

УДК 519.6 : 532

## КВАЗИВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО В ЗАДАЧЕ О ФОРМЕ НАСЫПИ

**ПРИГОЖИН Л. Б.**  
(Москва)

Получена система уравнений и неравенств, описывающая образование насыпи при выгрузке и рассыпании несвязной идеально сыпучей среды. Показано, что эта система эквивалентна квазивариационному неравенству эволюционного типа, и предложен метод его численного решения.

Задача определения формы образующейся насыпи возникает при управлении загрузкой доменных печей [1], [2], при геоморфологическом изучении каменистых осыпей [3], а также в других областях.

В настоящей работе предложена модель формирования насыпи из несвязного идеально сыпучего материала. Эта модель является двойственной формулировкой нестационарного квазивариационного неравенства с неявными ограничениями на градиент, зависящими от самого решения. Численное решение основано на итерационной процедуре, сводящей задачу к последовательности вариационных неравенств, на их аппроксимации по методу конечных элементов и на применении алгоритма минимизации, использующего расширенный лагранжиан.

Отметим, что вариационные задачи с неявными ограничениями, как обобщение вариационных неравенств, были впервые введены в [4] для решения задач импульсного стохастического управления, затем использовались в [5] в задачах фильтрации жидкости. Теоретическому исследованию широкого класса квазивариационных неравенств посвящена работа [6] и др.

### § 1. Модель образования насыпи

Несвязный идеально сыпучий материал, имеющий угол естественного откоса  $\alpha$ , высыпается на заданную в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  исходную (опорную) поверхность  $y = h_0(x)$ . Требуется определить форму образующейся при этом насыпи.

Под углом естественного откоса будем понимать угол наклона образующей конуса, возникающего при высыпании сыпучей среды на горизонтальную шероховатую поверхность из точечного источника (это определение уточняется в работах [3], [7]). Несвязное сыпучее тело находится в равновесии, если условия равновесия выполнены на его свободной границе и границе, соприкасающейся с опорной поверхностью [8]. Однако если коэффициент трения частиц при движении по этой поверхности достаточно велик, если занимаемая телом область ограничена стенками, а также во многих других случаях форма образующегося при высыпании сыпучего тела определяется условиями на его свободной границе. Ниже рассматриваются лишь такие случаи и, кроме того, предполагается, что рассыпание вещества происходит тонким слоем по текущей поверхности насыпи  $y = h(x, t)$ , причем нижние слои остаются неподвижными.

Интенсивность  $v(x, t)$  распределенного источника, расположенного над насыпью, определим так, чтобы объем вещества, высыпавшегося над площадкой  $d\Omega$  за время  $dt$ , был равен  $vd\Omega dt$ .

Уравнение материального баланса можно записать в виде

$$\partial h/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{u} = v,$$

где  $\mathbf{u}(x, t)$  — проекция на  $\Omega$  потока вещества, сыпавшегося по поверхности насыпи. Если кинетическая энергия частиц невелика и быстро рассеивается при их соударениях, можно пренебречь инерционностью и считать, что поток сыпавшегося вещества направлен в сторону наискорейшего спуска:

$$\mathbf{u} = -m\nabla h,$$

где

$$(1.1) \quad m(x, t) \geq 0$$

есть неизвестная скалярная функция. При этом уравнение баланса примет вид

$$(1.2) \quad \partial h/\partial t - \nabla \cdot (m\nabla h) = v.$$

В качестве начального условия обычно выступает опорная поверхность:

$$(1.3) \quad h|_{t=0} = h_0(x),$$

а краевое условие в случае, когда область ограничена непроницаемыми вертикальными стенками, имеет вид

$$(1.4) \quad m \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0.$$

Текущая поверхность насыпи всюду не ниже опорной:

$$(1.5) \quad h(x, t) \geq h_0(x),$$

а там, где она выше, угол ее наклона не больше угла естественного откоса материала:

$$(1.6) \quad h(x, t) > h_0(x) \Rightarrow |\nabla h(x, t)| \leq \gamma,$$

где  $\gamma = \text{tg } \alpha$ . Сыпания не происходит, если угол наклона поверхности меньше угла естественного откоса:

$$(1.7) \quad |\nabla h(x, t)| < \gamma \Rightarrow m(x, t) = 0.$$

Соотношение (1.6) является условием равновесия на свободной границе, а система (1.1)–(1.7) в целом описывает в рамках сделанных предположений рост насыпи на неподвижной опорной поверхности.

