})^2$$

(3.28)   היחס בין c,β,α

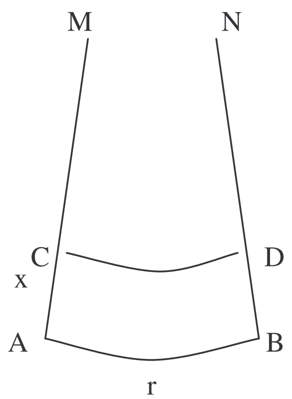
$$\cot\alpha \cdot \cot\beta = 1/2(C + C^{-1}) = \cosh\frac{c}{k}$$

נוסחאות נוספות אודות משוואה של עקומה, היקף, שטח, או נפח גופים ב H שאליהן מגיע בוליי בעזרת גזירה, אינטגרציה, ועוד... הן:

- הנוסחה של קו-L באורך r השווה ל $k \cdot \cot \Pi(y)$ (באותו מובן כפי שראינו לעיל).

- שטח מעגל בעל רדיוס y הוא $S°y = \pi k^2[Y - 2 + Y^{-1}]$

- השטח הכלוא בין שני קווי-L מקבילים AB ו CD הנמצאים במרחק x זה מזה ושני צירים שלהם BN,AM הנמצאים בנקודה A במרחק r זה מזה הוא $rk \cdot [1 - X^{-1}]$.



שרטוט 3.32

כאשר x שואף לאינסוף $e^{\frac{-x}{k}} \to 0$ ומשום כך שטח המרובע הפתוח $MABN$ הכלוא בין שני ישרים מקבילים AM ו BN, הנמצאים בנקודה A במרחק r זה מזה הוא rk.

- בהמשך מוכיח בוליי כי שטח מעגל ב F שרדיוסו הוא קו-L $2r$ שווה לשטח המעגל (הרגיל) שרדיוסו (הישר) הוא המיתר $2y$ המתאים לקשת $2r$. כלומר: $s_F°2r = s°2y$. בעזרת יחס זה מוכיחים כי השטח של פלח z על הספירה, המתאים לזווית המרכזית $2u$ שווה לשטח המעגל שרדיוסו הוא המיתר המתאים לזווית מרכזית u. ומכאן הוא מגיע למסקנה כי שטח פני הספירה כולה שווה לשטח המעגל שרדיוסו הוא הקוטר של הספירה. ע"פ חישוב מקבלים כי:

- שטח פני הספירה הוא $\frac{p^2}{\pi}$ כאשר p הוא היקף מעגל ראשי של הספירה.

- נפח כדור בעל רדיוס y הוא

$$1/2\pi k^3(Y^2 - Y^{-2}) - 2\pi k^2 y \quad (3.29)$$ [171]

בכל הביטויים הנ"ל מתברר כי כאשר אנו פועלים תחת ההנחה כי k אמנם מוגדר (כלומר אנחנו ב H), אם נתעלם מכך ש k הוא גודל קבוע, וניתן ל k לשאוף לאינסוף, נקבל את הביטויים המוכרים לנו מהגיאומטריה האוקלידית !

כך לדוגמא מהנוסחאות של המשולש ישר-הזווית נקבל:

מ (3.25) $$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$$

מ (3.26) $$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = 1$$ ומכאן כי $\alpha+\beta=\pi/2$.

ומ (3.27) נקבל את משפט פיתגורס $c^2=a^2+b^2$.[172]

ונוסחאות אלו ידועות כנוסחאות היסוד של טריגונומטריה מישורית ב E. כמו כן מקבלים כי:

- היקף מעגל בעל רדיוס y הוא $2\pi y$.
- שטח מעגל בעל רדיוס y הוא πy^2 .
- נפח כדור בעל רדיוס y הוא $\frac{4}{3}\pi y^3$.
- (נוסחת שטח פני הספירה נכונה ללא תנאי, היות והגודל k לא מוזכר כלל בנוסחה).

במובן זה ניתן לומר כי הטריגונומטריה המישורית נכונה בכל מקרה, ללא תלות בשאלה באיזו גיאומטריה אנחנו פועלים, כאשר בהנחה כי אמנם קיים k כזה, אם אנחנו ב H – k יציין את הגודל הקבוע שעבורו יחס ההקבלה הוא e, והנוסחאות הטריגונומטריות ב H הן אלה אשר הופיעו לעיל, ואם אנחנו ב E, נחליף את ביטויים אלו בגבול של אותם ביטויים כאשר k שואף לאינסוף. (הביטויים אשר אינם מכילים את הגודל k נכונים באופן אבסולוטי ללא תלות בתנאי כלשהו).

---

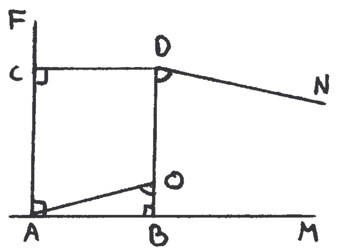
[171] ליתר פירוט של כל החישובים ראה [2, סעיפים 30-32, עמודים 24-34].

[172] אביו של בוליי, Farkas Bolyai, מראה בנספח שלו לעבודת בנו, כיצד אם נתבונן בפיתוח טיילור של $e^{\frac{c}{k}} + e^{\frac{-c}{k}}$ וניתן ל- k לשאוף לאינסוף, נקבל את משפט פיתגורס מהנוסחה הנתונה.

משמעות מה שקיבלנו עד עתה היא כי אמנם לא ידוע איזו גיאומטריה היא ה"מציאותית" - E או H - אך הוכחנו קיומה של טריגונומטריה מישורית הנכונה באופן אבסולוטי (במובן שתואר לעיל), גם כאשר לא ידוע האם אנחנו ב E או ב H. [הדבר היחידי שנותר לא ידוע הוא הגודל הממשי של ביטויים אלו (היות ולא ידוע באיזה מובן לוקחים את k), אך מספיק שנדע מהו הגודל בביטוי יחיד על-מנת שנדע כבר הכל (כיוון שנדע אם אנחנו ב E או ב H)]. נוסף לכך הוכחנו גם כי הטריגונומטריה הספרית נכונה באופן אבסולוטי ללא תלות בקביעת E או H. וכן,כי הגיאומטריה והטריגונומטריה האוקלידית מתקיימות על F. עובדות אלו ודאי עודדו מאד את בוליי להאמין כי על-אף שאין לו הוכחה שאמנם קיים מודל המקיים את הגיאומטריה ההיפרבולית, עדין ישנו יסוד מוצק מאד להשערה כי גיאומטריה כזו אמנם אפשרית. כלומר קיימות שתי מערכות גיאומטריות שונות, אחת מהן מסתמכת על אקסיומת המקבילים, ואחת על שלילתה ואין ביניהן סתירה, שתיהן נכונות באותה מידה.[173]

הנושא הבא שבוליי מתייחס אליו הוא נושא הבניות הגיאומטריות. כיצד ניתן לבנות באופן מעשי מונחים שדיברנו עליהם, בעזרת סרגל ומחוגה. נושא זה יוביל אותו בהמשך להוכחה כי ב H ניתן לבנות מרובע השווה בשטחו לשטח מעגל בעל רדיוס נתון r. בעיה זו, הנקראת "בעיית ריבוע המעגל" , העסיקה מתמטיקאים רבים אשר לא הצליחו להוכיח אותה עד אז בגיאומטריה האוקלידית, ומאוחר יותר אף הוכח כי משימה כזו היא בלתי אפשרית ב E. אך תחילה נפנה לבניות הגיאומטריות:[174]

משפט 3.20 דרך נקודה D שאיננה על AM, ניתן להעביר מקביל לישר AM במישור T באופן הבא :[2,עמ' 37]:



שרטוט 3.33

הורד מ D אנך לישר.[175] סמן את נקודת החיתוך עם הישר באות B. מנקודה A כלשהי על הישר העלה אנך AF לישר AB. הורד מ D אנך ל AF. סמן את נקודת החיתוך באות C. מסביב לנקודה A שרטט מעגל שרדיוסו הוא CD. מעגל זה יחתוך את הישר BD בנקודה B או בנקודה O בין B

---

[173] בנקודה זו סיכם לובצ'בסקי את הדיון אודות הגיאומטריה ההיפרבולית, אך בוליי ממשיך כאן במספר נושאים נוספים.

[174] היות ונושא זה איננו מהותי להוכחה כי קיימת גיאומטריה H, שונה מ-E אך עקבית כמוה, לכן אביא כאן את תיאור הבניות בלבד, ללא ההוכחות.

[175] מכאן ואילך כל הבניות מתבצעות במישור T.

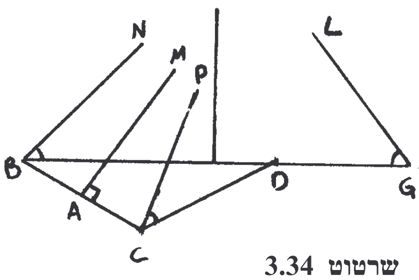
ל D. במקרה הראשון ($AB=CD$) אנו נמצאים ב E, וזווית ההקבלה לקטע BD (כמו לכל קטע אחר) היא זווית ישרה, ולכן אם נעביר מ D אנך ל BD נקבל את המבוקש.

במקרה השני ($AB<CD$) אנו נמצאים ב H. במקרה זה $\angle AOB$ היא זווית ההקבלה לקטע BD. נעתיק זווית זו מנקודה D כך ש BD שוק אחת של הזווית ו DN השוק השנייה, וקיבלנו את המקביל DN לישר AM.

משפט 3.21 ב H, לכל זווית חדה נתונה u ניתן למצוא את הקטע y המתאים כך ש u תהיה זווית ההקבלה של הקטע. או במילים שלו:

לכל זווית חדה, ניתן לשרטט ישר שיהיה מאונך לשוק אחת של הזווית ומקביל לשוק השניה [2,עמ' 38].

