

תרגיל 2.

1. בדקו האם הקבוצות הבאות ביחד עם פעולות הכפל והחיבור המתאימות מהוות שדה. כדי להראות שכן, הוכיחו שכל אקסיומות השדה מתקיימות, וכדי להראות שלא, הראו לפחות אקסיומה אחת איננה מתקיימת.

- א. קבוצת המספרים השלמים \mathbb{Z} עם פעולות החיבור והכפל הרגילות.
- ב. קבוצת המספרים הרציונליים \mathbb{Q} עם הפעולות - $a+b = \frac{a-b}{3}$ ו $a \cdot b = 3ab$
- ג. הקבוצה $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.
 [כלומר $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$
 $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$]
- ד. הקבוצה $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.
- ה. הקבוצה $R[x] = \{\sum_{i=0}^k a_i x^i \mid k \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_k \in R\}$ (קבוצת הפולינומים עם מקדמים ממשיים) עם הפעולות - חיבור פולינומים וכפל פולינומים.

- א. רשמו את טבלאות הכפל והחיבור של הכפל והחיבור מודולו 3.
- ב. רשמו את האיברים ההפכיים של 2,3,4,5,6 בכפל מודולו 7 ובכפל מודולו 11.
- ג. הגדירו על הקבוצה $\{0,1,a,b\}$ פעולות כפל וחיבור (ע"י כתיבת טבלאות הכפל והחיבור) כך שזה יהיה שדה. הדרכה: קבעו ש $a+1=b$.
- ד. האם אתם יכולים למצוא תכונות של טבלאות הכפל והחיבור שהם תנאי הכרחי לשדה (כלומר אם לאחת הטבלאות אין את אחת התכונות הללו אז זה לא שדה)? ישנן לפחות חמש תכונות לכל טבלה.

3. יהי F שדה, הוכיחו את הטענות הבאות:

- א. לכל מספר טבעי k , ולכל $a_1, \dots, a_k, b \in F$, מתקיים $(a_1 + \dots + a_k)b = a_1b + \dots + a_kb$. רמז: אינדוקציה על k .
- ב. לכל $a \in F$ פרט ל-0 יש $b \in F$ יחיד כך ש- $ab = 1$.
- ג. יהי $a \in F$. אם $a+a=a$ אז $a=0$.
- ד. יהיו $a, b \in F$. אם $ab=0$ אז $a=0$ או $b=0$.
- ה. לכל $a, b \in F$ מתקיים $(-a)b = -(ab)$.

- א. מצאו הפתרונות של המשוואות (i) $3x=2$ (ii) $-3x=2$ בשדה Z_5 .
- ב. בשדה Z_7 .
- ג. בשדה Z_{97} .

- ב. יהי F שדה. הוכיחו כי לכל $a, b \in F$ כך ש $a \neq 0$ למשוואה $ax=b$ ישנו פתרון יחיד.
- ג. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $x+ay=b$ בשדה אותו הגדרתם בשאלה 2 סעיף ג.

5. יהיו $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש $m, n > 0$. הוכיחו כי אם $a \equiv b \pmod{n}$ ו $m|n$ אז $a \equiv b \pmod{m}$.

6. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$.

7. בשני המספרים הבאים מצאו ספרה d כך שהמספרים יתחלקו ב 11:
 $8d62263, 91021d67332$

8. מצאו את שתי הספרות האחרונות של 3^{55} ו 9^{1989} .

9. יהיה p ראשוני. מצא את כל אברי \mathbb{Z}/p המקיימים $a^2 = a$.