Подобная модель может использоваться и для расчета пересыпания вещества, вызванного подъемом или опусканием основания, если это пересыпание происходит не сдвигом многих слоев сразу, а только по текущей поверхности насыпи, как бывает обычно, если форма частиц близка к круглой [7]. В этом случае  $h_0 = h_0(x, t)$  и уравнение баланса запишется так:

$$\frac{\partial (h - h_0)}{\partial t} - \nabla \cdot (m\nabla h) = v.$$

Известное из практики решение задачи в виде конуса, растущего на горизонтальной поверхности  $h_0 \equiv 0$  при точечном источнике  $v = v_0 \delta(x)$ , имеет (в полярных координатах) вид

$$h(r, t) = \gamma(R(t) - r)^+,$$

где  $R(t) = [3v_0 t / (\pi \gamma)]^{1/2}$ , а  $z^+$  означает  $\max(z, 0)$ . Совместно с функцией

$$m(r, t) = \frac{1}{2} \frac{dR}{dt} \left( \frac{R^2(t)}{r} - r \right)^+$$

это решение удовлетворяет системе (1.1)–(1.7), пока основание конуса находится внутри области  $\Omega$ .

## § 2. Формулировка в виде квазивариационного неравенства

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей и  $Q = \Omega \times (0, T)$ . Нам понадобятся функциональные пространства  $V = W_{\infty}^1(\Omega)$  (пространство С. Л. Соболева функций, принадлежащих  $L_{\infty}(\Omega)$  вместе со своими первыми производными),  $H = L_{\infty}(\Omega)$  и пространства функций времени со значениями в соответствующих банаховых пространствах:  $\mathcal{Y}_q = L_q(0, T; W_q^1(\Omega))$  для  $2 \leq q < \infty$  и  $\mathcal{Y} = L_{\infty}(0, T; V)$ , а также  $\mathcal{H} = L_{\infty}(0, T; H)$ . Сопряженное к пространству  $X$  пространство будем обозначать  $X'$ , естественные произведения элементов  $V$  и  $V'$ ,  $H$  и  $H'$  — через  $(\cdot, \cdot)$ , а элементов  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{Y}'$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}'$  — через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Имеют место непрерывные вложения  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}'_q \subset L_2(Q) \subset \mathcal{Y}'_q' \subset \mathcal{Y}'$ .

Предположим, что  $h_0 \in V$ . Для каждой функции  $\varphi \in \mathcal{Y}$  можно определить отображение  $B_{\varphi}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{H}$ , действующее по формуле

$$B_{\varphi}(\psi) = |\nabla \psi|^2 - M(\varphi),$$

где

$$M(\varphi)(x, t) = \begin{cases} \gamma^2, & \varphi(x, t) > h_0(x), \\ \max(\gamma^2, |\nabla h_0(x)|^2), & \varphi(x, t) \leq h_0(x). \end{cases}$$

Здесь  $M(\varphi)$  — класс эквивалентных в  $\mathcal{H}$  функций, содержащий результат указанного вычисления для произвольных представителей  $\varphi$  и  $\nabla h_0$ .

В пространствах  $H$  и  $\mathcal{H}$  введем отношение частичного упорядочения:  $\varphi \leq \psi$ , если это неравенство выполнено почти всюду (п.в.). Определим также семейство выпуклых замкнутых множеств

$$\mathcal{K}(\varphi) = \{\psi \in \mathcal{Y} \mid B_{\varphi}(\psi) \leq 0\}.$$

Будем предполагать, что  $v \in \mathcal{Y}'$  и  $v \geq 0$ , т. е.  $\langle v, \psi \rangle \geq 0$  для любой функции  $\psi \geq 0$  из  $\mathcal{Y}$ .