הוכחה [176] נתונה $\angle NBG=u$, אנו מחפשים נקודה K על הקרן $\overrightarrow{BG}$, כך שאם נשרטט ממנה מקביל KL ל BN (ע"פ משפט 3.20) אזי נקבל כי גם $\angle BKL=u$.



שרטוט 3.34

כלומר מחפשים את נקודת החיתוך של L של BN עם הישר BG. ע"פ טענת עזר 1 למשפט 3.5 האנך האמצעי לקטע הוא הישר המבוקש (מאונך לשוק אחת ומקביל לשנייה), וחצי הקטע BK הוא הקטע ש u היא זווית ההקבלה שלו.

על-מנת למצוא את נקודה זו, יהי $AM\perp AB$. משני צידי A נקצה שני קטעים שווים $AB=AC$ ונשרטט מקצותיהם מקבילים ל AM (ע"פ משפט 3.20) $CP||BN||AM$, כך ש $\angle ABN>u$[177]. נעתיק את זווית u הנתונה על הקרניים $\overrightarrow{CP}$ ו $\overrightarrow{BN}$, זוויות NBG ו PCD שוות לזווית u הנתונה. בוליי מוכיח כי CD חייב לחתוך את הקרן $\overrightarrow{BG}$. נסמן את נקודת החיתוך D. על הקרן $\overrightarrow{BG}$ נבנה $DG=DC$. אפשר להוכיח כי נקודה G נופלת על נקודה K המבוקשת. ולכן כאמור,אם נשרטט אנך אמצעי לקטע BG נקבל את המבוקש.

176 בנייה זו בצירוף ההוכחה מורכבת מעט, לכן אשמיט חלק מהפרטים הקשורים להוכחת הבנייה.

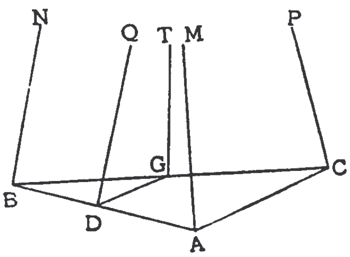
177 בוליי מעיר כי ניקח את הקטע AB "מספיק קטן" כך ש-$\angle ABN>u$. בכך הוא מסתמך על התכונה שאומרת שככל שנקטין את קטע y זווית ההקבלה שלו תגדל, ולכן ניתן לקבל זווית הקבלה שתהיה גדולה מזווית חדה נתונה u.

משפט 3.22 ניתן למצוא את נקודת החיתוך של L של $\overrightarrow{BN}$, עם AM, המקביל ל $\overrightarrow{BN}$.

במילים שלו: נמצא את נקודה A על AM המקביל לקרן $\overrightarrow{BN}$ שעבורה $AM\underline{\Omega}BN$ [2,עמ' 40].[178]

לצורך ההוכחה, אם נמצא ישר DQ שיהיה אנך אמצעים לקטע AB, הרי שיתקיים:

$\angle DBN=\angle DAM=\Pi(AB/2)$ וקיבלנו את המבוקש.

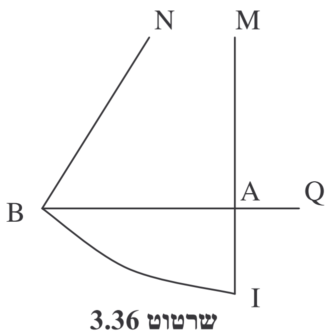


שרטוט 3.35

הוכחה נתונים ישרים מקבילים $AM||BN$ במישור T. נעביר מחוץ למישור T מקביל $GT||BN$ (ע"פ משפט 3.20), ונוריד לו מנקודה B אנך $BG\perp GT$. נבנה $GC=GB$, ובנקודה C נעביר מקביל נוסף $CP||GT$. נבנה את חצי המישור TGD כך שייצור עם חצי המישור TGB אותה זווית שיוצרים חצאי המישורים CPA ו CPB. ע"פ משפט אחר שמוכיח בוליי ניתן למצוא באופן ממשי את ישר החיתוך DQ של חצאי המישורים TGD ו NBD. אם נוריד מ B אנך לישר DQ, המשכו יחתוך את הישר AM, בנקודה A המבוקשת.כלומר $BD=DA$ ו DQ הוא האנך האמצעי המבוקש לקטע AB.

על סמך כך אנו יכולים לשרטט קווי-L ע"פ הקצוות שלהם, ובעזרתם ניתן לבצע ב F את כל הבניות הגיאומטריות הניתנות לביצוע במישור ב E, כאשר את הישרים מחליפים קווי-L. דוגמא לבנייה גיאומטרית אפשרית: חלוקת זווית למספר חלקים שווים (בתנאי שהדבר אפשרי גם ב E).

דבר זה ישמש את בוליי בבנייה הבאה:



שרטוט 3.36

משפט 3.23 בניית קטע באורך k (בקירוב) המתאים ליחס ההקבלה $K=e$ [2,עמ' 41]:

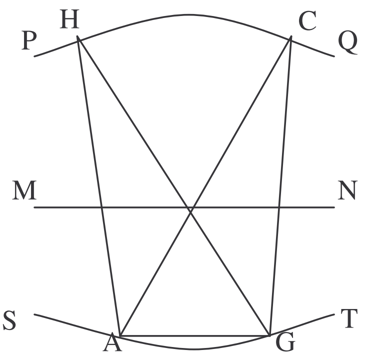
בנה $\angle NBQ=\alpha=\pi/6$. העבר אנך AM בקצה הקטע AB ש α היא זווית ההקבלה שלו (ע"פ משפט 3.21). מצא את נקודה $I\in AM$ כך ש $IM\underline{\Omega}BN$ (IB קו-L של BN ו IM) (ע"פ משפט 3.22). אם נסמן את אורך הקטע IA באות x, הרי שממשפט 3.16 $X=1:\sin\alpha=2$.

[178] במשפט 3.2 אנחנו מוכיחים כי אמנם קיימת נקודה כזו, וכאן אנחנו מסבירים כיצד למצוא אותה באופן ממשי.

כלומר, בנינו באופן גיאומטרי קטע באורך x שיחס ההקבלה שלו שווה ל 2. ניתן לבנות כך בקירוב את α שעבורה אורך הקטע IA יהיה קרוב ל k כרצוננו. כלומר, ניתן לבנות בקירוב את הזווית α כך ש $\sin\alpha = 1/e$.

הנושא הבא שאותו בוחן בוליי הוא: מהו הקשר בגיאומטריה ההיפרבולית בין שטח משולש לסכום זוויותיו? את נושא זה הוא בונה בהדרגה על ידי שורה של משפטים.

משפט 3.24[179] יהיו AGC ו AGH שני משולשים ישרים, כך ש AG מיתר לקשת של עקומה שוות מרחק הנמצאת במרחק x מישר הבסיס, ואשר הקדקוד הנוסף של המשולשים נמצא על עקומה שוות-מרחק אחרת הנמצאת גם היא במרחק x מישר הבסיס, אזי משולשים AGC ו AGH שווים בשטח ובסכום זוויותיהם [2,עמ' 41].[180]



שרטוט 3.37

לצורך הוכחה נעביר במישור שני קווים PQ ו ST (עקומות שוות מרחק) מקבילים לישר MN, ובמרחק שווה ממנו. על הקשת AG של הקו ST נבנה שני משולשים AGC ו AGH[181] אשר הקדקוד השלישי שלהם נח על PQ. בוליי מוכיח כי משולשים אלו שווים בשטח (באופן דומה לאופן שבו הוכיח אוקלידס את משפט 37 שלו), וכי סכום הזוויות בכל משולש כזה הוא π. מכאן נובע כי המשולשים הישרים AGC ו AGH גם הם משולשים שווי-שטח, וסכום זוויותיהם שווה, היות והישר AG חותך משני ה"משולשים" (הלא ישרים) אותו שטח, עם אותן זוויות[182].

---

[179] בוליי איננו מנסח משפט זה כך, אך זה מה שנובע מדבריו.

[180] משפט זה דומה למשפט 37 של אוקלידס, כאשר קווים מקבילים (או עקומות שוות מרחק) הם ישרים מקבילים.

[181] משולשים אלו אינם משולשים ישרים.

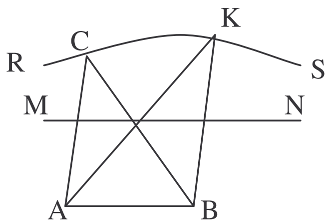
[182] הוכחה זו של בוליי איננה "הוכחה נקיה". הוא משתמש במשפטי החפיפה הרגילים עבור משולשים שאינם משולשים ישרים, מדבר על קשתות שוות מבלי להתייחס לשאלה כיצד ניתן למדוד אורך של קשת, ומניח שוויון של זוויות "מתחלפות" בין המקבילים (כנראה בהסתמך על ההנחה כי קיימת סימטריה בין שתי עקומות שוות מרחק, המקבילות לישר בסיס הנמצא במרחק שווה מהן).

משפט 3.25 למשולשים ישרים שווי-שטח, השווים בצלע אחת שלהם, יש אותו סכום זוויות [2,עמ' 42].

בהוכחה מראים כי אם המשולשים שווים בשטחם, אז הקדקוד השלישי שלהם הנמצא מול הצלע המשותפת,נח על הישר המקביל לקטע האמצעים של שתי הצלעות האחרות, ואז מקבלים את הנדרש ע"פ משפט 3.24.

משפט 3.26 לכל שני משולשים *ABC* ו *DEF* השווים בשטחם, יש אותו סכום זוויות [2, עמ' 43].

