

תרגיל 1

1. יהיו $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 2 + 4i$ חשבו:

א) $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1^2, z_2^3, (1+i)z_1$
ב)

$$\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1^2}{z_2}, \frac{z_1}{z_2^2}, \frac{z_2}{1-2i}$$

2. חשבו $x \in \mathbb{C}, (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$

3. חשבו:

א) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2, \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, (1+i)^2$

ב)

$$(1+i)^{10}, i^n, i^{4n+3}, i^{4n}, i^{97}, i^{82}$$

4. פתרו את המשוואות הבאות:

א) $z^2 - 2z + 2 = 0$

ב) $z^2 + 2z + 5 = 0$

ג) $z^4 - 3z^2 + 4 = 0$

ד) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$

5. מצאו $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש:

א) $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$

ב) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$

ג) $(x+iy)^2 = i$

ד) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$

6. נתון $w = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, a, b, c \in \mathbb{C}$. חשבו:

$$(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) \quad \text{א)}$$

$$(a + b)(a + bw)(a + bw^2). \quad \text{ב)}$$

$$(a + bw + cw^2)^3 + (a + bw^2 + cw)^3 \quad \text{ג)}$$

7. יהיו $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. מצאו:

$$\Re(-iz^2), \quad \Re(z^2 + z), \quad \Im\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Im(z^3), \quad \Im\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Re\left(\frac{1}{z}\right)$$

8. פתרו את המשוואות הבאות וציירו את הגרף.

$$|z| = 1 \quad \text{א)}$$

$$|z - 1| = 2 \quad \text{ב)}$$

$$|z - 1 + 2i| = 1 \quad \text{ג)}$$

9. פתרו את אי השוויונים הבאים, וציירו את הגרף.

$$|z - 1| \leq |z - 5| \quad \text{א)}$$

$$|z + 2 - 3i| \leq |z - 3i| \quad \text{ב)}$$

$$|z - 1| + |z - 5| < 4 \quad \text{ג)}$$

10. מצאו $\min |3 + 2i - z|$ כאשר $|z| \leq 1$.

11. יצגו את $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$ כ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

12. הוכיחו כי כל $z \in \mathbb{C}$ השונה מ-1 ושווה בערכו המוחלט ל1, ניתן ליצוג כ

$$t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1 + ti}{1 - ti}$$

13. הוכיחו כי לכל $z, w \in \mathbb{C}$ ולכל $b, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \text{א)}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad \text{ב)}$$

$$\overline{\overline{b}} = b \quad \text{ג)}$$

ד) אם

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$$

אז

$$\sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = 0$$

14. מצאו אילו מהטענות הבאות נכונות, נמקו אק תשובתכם.

א) אם $z = \bar{z}$ אז $z \in \mathbb{R}$.

ב) אם $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ אז $z \in \mathbb{R}$.

ג) אם $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$ אז $z \in \mathbb{R}$.

ד) אם $\frac{z}{\bar{z}} \in \mathbb{R}$ אז $z \in \mathbb{R}$ או $iz \in \mathbb{R}$.

15. מצאו את הצורה הפולרית של המספרים הבאים

$$-2, 2i, -2i, 1+i, 1-i, -1+i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}, -1-i, i-1, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}-i, \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$$

16. חשבו

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}, \frac{(\sqrt{3}+i)^6}{(i-1)^8 - (i+1)^4}, (\cos x + i \sin x)^n$$

17. מצאו את שורשי היחידה מהסדר הבא: 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

18. חשבו:

א) $(1+i)^{25}$

ב) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

ג) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

ד) $\frac{(i\sqrt{3}-1)^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$

19. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

(א)

$$(\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$$

(ב)

20. הוכיחו כי

$$\sin(3x) = 3(\cos x)^2 \cdot \sin(x) - (\sin x)^3 \quad (\text{א})$$

$$\cos(3x) = (\cos x)^3 - 3\cos(x) \cdot (\sin x)^2 \quad (\text{ב})$$

21. הוכיחו כי

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin x - \sin(n+1)x + \sin nx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

22. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^n \sin^2(2k-1)x$

23. חשבו את הסכום $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\varphi^k$, כאשר $\varphi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

24. יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ ויהיו ξ, φ שורשי יחידה מסדר a, b בהתאם.

הוכיחו כי $\varphi \cdot \xi$ הינו שורש יחידה מסדר $a \cdot b$.

25. הוכח או הפרד

(א) יהיה $P(z)$ פולינום עם מקדמים מרוכבים. אם $P(1+3i) = 0$ אז יש ל- $P(z)$ שורש נוסף שאינו ממשי.

(ב) יהיה $P(z)$ פולינום עם מקדמים ממשיים. אם $P(1+3i) = 0$ אז יש ל- $P(z)$ שורש נוסף שאינו ממשי.