Рассмотрим задачу: найти функцию  $h$  такую, что

$$(2.1) \quad \exists h' = \partial h / \partial t \in \mathcal{Y}'_q \text{ для некоторого } 2 \leq q < \infty,$$

$$(2.2) \quad h \in \mathcal{K}(h),$$

$$(2.3) \quad \langle h' - v, \varphi - h \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}(h),$$

$$(2.4) \quad h|_{t=0} = h_0.$$

Из условий  $h \in \mathcal{Y}_q$  и  $h' \in \mathcal{Y}'_q'$  следует (см. [9, гл. 4, т. 1.17]), что с точностью до эквивалентности  $h \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ , поэтому условие (2.4) имеет смысл.

Теорема 1. Функция  $h$  тогда и только тогда является решением квазивариационного неравенства (2.1)–(2.4), когда существует функционал  $t \in \mathcal{H}'$  такой, что пара  $\{h, t\}$  является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.7).

Доказательство. Неравенство (2.3) можно формально представить в виде минимизационной задачи

$$J(h) = \min_{\varphi \in \mathcal{Y}, B_h(\varphi) \leq 0} J(\varphi)$$

для функционала  $J = h' - v \in \mathcal{Y}'$ . Непрерывный функционал  $J$  линейный, следовательно, выпуклый. Выпуклым является и отображение  $B_h$ :

$$B_h(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2) \leq \lambda B_h(\varphi_1) + (1-\lambda)B_h(\varphi_2) \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Отображение  $\varphi \rightarrow \langle p, B_h(\varphi) \rangle$  непрерывно на  $\mathcal{Y}$  при любом  $p \in \mathcal{H}'$ . Для функции  $\varphi = 0$  выполнено условие Слейтера  $B_h(\varphi) < 0$ . Зафиксируем функцию  $h$  в функционале  $J$  и отображении  $B_h$ . Если при этом функционал  $J$  окажется ограниченным снизу на  $\mathcal{X}(h)$ , то для получения необходимых и достаточных условий оптимальности можно воспользоваться теоремой Эрроу – Гурвица (см. [10, гл. 3, т. 5.1]). Подставляя затем в эти условия саму функцию  $h$ , получаем аналогичные условия для задачи с неявными ограничениями: функция  $h$  тогда и только тогда является решением квазивариационного неравенства (2.1)–(2.4), когда она удовлетворяет условиям (2.1) и (2.4) и существует функционал  $p \in \mathcal{H}'$ ,  $p \geq 0$  такой, что пара  $\{h, p\}$  – седловая точка лагранжиана, т. е.

$$(2.5) \quad J(h) + \langle p^*, B_h(h) \rangle \leq J(h) + \langle p, B_h(h) \rangle \leq J(h^*) + \langle p, B_h(h^*) \rangle$$

для всех  $h^* \in \mathcal{Y}$ ,  $p^* \in \mathcal{H}'$ ,  $p^* \geq 0$ . При этом выполнено условие дополняющей нежесткости  $\langle p, B_h(h) \rangle = 0$ .

Предположим, что решение  $h$  нестационарного квазивариационного неравенства (2.1)–(2.4) существует. Тогда функционал  $J$  ограничен на  $\mathcal{X}(h)$ . Покажем, что пара  $\{h, t\}$ , где  $t = 2p$ , является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.7). Действительно, согласно (2.5), функционал  $\langle h' - v, h^* \rangle + \langle p, |\nabla h^*|^2 - M(h) \rangle$  имеет минимум на  $\mathcal{Y}$  в точке  $h^* = h$ , поэтому

$$(2.6) \quad \langle h' - v, \psi \rangle + \langle 2p, \nabla h \cdot \nabla \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{Y}.$$

Полученное вариационное уравнение эквивалентно уравнению (1.2) с краевым условием (1.4), записанному в слабой форме. Условия (1.1) и (1.3) выполнены, условие (1.6) также выполняется п.в., так как  $h \in \mathcal{X}(h)$ !