בהוכחה נעזרים במשולש נוסף *ABK*, כאשר אם *MN* קטע אמצעים של הצלעות *AC* ו *BC*, ו *RS* מקביל דרך *C* ל *MN*, אזי *K* נקודה על *RS* כך ש *AK=DF*. ממשפט 3.24 ΔABK שווה בשטחו וגם בסכום זוויותיו ל ΔABC. אך ממשפט 3.25 ל ΔABK יש גם אותו סכום זוויות כמו ל ΔDEF, ומכאן כי ל ΔABC ול ΔDEF אותו סכום זוויות.

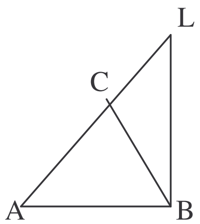


שרטוט 3.38

ב H גם ההפך נכון:

שני משולשים בעלי אותו סכום זוויות, שווים בשטחם [2,עמ' 43].

הוכחה נניח כי למשולשים *ABC* ו *DEF* אותו סכום זוויות, ומצד שני ΔABL ו ΔDEF הם משולשים שווי-שטח. ממה שהוכחנו לעיל נובע כי למשולשים *ABL* ו *DEF* אותו סכום זוויות, ומכאן גם לגבי משולשים *ABC* ו *ABL*. אך היוצא מכך הוא כי $\angle BCL+\angle BLC+\angle CBL=\pi$, בסתירה לכך שסכום הזוויות בכל משולש ב H קטן מ π [183], ולכן *L* נופל על *C*.



שרטוט 3.39

לאחר שביססנו את הקשר שבין שטח משולש לסכום זוויותיו ניתן לנסח את המשפט הבא:

הגדרה 3.12 <u>מגרעת משולש</u> (ב H) היא ההפרש שבין π לסכום זוויות המשולש, כלומר: π-*(A+B+C)* נסמן $\delta_{(ABC)}$.

[183] העובדה כי סכום הזוויות במשולש ב-H קטנה מ- π נובעת מהנוסחאות שהבאנו לעיל המבטאות את הקשר בין זוויות לצלעות במשולש ישר-זווית ב-H.

<u>עודף משולש</u> (על הספירה) הוא ההפרש שבין סכום זוויות המשולש ל π, כלומר $(A+B+C-\pi)$[184].

משפט 3.27 ב H, משולשים מתייחסים בשטחם זה אל זה כיחס המגרעת שלהם [2, עמ' 44] כלומר:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{\delta_{(ABC)}}{\delta_{(DEF)}} \tag{3.30}$$

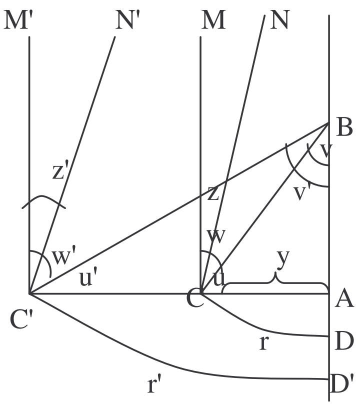
[185]בוליי מעיר כי ניתן להוכיח באותו אופן שעל הספירה, המשולשים מתייחסים בשטחם זה לזה, כיחס העודף שלהם[186].

קיבלנו כי ב H שטח כל משולש (מישורי או ספירי) הוא פונקציה של סכום זוויותיו. נמצא אם-כן מהו שטח משולש אשר המגרעת/ העודף שלו הוא z :

<u>על הספירה</u> נתבונן במשולש ספרי בעל שתי זוויות ישרות (על "קו המשווה") וזווית שלישית z ב"קוטב הצפוני". z מסמנת את העודף של המשולש. אם נסמן ב S את שטח המשולש, אז שטח פני הספירה כולה הוא $2 \cdot S \cdot \frac{2\pi}{z} = \frac{p^2}{\pi}$ (p היקף מעגל ראשי). ומכאן כי שטח כל משולש ספרי בעל עודף z הוא $\frac{zp^2}{4\pi^2}$.

<u>במישור</u> אם נתבונן שוב בשרטוט 3.31 שבנינו לצורך הגדרת k , נסמן ב z את הזווית שמשלימה את $\Pi(y)$ ל $\pi/2$. כאשר B שואף לאינסוף על הישר AB $S_{\Delta abc} \to BACN$. כמו כן $u \to \Pi(y)$ ו $v \to 0$ ומכאן ש $\delta_{(ABC)} = (\pi/2 - u - v) \to z$ ומקבלים

$$S_{\Delta ABC} / \delta_{(ABC)} = BACN / z \tag{3.31}$$



שרטוט 3.40

כפי שציינו כבר, כאשר $y \to 0$ $\frac{BDCN}{BACN} \to 1$ וכן

[184]הוא מניח כמובן מאליו כי סכום הזוויות בכל משולש על הספירה גדול מ- π, בהסתמך על כך כי הטריגונומטריה הספרית ידועה לנו מ- E, והיא נכונה בדיוק באותו אופן גם ב-H, כפי שכבר הוכחנו.

[185]ההוכחה פשוטה ולא מעניינת במיוחד.

[186]בהמשך מעיר בוליי כי ניתן להרחיב משפט זה לכל מצולע ישר, ולא רק למשולשים, (כנראה ע"י חלוקת המצולע למשולשים).

מתקיים $\lim_{z\to 0}\frac{\tan z}{z}=1$ ומכאן

$$\lim_{y\to 0}\frac{BDCN}{BACN}=\frac{tan\, z}{z} \qquad (3.32)$$

[187]על-פי החישובים שביצענו לעיל $BDCN=r\cdot k=k^2\cdot tan\, z$ ומכאן כי $BACN=\ k^2\cdot z$. כלומר שטח משולש מישורי ב H, אשר מגרעת זוויותיו היא z הוא $z\cdot k^2$.

הגדרה 3.13 <u>משולש אסימפטוטי</u> – משולש ישר שכל צלעותיו מקבילות זו לזו.

משולש זה הוא בעצם הגבול של משולש ישר הגדל עד אינסוף, כאשר "קדקודי המשולש" הן "נקודות המפגש של המקבילים" באינסוף. סכום זוויות המשולש שואף ל 0, ולכן המגרעת שלו שואפת ל π. על-פי מה שאמרנו לעיל, שטח משולש כזה הוא $\pi\cdot \mathrm{k}^2$. כלומר שטח המשולש האסימפטוטי הוא כשטח "מעגל" ב F בעל רדיוס (קו-L) k . נסמן שטח זה Δ_∞. קיבלנו $\Delta_\infty=\pi\cdot k^2=\mathbf{s}_F\circ k$.

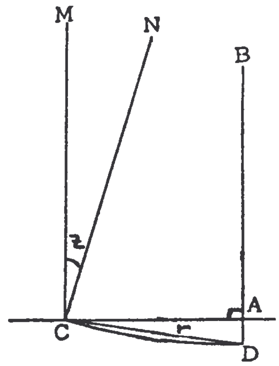
המטרה העומדת כעת בפני בוליי היא בניית מעגל ששטחו Δ_∞, וכן בניית מרובע ששטחו שווה ל Δ_∞ . אם נצליח לבנות מעגל ומרובע כאלו השווים בשטחם, הרי שבכך פתרנו את "בעיית רבוע המעגל".[188]

בעזרת הנוסחה $r=k\cdot tan\, z$ נקבל $\mathbf{s}_F\circ r=\pi\cdot r^2=tan^2 z\cdot\Delta_\infty$, אך כפי שהערנו לעיל $\mathbf{s}_F\circ r=\mathbf{s}\circ y$ כאשר y הוא המיתר המתאים לקשת של קו-L r, ומכאן כי

$$\mathbf{s}\circ y=\ tan^2 z\cdot\Delta_\infty \qquad (3.33)$$[189]

לכל מעגל מישורי בעל רדיוס (ישר) r, או "מעגל" ב F בעל רדיוס (קו-L) r , ניתן לבנות את זווית z המתאימה לו באופן הבא:

נתון קטע $r=CD$ המשמש כרדיוס המעגל[190]. בנה ל r אנך אמצעי והעבר לו (בעזרת משפט 3.20) מקבילים DB ו CN משני קצות הקטע.



שרטוט 3.41

---

[187] כאשר $y\to 0$, $\Pi(y)\to\pi/2$ ו- $z\to 0$.

[188]הבנייה המתוארת להלן איננה צמודה באופן מדויק לאופן שבו הוכיח זאת בוליי. היא נעזרת הן בתיאור הבנייה המופיע במאמר, והן בניתוח הבנייה הנ"ל ע"י R. Bonola ב-[4,עמודים 107-110].

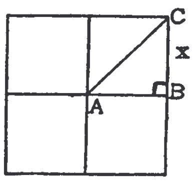
[189] ניתן להגיע לנוסחה זו גם בעזרת פיתוח הנוסחה לשטח מעגל $[Y-2+Y^{-1}]$ $\mathbf{s}\circ y=\pi k^2$ כפי שעושה זאת R. Bonola ב-[4,עמודים 108-109].

[190]ניתן באותו אופן להתייחס גם לקו-L CD המשמש כרדיוס של ה"מעגל" ב-F.

הורד מ C אנך CA ל BD, ושרטט CM המאונך ל CA . $\angle MCN$ היא זווית z המבוקשת, המתאימה למעגל בעל רדיוס r[191].

אם $z=\pi/4$ נקבל כי שטח המעגל המתאים לזווית זו הוא $\mathbf{s}^\circ y=\Delta_\infty$. כלומר בהנחה כי הזווית המתאימה למעגל היא $\pi/4$ ניתן לבנות בנייה גיאומטרית של רדיוס המעגל ששטחו שווה לשטח המשולש האסימפטוטי.

נותר עוד להראות כיצד ניתן לבנות ריבוע השווה גם הוא בשטחו לשטח המשולש האסימפטוטי. נתבונן במשולש ישר-זווית כאשר $\angle ABC=\pi/2,\ \angle BAC=\pi/4,\ \angle BCA=\pi/8$. נסמן את צלע המשולש BC ב x . ע"י שימוש בנוסחה (3.26), ניתן לחשב את X באופן מפורש, ובהינתן X ניתן לבנות את הקטע x המתאים לו (או ע"י משפט 3.23, או ע"י מציאת זווית ההקבלה בעזרת משפט 3.17 ובניית הקטע המתאים לזווית הקבלה זו ע"י משפט 3.21). בעזרת צלע המשולש והזוויות הנתונות, ניתן לבנות בנייה גיאומטרית של המשולש המבוקש. מגרעת משולש זה היא $\pi/8$, ולכן שטחו הוא $\pi/8 \cdot k^2$.



שרטוט 3.42

אם נעתיק משולש זה 8 פעמים (כפי שמופיע בשרטוט 3.42) נקבל ריבוע ששטחו הוא $\pi \cdot k^2$, וקיבלנו את הנדרש. כלומר השטח של המעגל שזווית z המתאימה לו שווה ל $\pi/4$, שווה לשטח המשולש האסימפטוטי, וכן שטח הריבוע שבנינו לעיל, ובכך הצלחנו לפתור את "בעיית ריבוע המעגל".

הערה בוליי מעיר כי הבעיה של בניית מצולע ישר השווה בשטחו לשטח מעגל בעל רדיוס נתון s ($\tan^2 z\cdot\Delta_\infty =$) קשורה באופן הדוק לערך המספרי של $\tan z$. אם $\tan^2 z$ הוא מספר שלם, או שבר רציונאלי שמכנהו (בצורה המצומצמת ביותר) הוא מצורת גאוס - או מספר ראשוני מהצורה 2^m+1, או מכפלה של הרבה מספרים ראשוניים מהצורה הזו כאשר כל מספר מופיע פעם אחת בלבד במכפלה (מלבד 2 שיכול להופיע פעמים רבות), הרי שניתן לבצע בנייה זו, היות וכל מצולע ישר ניתן להמרה באופן גיאומטרי למצולע משוכלל בעל n צלעות השווה לו בשטחו, אם n הוא מהצורה הנ"ל.

[191] R. Bonola מראה כיצד ניתן למצוא את רדיוס המעגל המתאים, אם זווית z נתונה כבר מראש, בעזרת חזרה על פעולות דומות, אך בסדר פעולות שונה.

משמעות מה שקיבלנו היא כי ב H ניתן לבנות מצולע ישר השווה בשטחו לשטח מעגל (מישורי) בעל רדיוס (ישר) נתון, או לשטח "מעגל" ב F בעל רדיוס שהוא קו-L. בנייה זו היא בלתי אפשרית ב E, ומכאן מגיע בוליי לסיכום עבודתו כי "או שהגיאומטריה האוקלידית היא הנכונה, או ש"גיאומטרית ריבוע המעגל" היא הנכונה". שאלה זו - איזה משתי הגיאומטריות היא האמיתית נראתה לו באותו זמן בלתי ניתנת להכרעה.

את מאמרו מסכם בוליי במילים: " נותר עוד להוכיח את חוסר האפשרות של קביעה מוקדמת (ללא הנחות ראשוניות), האם E או H קיים. נושא זה נדחה להזדמנות אחרת"...

בוליי לא פרסם לעולם, הוכחה מסוג זה...

“Many things have on epoch, in which they are found at the same time in several places, just as the violets appear on every side in spring...” *(Wolfgang Bolyai in a letter to his son , 1823)*

פרק 4 השוואה בין עבודותיהם של בוליי ושל לובצ'בסקי

כפי שראינו בפרקים הקודמים ג'והן בוליי וניקולאי לובצ'בסקי חיו באותה תקופה, בארצות שונות, ובסביבות אותם שנים שניהם פרסמו את עיקרי עבודתם ומחקרם בנושא "תיאוריית המקבילים" ללא כל קשר ביניהם, וללא שידעו אחד על עבודתו של השני. (נראה כי בוליי שמע לראשונה על עבודתו של לובצ'בסקי בשנת 1848 ורק אז החל ללמוד אותה באופן מעמיק [4, עמ' 113]).

הערה[1a]:

מעניין מאד לראות כי שניהם הגיעו לרעיונות דומים בעבודתם, אם כי פעמים רבות הגיעו למסקנותיהם מכיוונים שונים. (רעיונות שהם דומים מאד גם לרעיונות שגאוס הגיע אליהם לפניהם, אך לא פרסמם).

בבואנו להשוות בין עבודותיהם של בוליי ושל לובצ'בסקי נשים לב למספר נקודות:

- מונחי היסוד והאקסיומות שעמדו בבסיס עבודותיהם של שני החוקרים היו ,כפי הנראה, ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס, וממילא גם 28 המשפטים הראשונים שלו הניתנים להוכחה ללא אקסיומת המקבילים. במהלך עבודתם הם השתמשו במושגים כמו אורך, ורציפות שהוגדרו באופן מדויק רק לקראת סוף המאה. כמו כן, בהגדרת המקביל ובחלק מההוכחות והמשפטים הם השתמשו באופן אינטואיטיבי באקסיומת פש, מבלי לציין זאת בפירוש, וקרוב לודאי, מבלי שיהיו מודעים לכך.

- הן בוליי והן לובצ'בסקי פותחים את מאמרם בהגדרת ישר מקביל ל l כמקרה הגבולי של הישר הראשון אשר איננו חותך את l. לובצ'בסקי מגדיר אותו כישר גבול המפריד בין קבוצת הישרים העוברים דרך נקודה A וחותכים את l ואלו שעוברים דרך הנקודה ואינם חותכים אותו. בכך, הוא מסב את תשומת ליבנו לא רק לישרים החותכים את l הנמצאים בתוך זווית ההקבלה, אלא גם לישרים העוברים מעל לישר המקביל ואינם חותכים את l (מה שנהוג היום לכנות "היפר-מקבילים"). אצל בוליי, לעומת זאת, הישר המקביל מתקבל כתוצאה מסיבוב הישר החותך BC

מסביב לנקודה B עד המצב שבו לראשונה הוא איננו חותך את l. ניתן לומר כי הישר המקביל אצלו הוא המקרה הגבולי של כל הישרים החותכים, מבלי להתייחס לקבוצת הישרים אשר אינם חותכים את l. עם זאת מדבריו רואים כי ברור לו שאם ישר אחד (המקביל) איננו חותך את l, אז גם כל הישרים שמעבר לו אינם חותכים את l.

על פי משפט 31 של אוקלידס, אשר איננו תלוי באקסיומת המקבילים, ברור כי קיים ישר אחד לפחות אשר איננו חותך את l , אם סכום הזוויות החד-צדדיות בין הישרים לבין הישר החותך אותם הוא π (לדוגמא, הישר המאונך לאנך ל l). השאלה היא, מה קורה אם סכום הזוויות החד-צדדיות בין הישרים לבין הישר החותך אותם קטן מ π? האם במקרה כזה הכרחי שהישרים יחתכו, או שיתכן גם שלא? את שאלה זו, שהיא בעצם חקירתה של אקסיומת המקבילים, פונים שני החוקרים לברר.

- במשפטים הבאים חוקרים בוליי ולובצ'בסקי את תכונותיהם של הישרים המקבילים, ע"פ ההגדרה שהביאו בתחילת המאמר (המשפטים והתכונות די דומים, והשינוי הוא בדרך כלל רק בדרך ההוכחה). תחילה, הרחבת תכונת ההקבלה לכל הישר המקביל, כך שההקבלה לא תהיה תלויה בנקודה מסוימת על הישר, ולאחר מכן הוכחות כי יחס ההקבלה כפי שהוגדר הוא יחס סימטרי וטרנזיטיבי. מאוחר יותר מוכיחים שניהם את התכונה כי שני ישרים מקבילים מתנהגים כאסימפטוטות. כלומר המרחק בין המקבילים איננו קבוע והוא קטן בכיוון המקבילות, כך שאם נתקדם לאורך המקבילים עד אינסוף, המרחק בין המקבילים ילך ויישאף ל 0. שניהם מובילים את הדיון עד לנקודה שבה ברור כי קיימות שתי אפשרויות: או שאנו מניחים את אקסיומת המקבילים, ואז אנו נמצאים בגיאומטריה האוקלידית - E, או שאנו מניחים את שלילת אקסיומת המקבילים, ואז אנו נמצאים בגיאומטריה אחרת - היפרבולית, אשר נסמנה H. [בוליי עצמו מסמן את הגיאומטריה האוקלידית - Σ , והגיאומטריה הלא-אוקלידית (היפרבולית) - S. לובצ'בסקי מכנה את הגיאומטריה הלא-אוקלידית "גיאומטריה דמיונית" או "פנגיאומטריה"]. יש לציין כי בדרך לנקודה זו, בוליי מבסס את חקירתו על השאלה :' האם סכום הזוויות החד-צדדיות בין שני מקבילים הוא π או פחות ?' ולובצ'בסקי חוקר את הכיוון של: 'מהו סכום

הזוויות במשולש?' וביחד עם כך: 'האם זווית ההקבלה היא $\pi / 2$ לכל קטע, או שהיא זווית חדה?' (אצל בוליי המושג "זווית הקבלה" איננו מוזכר כלל, והוא רק נרמז בהמשך). בכל מקרה, הם מגיעים למסקנה כי ההפרדה בין שתי הגיאומטריות היא מוחלטת. כלומר אם קיים מקרה שבו סכום הזוויות החד-צדדיות בין מקבילים הוא π, אז זהו המצב בכל המקרים. ובאותו אופן, אם קיים משולש שסכום הזוויות שלו הוא π, אז זהו המצב בכל המקרים. מנקודה זו ואילך מתחילים שני החוקרים לחקור את הגיאומטריה הדמיונית או הגיאומטריה ההיפרבולית.