Как всякий неотрицательный функционал из  $\mathcal{H}$ , функционал  $t$  допускает представление [11]

$$\langle t, \varphi \rangle = \int_Q \varphi d\mu,$$

где  $\mu$  – определенная на измеримых по Лебегу подмножествах  $Q$  конечная мера. Пусть  $Q^-$  – множество точек из  $Q$ , в котором  $|\nabla h| < \gamma$  п.в. Из условия дополняющей нежесткости и неравенства  $B_h(h) \leq 0$  следует, что

$$\int_{Q^-} B_h(h) d\mu = 0.$$

Но  $B_h(h) < 0$  п. в. на  $Q^-$ , поэтому  $\mu(Q^-) = 0$  и для любой функции  $\varphi \in \mathcal{H}$

условие (1.7) выполняется в следующем «слабом» смысле:

$$\text{supp } \varphi \subset Q^- \Rightarrow \langle m, \varphi \rangle = 0.$$

Подставим в неравенство (2.3) функцию

$$\varphi = \begin{cases} \max(h, h_0) = h + (h_0 - h)^+, & 0 \leq t \leq t_0, \\ h, & t_0 < t \leq T. \end{cases}$$

Поскольку  $\varphi \in \mathcal{X}(h)$  и  $v \geq 0$ , имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle h' - v, \varphi - h \rangle \leq \int_0^{t_0} (h', (h_0 - h)^+) = \\ &= -\frac{1}{2} \|(h_0 - h(t_0))^+\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

откуда  $(h_0 - h(t_0))^+ = 0$ , и (1.5) доказано.

Пусть теперь  $h' \in \mathcal{Y}'_q$ , пара  $\{h, m\} \in \mathcal{Y} \times \mathcal{H}'$  удовлетворяет вариационному уравнению (2.6), а условия (1.1), (1.3), (1.5)–(1.7) выполнены п. в. или в слабом смысле. Из (2.6) следует, что функционал  $J$  принимает одинаковые значения на функциях  $\varphi$  и  $\varphi - (\text{mes } \Omega)^{-1} \int_{\Omega} \varphi$ , поэтому достаточно показать его ограниченность на множестве

$$\mathcal{X}_0(h) = \left\{ \varphi \in \mathcal{X}(h) \mid \int_{\Omega} \varphi = 0 \text{ п. в. на } (0, T) \right\}.$$

Для  $\varphi \in \mathcal{Y}$  из условия  $\int_{\Omega} \varphi = 0$  п. в. на  $(0, T)$  следует, что  $\|\varphi\|_{\mathcal{X}} \leq C \|\nabla \varphi\|_{\mathcal{X}}$ , где  $C$  — не зависящая от  $\varphi$  константа, а при  $\varphi \in \mathcal{X}(h)$

$$|\nabla \varphi(x, t)|^2 \leq M(h)(x, t) \leq \max(\gamma^2, \|h_0\|_V^2).$$

Отсюда  $\|\varphi\|_{\mathcal{X}} \leq \text{const}$  при  $\varphi \in \mathcal{X}_0(h)$ , и ограниченность непрерывного функционала  $J$  на  $\mathcal{X}_0(h)$  следует из ограниченности в  $\mathcal{Y}$  этого множества.

В силу (1.6),  $|\nabla h| \leq \gamma$  п. в. при  $h > h_0$ . С другой стороны, при почти всех  $t$  функция  $\varphi_t(x) = h(x, t) - h_0(x)$  дифференцируема по  $x$  п. в. и имеет минимум в точках множества  $S_t = \{x \in \Omega \mid h(x, t) = h_0(x)\}$ . Поэтому при  $h(x, t) = h_0(x)$  выполняется  $\nabla h(x, t) = \nabla h_0(x)$  п. в. Отсюда следует, что  $|\nabla h|^2 \leq M(h)$  и, с учетом (1.7),  $\langle m, |\nabla h|^2 - M(h) \rangle = 0$ , т. е. условие дополняющей нежесткости выполнено. Остается показать, что  $\{h, m/2\}$  — седловая точка лагранжиана.