- [192]חשוב להבחין כי לובצ'בסקי מפתח בעיקר את הגיאומטריה הלא-אוקלידית, המסתמכת על שלילתה של אקסיומת המקבילים, בעוד שבוליי לאורך כל עבודתו מנסה לחקור אילו משפטים ובניות תלויים באקסיומת המקבילים, ואלו אינם תלויים בה, ובכך הוא מנסה לפתח גיאומטריה אבסולוטית. את המשפטים השייכים לגיאומטריה האבסולוטית הנמצאים אצל לובצ'בסקי ניתן למצוא ע"י השוואת הגיאומטריה שלו, עם הגיאומטריה האוקלידית, ומציאת המשפטים המשותפים בין שתי הגיאומטריות. כגון: כל נוסחאות הגיאומטריה הספרית. בוליי לעומתו, משתדל להוכיח כל מה שניתן באופן כללי, והוא מציין לפני כל משפט האם הוא מתקיים ב E או ב H בלבד, או שהוא נכון באופן אבסולוטי ללא תלות באקסיומת במקבילים. לדוגמא, את מושגי היסוד בגיאומטריה שלו (L ו F) מגדיר בוליי באופן כללי כך שאם אנחנו ב E אז L הוא קו ישר ו F הוא מישור, ואם אנחנו נמצאים ב H אז L היא עקומה מסוימת ו F הוא משטח כלשהו. משפט מפתח אצל בוליי אשר מתקיים באופן אבסולוטי הוא "משפט הסינוסים ההיפרבולי" (משפט 3.18), האומר כי בכל משולש ישר היחס בין היקפי המעגלים הבנויים על צלעות משולש כרדיוסים הוא כיחס סינוס הזוויות שמול אותן צלעות. גם את דרך בניית המקביל שלו הוא מסביר באופן אבסולוטי (משפט 3.20), וגם הטריגונומטריה שאותה הוא מפתח מתקיימת באופן אבסולוטי, במובן כפי שיוסבר לעיל. נעיר רק, כפי שאסביר עוד בהמשך, כי דרך בנייה זו

---

[192]בקטע הבא נעזרתי ב - [4, עמ' 101-102].

היא אשר הנחתה אותו למסקנה כי הגיאומטריה שלו נכונה וקונסיסטנטית בדיוק כמו הגיאומטריה האוקלידית.

- מושגי היסוד של בוליי הם L ו F . בגיאומטריה הדמיונית של לובצ'בסקי מושגים אלו הם מעגל הגבול וספירת הגבול, אם כי הם מוגדרים באופן שונה לחלוטין, וקשה למצוא דמיון כלשהו בין הגדרותיהם השונות. בוליי מבסס את הגדרותיו על "מקבילים שווי שוקיים" אשר יוצרים ביניהם זוויות חד-צדדיות שוות. לובצ'בסקי ,לעומתו, מדבר על מעגל/ספירה עם רדיוס אינסופי המקיימים תכונות שונות לחלוטין. דרך נוספת שלו להגדרת מעגל הגבול היא עקומה אשר כל האנכים האמצעיים למיתרים שלה מקבילים זה לזה. אופן הבנייה של מעגל הגבול שונה לחלוטין מאופן הבנייה של L.לעומת זאת, F מתקבל כתוצאה מסיבוב L סביב אחד מהצירים שלו, וגם ספירת הגבול מתקבלת ממעגל הגבול באופן דומה. בוליי מוכיח גם כי ב H, L משיק למאונך לציר,ו F מתקבל מסיבוב L סביב הציר, ואילו ב E, L הוא הישר המאונך לציר, ו F הוא המישור המאונך לו. לובצ'בסקי כאמור, פועל בגיאומטריה הלא אוקלידית ולא מנסה לקשר בין מעגל הגבול וספירת הגבול ל E, אך מכיוון שהוא מסתמך בבניית מעגל הגבול על זווית ההקבלה, והיות וב E זווית ההקבלה היא תמיד ישרה, מדרך הבנייה מקבלים כי מעגל הגבול הוא ישר, וספירת הגבול היא מישור. באופן אינטואיטיבי ניתן לומר כי, מעגל שרדיוסו שואף לאינסוף שואף לקו ישר, וספירה בעלת רדיוס ששואף לאינסוף שואפת למישור.

- הן בוליי והן לובצ'בסקי חוקרים מהי הגיאומטריה המתקיימת ב F/ספירת הגבול, ושניהם מגיעים (באופן שונה לחלוטין) למסקנה כי הגיאומטריה המתקיימת על ספירת הגבול/ על F, זהה לגיאומטריה האוקלידית, אם נחליף את הישרים במעגלי-גבול/ קווי-L. (בוליי מוכיח באופן ישיר כי אקסיומת המקבילים מתקיימת על F, אם ניקח קווי-L במקום ישרים. ואילו לובצ'בסקי מוכיח כי סכום הזוויות במשולש על ספירת הגבול הוא π). המסקנה המשותפת לשניהם היא כאמור, כי על פני ספירת הגבול מתקיימים כל משפטי הגיאומטריה האוקלידית, וכן הטריגונומטריה המישורית הנובעת ממנה.

- מושג חשוב נוסף אצל בוליי הוא המושג יחס הקבלה . יחס זה מייצג את היחס שבין האורכים של שתי קשתות של קווי-L, כאשר אם אורך הציר בין שני קווי ה-L הוא x , אז יחס ההקבלה המתאים לו יסומן ע"י X . בוליי מוכיח כי X שווה ל $e^{\frac{x}{k}}$, כאשר k הוא גודל שיוגדר להלן.
גם לובצ'בסקי, כמו בוליי, מוכיח כי היחס בין אורכי שתי קשתות גבול הנמצאות במרחק x זה מזה הוא קבוע, ותלוי רק באורך קטע הציר הנמצא ביניהם, ולא באורך הקשת. הוא מסמן את היחס בין אורכי שתי קשתות גבול סמוכות E, כאשר $x = 1$. ואז, לכל x, אם הקשתות נמצאות במרחק x זה מזה , אז היחס המתאים שווה ל E^x. נשים לב כי בהשוואה של יחסי ההקבלה שאליהם הגיעו בוליי ולובצ'בסקי בולטת העובדה כי אצל בוליי מופיע הגודל k, שאיננו מופיע ביחס של לובצ'בסקי. גודל זה שהוא מספר בסיסי מאד אצל בוליי ומשמש כמושג מפתח בטריגונומטריה הלא-אוקלידית שאותה הוא מפתח[193], איננו מוזכר כלל אצל לובצ'בסקי, ואיננו מופיע כלל בכל הנוסחאות הטריגונומטריות שלו. דבר זה נובע מהעובדה כי על-מנת ש E, שמתאר כאמור את היחס שבין שתי קשתות גבול סמוכות הנמצאות במרחק יחידה זה מזה, ייצג את הגודל e - בסיס הלוגריתמים הטבעי, בוחר לובצ'בסקי את יחידת האורך הבסיסית להיות מוגדרת כ k , ולכן ע"פ יחידות האורך החדשות שלו $k = 1$, ומשום כך אינו מופיע בכל נוסחאותיו.[194] גם בוליי טוען בהמשך כי נבחר את הגודל k , אורך הקטע אשר יחס ההקבלה המתאים לו הוא $K = e = 2.7182818...$, כיחידת האורך הטבעית.
בכך מוכיחים שני החוקרים כי כשם שבגיאומטריה האוקלידית קיימת יחידה טבעית למדידת זוויות שהיא הרדיאן, הקשורה באופן מהותי לאופן מדידת המעגל, כך בגיאומטריה הדמיונית, קיימת יחידת אורך טבעית - k , שהיא איננה שרירותית כמו יחידות האורך בגיאומטריה האוקלידית (סמ',מטר, וכו'...), אלא קשורה במהותה ללוגריתמים הטבעי.

- הן בוליי והן לובצ'בסקי מוכיחים את המשפט כי לכל $0 < \alpha < \pi/2$ ניתן למצוא קטע באורך $p > 0$ כך ש α היא זווית ההקבלה של הקטע. (בוליי מתאר את הבנייה גם באופן מעשי).

---

[193] על הגדרת k אצל בוליי וחלקו בפיתוח הטריגונומטריה הלא אוקלידית , אפרט עוד בהמשך.
[194] יש לציין כי אביו של בוליי, Farkas Bolyai, לא היה מרוצה מהעובדה כי בכל נוסחאותיו של בנו מופיע הגודל k, אשר משמעותו אינה מובנת דיה. ע"י קביעת גודל זה כיחידת האורך, עקף לובצ'בסקי בעיה זו.

משפט יסודי מאד ששני החוקרים הגיעו אליו הוא המשפט הקושר בין זווית ההקבלה של קטע, לגודל הקטע המתאים לאותה זווית. משפט זה מופיע אצל בוליי כ $Y = \cot\frac{\Pi(y)}{2}$ (משפט 3.17). לובצ'בסקי מגיע, ע"י הוכחה מכיוון שונה לגמרי, למסקנה כי $\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}$.

היות ו $Y = e^{\frac{y}{k}}$, וכפי שציינו לעיל k נבחר כיחידה ע"פ יחידות האורך שלובצ'בסקי אימץ, מכאן כי שני המשפטים הנ"ל שקולים, ומשפט מרכזי זה בגיאומטריה הלא-אוקלידית משותף לשניהם.

- לאחר שהגיעו לכל התוצאות שהוזכרו לעיל (הרבה מהתוצאות כאמור משותפות, אם כי הוסברו באופן שונה), בוחנים הן בוליי והן לובצ'בסקי את הטריגונומטריה הלא-אוקלידית, ומהו יחסה לטריגונומטריה האוקלידית, המישורית והספרית. גם בוליי וגם לובצ'בסקי יוצאים מהגדרות ומשפטים שהוכיחו בגיאומטריה ההיפרבולית, ומגיעים בדרכים שונות לנוסחאות הבסיסיות של הטריגונומטריה הספרית, הידועה לנו בגיאומטריה האוקלידית. המסקנה ששניהם הגיעו אליה מכאן היא כי הטריגונומטריה הספרית נכונה באופן אבסולוטי הן בגיאומטריה האוקלידית והן בגיאומטריה הדמיונית.

- נפנה כעת לטריגונומטריה המישורית הלא-אוקלידית. על מנת לפתח טריגונומטריה זו מגדיר בוליי את המושג k, שהוא מושג בסיסי מאד אצלו, ומופיע כמעט בכל הנוסחאות הטריגונומטריות שאליהן הוא מגיע. בוליי מסמן ע"י k את הקבוע $\frac{r}{\cot\Pi(y)}$ (כאשר r הוא האורך של קו-L, אשר y הוא אורך הישר הניצב לציר שלו)[195], ומכאן הוא מגיע ע"י חישוב ישיר לכך כי יחס ההקבלה K המתאים לאותו קבוע הוא e. בעזרת k ומשפטים אחרים שהוכיח ב H מפתח בוליי את כל הטריגונומטריה הלא-אוקלידית, ומגיע לנוסחאות רבות מאד על היחסים הקיימים בין צלעות לזוויות במשולש ישר-זווית, וכן נוסחאות של היקף, שטח ונפח של גופים

[195] ראה תיאור מפורט בפרק 3.

רבים.

לובצ'בסקי, במאמרים אותם חקרתי, איננו חוקר את הנוסחאות המתאימות לגופים הנדסיים שונים, אך הוא מפתח נוסחאות טריגונומטריות רבות ומגיע למספר נוסחאות אודות הקשר שבין הצלעות לזוויות במשולש[196]. המסקנה החשובה מאד המשותפת לשניהם היא כי אם k ישאף לאינסוף בנוסחאות של בוליי, או שצלעות המשולש ישאפו לאפס בנוסחאות של לובצ'בסקי נגיע לנוסחאות המתקיימות בגיאומטריה האוקלידית. על-ידי דבר זה ביססנו את הקשר שבין הטריגונומטריה האוקלידית והטריגונומטריה ההיפרבולית, ומתברר כי ניתן להתייחס לגיאומטריה האוקלידית כמקרה גבולי של הגיאומטריה הדמיונית.

הערה: כפי שציינו קודם בוליי מנסה בעבודתו ככל הניתן לבנות גיאומטריה אבסולוטית, המתקיימת הן במקרה האוקלידי והן במקרה ההיפרבולי. במובן זה הוא מציין כי אמנם הטריגונומטריה הספרית היא טריגונומטריה אבסולוטית המתקיימת בשתי הגיאומטריות, אך גם לטריגונומטריה המישורית ניתן להתייחס כנכונה באופן אבסולוטי, כאשר אם אנחנו ב H אזי k הוא גודל קבוע ואם אנחנו ב E, k שואף לאינסוף, אך הנוסחאות הן אותן נוסחאות.

- לובצ'בסקי מציין גם כי אם נחליף את צלעות המשולש a,b,c בערכים דמיוניים ia,ib,ic $[i=\sqrt{-1}]$, אזי נגיע לנוסחאות הבסיסיות של הגיאומטריה הספרית, ומכאן כי המערכת שלו עקבית לחלוטין בדיוק כמו הגיאומטריה האוקלידית, היות וכל סתירה בגיאומטריה ההיפרבולית תוביל גם לסתירה בגיאומטריה הספרית שהיא חלק מהגיאומטריה האוקלידית.

- עובדות אלו המצביעות על הקשר ההדוק כל-כך בין הגיאומטריה האוקלידית והגיאומטריה הדמיונית הן אלו שהנחו את בוליי וגם את לובצ'בסקי למסקנה, כי קיימת סבירות רבה מאד לקיומה של הגיאומטריה הלא-אוקלידית, על אף שאין להם הוכחה חותכת לכך, ע"י מציאת מודל

[196] ע"פ הערה שלו, בסוף המאמר "The Theory of Parallels", הוא פרסם בעלון המדעי של אוניברסיטת קאזאן מספר מאמרים ביחס למדידותיהם של עקומות, צורות מישוריות, משטחים ונפח גופים, וביחס ליישומים של הגיאומטריה הדמיונית באנליזה. גם במאמרים שנכתבו על עבודותיהם של בוליי ולובצ'בסקי הכותבים מציינים כי לובצ'בסקי פיתח מאד את הצד האנליטי של הגיאומטריה ההיפרבולית, עוד יותר מבוליי. נראה כי דבר זה הופיע במאמרים של לובצ'בסקי אשר אליהם לא הגעתי בעבודתי, וכן כנראה בהמשך המאמר Pangeometry אשר איננו נמצא בידי. (כפי שהערתי בפרק 2).

שמקיים אותה[197]. הדמיון הרב שבטריגונומטריה הקיימת בשתי הגיאומטריות,בנוסף לעובדה כי הטריגונומטריה הספרית נכונה באופן אבסולוטי, וכן העובדה כי הגיאומטריה והטריגונומטריה על F זהים לחלוטין לגיאומטריה המישורית האוקלידית, הם שהובילו את בוליי למסקנה כי הגיאומטריה ההיפרבולית אמנם קיימת. כפי שבוליי מציין בנקודה זו: "גם כעת לא ניתן לדעת האם E או H היא הגיאומטריה הקיימת במציאות, אך כל הדברים שאותם מפתחים מהשלילה של אקסיומת המקבילים, מתבררים כנכונים באופן אבסולוטי במובן שתואר לעיל, ולכן,במובן זה, אינם נשענים על אף הנחה." [2, עמ' 36].

לובצ'בסקי מסתמך על העובדה כי הנוסחאות שאליהן הגענו כבסיס לכל החישובים של אורך עקומות, חישוב משטחים ונפח גופים, קיבלנו אותם מיסודות הגיאומטריה שהגדרנו באופן דדוקטיבי, ולכן וודאי שהן נכונות, והמערכת נקייה מכל סתירות פנימיות. כל נוסחה נוספת בגיאומטריה זו תצטרך להבחן האם ניתן לפתח אותה מנוסחאות היסוד שאליהן הגענו ואשר מהן ניתן להמשיך ולפתח מערכת גיאומטרית שלמה. נראה כי גם לובצ'בסקי מרגיש כי ההתאמה הרבה שבין הטריגונומטריה הדמיונית והאוקלידית, והעובדה כי הצלחנו לפתח נוסחאות כלליות שהן הבסיס לגיאומטריה זו, עובדות אלו, מבססות את הטענה כי ייסדנו מערכת גיאומטרית שלמה, בעלת קיום עצמי משלה.

עם זאת, מדגיש לובצ'בסקי כי על מנת לדעת איזו גיאומטריה אמנם קיימת בעולם יש צורך לבצע ניסוי מדעי כמו תצפית אסטרונומית אשר יאשר את אחת המערכות (ניסוי אשר, כפי שהוא מסביר, לא ניתן לבצע אותו, בכלים אשר נמצאים ברשותנו). בוליי, לעומתו, איננו מדבר על ניסוי מדעי, אך הוא טוען בסוף מאמרו כי אין אפשרות לקבוע מראש איזו גיאומטריה היא הנכונה.

- משפטים יסודיים ומונחי יסוד המופיעים רק אצל אחד מהחוקרים, ואינם משותפים לבוליי וללובצ'בסקי:

[197]נראה כי הרעיון של בניית מודל לא היה ,באותה תקופה, גם במודעות שלהם.

- בוליי נעזר רבות בסימן $\underline{\Omega}$ אשר משמעותו הוסברה בפרק 3, ובעזרתו הוא מגדיר מהם "מקבילים שווי-שוקיים" לצורך בניית L ו F. סימון זה איננו מופיע אצל לובצ'בסקי, ומשמעותו איננה מוזכרת אצלו.
- בוליי מגדיר יחס הקבלה בין שני קווי-L, או בין "ישר בסיס" ל"עקומה שוות מרחק" הנמצאת במרחק שווה מהישר בכל נקודותיה. יחס זה, אשר קראנו לו "יחס ההקבללה", עוזר לו לבחון תכונות שונות של קווי-L. יחס זה איננו מופיע אצל לובצ'בסקי (על אף שהוא מסתמך באופן עקיף על דברים הנובעים ממנו, כגון: העובדה כי המרחק בין שתי קשתות גבול הוא קבוע).
- המושג "זווית הקבלה" הוא מושג מפתח אצל לובצ'בסקי, המופיע כבר בראשית עבודתו. אצל בוליי, לעומת זאת, לא מופיע מונח זה כלל, והוא מתייחס אליו בהמשך, באופן עקיף, מבלי לתת לזווית שם מפורש.
- לובצ'בסקי מוכיח משפט עבור הזווית המרכזית התלת-צדדית המתאימה למשולש ספרי (משפט 2.7). משפט זה, שהוא משפט חשוב בפני עצמו, משמש אותו על מנת להוכיח את מה שנדרש לו בהמשך כי סכום שלוש הזוויות הדו-מישוריות הכלואות בין שלושה מישורים, הנחתכים בישרים מקבילים זה לזה, הוא π. (משפט 2.8), וזאת על מנת להוכיח בהמשך כי הגיאומטריה על פני ספירת הגבול היא הגיאומטריה האוקלידית. בוליי מוכיח נקודה זו ישירות מהוכחת אקסיומת המקבילים על פני ספירת הגבול. הוא איננו זקוק למשפט זה, ולכן כל הנושא של הזווית המרחבית המתאימה למשולש ספרי איננו מופיע אצלו כלל.
- נושאים נוספים המופיעים אצל בוליי ואינם מופיעים כלל אצל לובצ'בסקי הם כל הבניות הגיאומטריות , הקשר שבין שטח משולש לסכום זוויותיו בגיאומטריה ההיפרבולית, ותיאור פתרון בעיית ריבוע המעגל. נושאים אלו אינם עקרוניים לפיתוחה של הגיאומטריה ההיפרבולית ומשום כך אינם מופיעים אצל לובצ'בסקי,ואף אצל בוליי ניתן לראות כי הם מופיעים לאחר סיכום הדברים שלו לגבי אפשרות קיומה של הגיאומטריה ההיפרבולית.

לסיום, אציין נקודה נוספת המשותפת לבוליי וללובצ'בסקי והיא העובדה כי שניהם חקרו בהמשך, במאמרים אחרים שלהם, אשר אותם לא ניתחתי, את הנושא של "מהו נפח פירמידה משולשת

(tetrahedron) בגיאומטריה הלא-אוקלידית". אך היות ואני התמקדתי בעבודתי רק במאמרים העיקריים שלהם בנושא ולא בכל עבודתם, לא ארחיב בנקודה זו.

נספח מספר 1- המשפטים הניתנים להוכחה ללא אקסיומת המקבילים[198]

משפט 1- בהינתן קטע סופי, ניתן לבנות משולש שווה צלעות.[199]

משפט 2- מנקודה נתונה (כקצה) ניתן לשרטט קטע השווה לקטע נתון[200].

משפט 3- בהינתן שני ישרים אשר אינם שווים באורכם, ניתן לחתוך מהישר הגדול ישר השווה באורכו לישר הקטן.[201]

משפט 4- אם שני משולשים שווים בשתי צלעות בהתאמה ובזווית הכלואה ביניהם, אז גם הבסיס שלהם יהיה שווה, שטחי המשולשים יהיו שווים אחד לשני, ושתי הזוויות הנותרות יהיו שוות בהתאמה.[202] [203]

משפט 5- במשולש שווה שוקיים הזוויות ליד הבסיס שוות זו לזו.

משפט 6- אם במשולש שתי זוויות שוות זו לזו, אז הצלעות שמול אותן זוויות יהיו שוות זו לזו.

משפט 7- אם שני ישרים המשורטטים בקצוות קטע נתון נפגשים בנקודה, לא ניתן לבנות שני ישרים אחרים השווים בהתאמה לישרים הקודמים, בקצוות אותו קטע נתון בהתאמה, ומאותו צד שלו ,כך שהם יפגשו בנקודה אחרת.

משפט 8- אם שלוש הצלעות של משולש אחד שוות בהתאמה לשלוש הצלעות של משולש שני, אז המשולשים חופפים.[204]

משפט 9- ניתן לחצות זווית נתונה[205].

משפט 10- ניתן לחצות ישר סופי נתון.

משפט 11- ניתן לשרטט מנקודה נתונה על ישר נתון, קו ישר היוצר זווית ישרה עם הישר הנתון[206].

משפט 12- בהינתן ישר אינסופי ונקודה שאיננה על הישר, ניתן להוריד אנך מהנקודה לישר.

---

[198] המשפטים מובאים כפי שהם מופיעים ב-[6, עמ' 241-311] (ללא שינויי ניסוח), וכן בעזרת ניתוח המשפטים ב-[11, עמ' 44-86].

[199] הוכחת משפט זה בעייתית ומסתמכת על אקסיומת הרצף הטוענת כי כל קו שמשורטט מנקודה בתוך המעגל לנקודה מחוץ למעגל, חותך את המעגל.

[200] בכיוון מסוים, ולא בכל כיוון שנרצה.

[201] זה מאפשר לשכלל את המשפט הקודם, ולשרטט קטע נתון מנקודה נתונה בכל כיוון שנרצה.

[202] אם נוסיף הגדרה של המושג "חפיפה", נוכל לומר פשוט כי המשולשים חופפים.

[203] בהוכחת משפט זה משתמש אוקלידס בטכניקה בעייתית של הרכבת המשולשים זה על זה, ולכן יש שהופכים משפט זה לאקסיומה.

[204] גם כאן משתמש אוקלידס בהוכחה בטכניקה של הרכבת משולשים, אך ניתן להוכיח את המשפט באופן אחר לאחר הוכחת משפט 23, ולעקוף את כל המקומות עד משפט 23 שמשתמשים במשפט זה.

[205] כאן משתמש אוקלידס לראשונה, מבלי לציין זאת, באקסיומה האומרת כי ניתן לבחור באופן מקרי נקודה במישור/ נקודה בצד נתון של ישר/ נקודה בין שני קצוות של קטע נתון, וכו'...

[206] במילים אחרות, ניתן להעלות אנך מכל נקודה על הישר.

משפט 13- קו ישר החותך ישר אחר יוצר עמו או שתי זוויות ישרות או שתי זוויות אשר סכומן שווה לשתי זוויות ישרות.

משפט 14- לכל ישר נתון, אם שני ישרים משני צידי הישר החותכים את הישר באותה נקודה יוצרים זוויות סמוכות אשר סכומן שווה לשתי זוויות ישרות, אז שני הישרים מונחים על ישר אחד.

משפט 15- אם שני ישרים חותכים זה את זה, הם יוצרים שתי זוויות נגדיות (קדקודיות) שוות.

משפט 16- בכל משולש אם נמשיך את אחת הצלעות, הזווית החיצונית המתקבלת גדולה מכל אחת מהזוויות הפנימיות אשר אינן צמודות לה.[207]

משפט 17- בכל משולש, סכום שתי זוויות כלשהן הוא פחות משתי זוויות ישרות.

משפט 18- בכל משולש, הצלע הגדולה נמצאת מול הזווית הגדולה.

משפט 19- בכל משולש, הזווית הגדולה נמצאת מול הצלע הגדולה.

משפט 20- בכל משולש, סכום שתי צלעות גדול מהצלע השלישית.

משפט 21- אם נבנה משני קצוות צלע נתונה של משולש שני ישרים הנחתכים בתוך המשולש, אזי שני הישרים האלו יהיו קטנים משתי הצלעות האחרות של המשולש, והם יכלאו ביניהם זווית גדולות יותר.

משפט 22- משלושה ישרים (סופיים) השווים באורכם לשלושה ישרים נתונים, ניתן לבנות משולש, אם כל שני ישרים שנבחר, סכומם יהיה גדול מהישר השלישי.

משפט 23- מנקודה נתונה על ישר נתון, ניתן לבנות זווית השווה לזווית נתונה[208].

משפט 24- אם שני משולשים שווים בשתי צלעות בהתאמה, אך הזווית הכלואה ביניהם גדולה יותר במשולש אחד, אזי גם הצלע השלישית תהיה גדולה יותר באותו משולש.

משפט 25- אם שני משולשים שווים בשתי צלעות בהתאמה, אך הצלע השלישית גדולה יותר במשולש אחד, אזי גם הזווית הכלואה בין שני הישרים השווים גדולה יותר באותו משולש.

---

[207] את העובדה כי זווית חיצונית שווה לשתי הזוויות הפנימיות אשר אינן צמודות לה, מוכיח אוקלידס במשפט 32, לאחר שנעזר באקסיומת המקבילים. משפט 16, לעומת-זאת, איננו תלוי באקסיומת המקבילים.

[208] כאן מסתמך אוקלידס על משפט 8, אשר אותו דחינו להוכחה לאחר משפט זה. אם רוצים להימנע בהוכחה מהשימוש במשפט 8, יש צורך לבנות כאן הוכחה השונה לחלוטין מזו של אוקלידס.

משפט 26- אם שני משולשים שווים בשתי זוויות ובצלע בהתאמה, (או שהצלע מחברת בין שתי הזוויות השוות, או שלא), אז הצלעות הנוספות והזווית הנוספת יהיו שווים בהתאמה.[209]

משפט 27- אם ישר ש"נופל" על שני ישרים אחרים יוצר זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים זה לזה.

משפט 28- אם ישר ש"נופל" על שני ישרים אחרים יוצר זוויות מתאימות שוות, או שסכום הזוויות החד-צדדיות שווה לשתי זוויות ישרות, אז הישרים מקבילים זה לזה.

משפט נוסף אשר מופיע בהמשך ואיננו מסתמך על אקסיומת המקבילים, או על משפטים אחרים המסתמכים עליה, הוא המשפט הבא:

משפט 31- דרך נקודה נתונה (שאיננה על ישר נתון ולא על המשכו), ניתן לשרטט ישר מקביל לישר הנתון[210].

[209]הוכחת משפט זה מתחלקת לשתי הוכחות שונות עבור המקרים השונים. נשים לב כי הוכחת המקרה השני פשוטה מאד, לאחר שמוכיחים את המקרה הראשון וכן כי סכום הזוויות במשולש הוא π, אך אוקלידס מנסה לדחות את השימוש באקסיומת המקבילים (הנדרש להוכחת משפט זה) ככל יכולתו, ולכן הוא מוכיח את המקרה השני כאן מבלי להשתמש במשפט המסתמך על אקסיומת המקבילים.

[210]ישר זה הוא הישר המאונך לאנך לישר הנתון.

נספח מספר 2- המשפטים השקולים לאקסיומת המקבילים[211]

כל המשפטים ברשימה להלן שקולים זה לזה, וכן הם שקולים לאקסיומה החמישית של אוקלידס, ביחס לקבוצת אקסיומות יסודיות הכוללת :

- אקסיומות של אסוציאטיביות.
- אקסיומות של דיסטריבוטיביות.
- אקסיומות חפיפה.
- אקסיומת ארכימדס.

כלומר- בהינתן קבוצה יסודית זו ומשפט אחד מהרשימה הבאה, ניתן להוכיח את אקסיומת המקבילים, ולהפך- מהקבוצה היסודית בצירוף אקסיומת המקבילים ניתן להוכיח כל משפט מהרשימה להלן.

הערה- אם נוציא מהקבוצה היסודית את אקסיומת ארכימדס, אזי משפטים 1 ב', 4 א', 7 א' אמנם שקולים זה לזה, אך הם <u>אינם</u> שקולים לאקסיומת המקבילים.

1. א. ישרים מקבילים שומרים על מרחק שווה ביניהם (פוסידוניוס, המאה הראשונה לפנ"הס).

ב. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מישר נתון, בצד נתון של הישר, הוא קו ישר (Christoph Clavius, 1574).

ג. בכל מרובע אשר יש לו שתי צלעות שוות המאונכות לצלע השלישית, קיימת לפחות נקודה אחת על הצלע הרביעית, שהאנך ממנה לצלע השלישית שממול, שווה באורכו לשתי הצלעות השוות(Giordano Vitale, 1680).

ד. קיים לפחות זוג אחד של ישרים השומרים על מרחק שווה ביניהם (Aganis, המאה השישית).

2. המרחק בין זוג ישרים אינסופיים מקבילים, יכול להשתנות, אך הוא נשאר תמיד פחות מגודל קבוע מסוים (Proclus, המאה החמישית).

3. א. שני ישרים המקבילים לישר שלישי, מקבילים ביניהם (משפט 30 של אוקלידס).

ב. אם ישר l חותך את ישר m, אז הוא יחתוך גם את הישר המקביל ל-m (Proclus, המאה החמישית).

---

[211] ע"פ [4,עמ' 118-121] וכן ע"פ [11,עמ' 128-129].

ג. דרך נקודה נתונה, שאיננה על ישר נתון, ולא על המשכו, ניתן לשרטט לא יותר ממקביל אחד לישר הנתון[212] (Playfair John, סוף המאה ה-18).

4. א. אם הישרים l ו-m נחתכים ע"י ישר שלישי (PQ) המאונך רק לאחד מהם (נניח l), אז האנכים מ-m ל-l הם פחות מ-PQ, בצד שבו m יוצר זווית חדה עם PQ, ויותר מ-PQ בצד שבו m יוצר זווית קהה עם PQ (Nasir al-Din, המאה ה-13).

ב. קווים ישרים שאינם שומרים על מרחק שווה ביניהם, מתקרבים זה לזה בכיוון אחד, ומתרחקים בכיוון שני (Pietro Antonio Cataldi, 1603).

5. א. בהינתן ישר סופי (קטע), ניתן לבנות משולש הדומה למשולש נתון (John Wallis, 1663; Lazare-Nicholas-Marguerite Carnot, 1803; Adrien-Marie Legendre, 1824).

ב. קיים זוג של ישרים דומים, אשר אינם חופפים (Gerolamo Saccheri, 1733).

6. א. בכל מרובע אשר יש לו שתי צלעות שוות המאונכות לצלע השלישית, שתי הזוויות האחרות הן ישרות (Gerolamo Saccheri, 1733).

ב. בכל מרובע בעל 3 זוויות ישרות, הזווית הרביעית היא גם ישרה (Alexis-Claude Clairaut, 1741; Johann Heinrich Lambert, 1766).

ג. קיים לפחות מלבן אחד (Gerolamo Saccheri, 1733).

7. א. סכום הזוויות של כל משולש שווה לשתי זוויות ישרות (משפט 32b של אוקלידס; Gerolamo Saccheri, 1733; Adrien-Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

ב. קיים לפחות משולש אחד אשר סכום הזוויות שלו הוא π (Gerolamo Saccheri , 1733; Adrien-Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

8. לא קיים סטנדרט מוחלט של אורך (Johann Heinreich Lambert, 1766; Adrien Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

9. א. כל ישר שעובר דרך נקודה פנימית של זווית יחתוך, אם נאריך אותו מספיק, לפחות שוק אחת של הזווית, או את המשכה (J. F. Lorenz, 1791).

---

[212] אם נצרף לכך את משפט 31 של אוקלידס (אשר איננו תלוי באקסיומת המקבילים), האומר כי דרך כל נקודה נתונה ניתן לשרטט ישר המקביל לישר נתון, מכאן כי דרך נקודה נתונה ניתן להעביר בדיוק מקביל אחד לישר נתון.

ב. דרך כל נקודה פנימית לזווית, ניתן לשרטט ישר שיחתוך את שני שוקי הזווית, או את המשכם (Adrien-Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

10. ניתן לבנות משולש שהשטח שלו יהיה גדול מכל שטח נתון (Karl Friedrich Gauss, 1799).

11. במישור, הזזה וסיבוב של ישר, הן שתי פעולות אשר אינן תלויות זו בזו (Bernhard Friedrich Thibaut, 1809).

12. א. דרך כל 3 נקודות שאינן על ישר אחד, ניתן תמיד להעביר מעגל (Farkas Bolyai, 1820; Adrien-Marie Legendre, תחילת המאה ה-19).

ב. דרך כל 4 נקודות שאינן על מישור אחד, ניתן להעביר ספירה (Farkas Bolyai, 1820).

13. סכום הזוויות החד-צדדיות שיוצרים שני ישרים מקבילים עם ישר שלישי שחותך אותם, הוא π (משפט 29 של אוקלידס; Ptolemy, המאה השניה).

רשימת מקורות

[1] Ayres F.Jr., Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry, Schaums outline series, McGraw-Hill book company, New York-St. Louis-San Francisco-Toronto-Sydney, 1954.

[2] Bolyai J., The Science of Absolute Space, 1832, Translated from Latin by Halsted G. B., The Neomon, Texas, 1896.

[3] Bolyai J., The Science of Absolute Space, 1832, Translated by Manning H.P., Appears at 'A Source book of Mathematics' by Smith D. E ,listed below.

[4] Bonola R., Non-Euclidean Geometry – A critical and historical study of its development, Dover publications, New York, 1955.

[5] Coxeter H.S.M., Non-Euclidean Geometry, The mathematical association of America, Washington ,1998.

[6] Euclid, The Elements, Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Heath T. L., Dover publications, New York, 1956.

[7] Lobachevski N. I., Geometrical Researches on the Theory of Parallels, 1840, Translated by Halsted G. B., Open court publishing company, Chicago-London, 1914.

[8] Lobachevski N. I., Pangeometry, 1855, Translated from French by Manning H. P., Appears at 'A Source book of Mathematics' by Smith D. E., listed below.

[9] Saccheri G., Euclid- freed of all blemish, Milan,1733. Translated by Halsted G. B. ,Appears at 'Euclides Vindicatus', Chelsea Publishing Company, New York, 1986.

[10] Smith D. E , A Source book of Mathematics, Volume 2, Dover publications, New York, 1959.

[11] Trudeau R. J., The Non-Euclidean Revolution, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, 1987.

Contents

ABSTRACT

During the third century B.C. Euclid wrote his monumental work, "The Elements", in which he summed up the principles of geometry reached in a deductive way. He based his conclusion on a number of primitive terms, five postulates and five common notions, which he defined at the outset of his work.

Among those axioms, which are simple in their formulation, there stands out one axiom, known as " the parallel postulate", which is as not self-evident and obvious as the other axioms.

For hundreds of years, many geometers tried to prove that this axiom can be deduced from Euclid's other axioms and their resultant propositions, which are parallel postulate-independent (the first 28 propositions of Euclid) thereby transforming the axiom into a theorem. However, none of the attempts bore fruit, and they only succeeded in replacing it by a long list of equivalent assumptions, such that if we succeed in proving them, we can prove the parallel postulate. Many geometers worked by way of negative reasoning and tried to prove that if we assume the other axioms and, in addition, the negation of the parallel postulate, we will reach a contradiction. However, as we have stated earlier, all these attempts failed.

It was only at the beginning of the nineteenth century that a few geometers reached the conclusion that there is a possibility that the parallel postulate is independent of the other axioms. Furthermore, there exists a pangeometry, which is a logical deductive theory founded upon the other axioms of Euclid, the said 28 propositions, and the negation of the parallel postulate. The aforementioned pangeometry is a consistent and complete system of geometry, free from internal contradiction. In this geometry the length of curves and the surfaces and volumes of solids can be

calculated, and plane and spherical trigonometry can be developed, just as can be done within Euclidean geometry. This geometry is called “Non-Euclidean Geometry”. Among the founders of this geometry are János Bolyai and Nicolai Lobachevsky, who where the first ones who, independently of each other, published a comprehensive work in which they developed a non- Euclidean geometry. At the outset of their works they defined parallel lines, differently than Euclid did, and with the help of a set of axioms, without the parallel postulate, they deduced all the resultant theorems.

It is the purpose of this paper to survey the many attempts that have been made to prove the parallel postulate and to describe the beginning of the non-Euclidean geometry. The works of Bolyai and Lobachevsky are analyzed in detail and compared, and the many similarities between them pointed out.

The Beginning of Non-Euclidean Geometry,

An Analysis of János Bolyai's and Nicolai Lobachevsky's works.

Msc. thesis - The Natural Sciences faculty.

Written by: Ora Adler

Advisor: Prof. Amos Altshuler

Mathematics Department

Natural Sciences Faculty

Ben-Gurion University of the Negev

Ben-Gurion University of the Negev

Natural Sciences Faculty

Department of Mathematics

The Beginning of Non-Euclidean Geometry, An Analysis of János Bolyai's and Nicolai Lobachevsky's works

Msc. Thesis - The Natural Sciences Faculty

Ora Adler

ora.adlr@gmail.com

February 2002