Пусть  $h^* \in \mathcal{Y}$ . Из уравнения (2.6) следует, что

$$\begin{aligned} J(h^*) + \left\langle \frac{m}{2}, B_h(h^*) \right\rangle - J(h) - \left\langle \frac{m}{2}, B_h(h) \right\rangle = \\ = \left\langle \frac{m}{2}, |\nabla(h^* - h)|^2 \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Наконец,  $\langle p^*, B_h(h) \rangle \leq 0$  при любом  $p^* \geq 0$ , поэтому  $J(h) + \langle p^*, B_h(h) \rangle \leq J(h) = J(h) + \langle m/2, B_h(h) \rangle$ . Теорема доказана.

Если поверхность  $y = h_0(x)$  не имеет участков с большим наклоном, точнее,  $|\nabla h_0| \leq \gamma$  п. в. в  $\Omega$ , задача упрощается. В этом случае

$$\mathcal{X}(h) = \mathcal{X} = \{\varphi \in \mathcal{Y} \mid |\nabla \varphi|^2 \leq \gamma^2\}$$

и неравенство (2.1)–(2.4) становится просто вариационным.

**Теорема 2.** Пусть  $v \in \mathcal{Y}'_q$ ,  $v \geq 0$  и  $|\nabla h_0| \leq \gamma$ . Тогда обобщенное решение неравенства (2.2)–(2.4) существует и единственно в  $\mathcal{X} \cap C([0, T]; L_2(\Omega))$ .

Ввиду отсутствия эллиптического оператора задача не является коэрцитивной. Тем не менее доказательство можно провести методом штрафа, следуя схеме доказательства подобной теоремы для параболических вариационных неравенств (см. [12, гл. 3, т. 6.2]). Необходимая при этом равномерная оценка решения уравнения со штрафом является следствием ограничения на градиент, определяющего вид оператора штрафа. Для эллиптических вариационных неравенств задачи с некоэрцитивными операторами рассмотрены в [13].

### § 3. Численный метод

Рассмотрим общий случай движущейся опорной поверхности. Неявная разностная аппроксимация по времени приводит для каждого временного слоя к стационарным квазивариационным неравенствам:

$$h \in K(h) : (h-w, \varphi-h) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}(h).$$

Здесь  $w = v\tau + \tilde{h} + h_0 - \tilde{h}_0$ ,  $\tau$  — шаг по времени, метка  $\tilde{\phantom{x}}$  указывает, что значение берется с предыдущего временного слоя, номер слоя опущен, а  $K(h) = \{\psi \in V \mid |\nabla \psi|^2 \leq M(h)\}$ .

Итерационная процедура

$$(3.1) \quad h^i \in K(h^{i-1}) : (h^i - w, \varphi - h^i) \geq 0 \quad \forall \varphi \in K(h^{i-1})$$

позволяет от задачи с неявными ограничениями перейти к последовательности вариационных неравенств (3.1) или эквивалентных им экстремальных задач

$$(3.2) \quad h^i = \arg \min_{\varphi \in K(h^{i-1})} \{1/2(\varphi, \varphi) - (w, \varphi)\},$$

имеющих единственное решение. Для аппроксимации (3.2) удобно использовать треугольные конечные элементы первого порядка и искать решение в виде линейной комбинации функций формы  $\eta_k(x)$ , принимающих единичное значение в узле  $x_k$  и нулевые в остальных узлах. При этом задача (3.2) примет вид

$$h = \arg \min_{\varphi \in K} \left\{ \frac{1}{2} (N\varphi, \varphi) - (w, \varphi) \right\},$$

где  $N = \|(\eta_i, \eta_m)\|$  — матрица массы,  $h$  и  $\varphi$  — векторы узловых значений  $h^i$  и  $\varphi$ ,  $w$  — вектор скалярных произведений «источника»  $w$  и функций формы, а  $K$  — конечномерная аппроксимация множества  $K(h^{i-1})$ .

Множество  $K$  состоит из наборов  $\{\varphi_h\}$  узловых значений кусочно-линейных функций  $\varphi = \sum \varphi_h \eta_h(x)$ , удовлетворяющих внутри каждого элемента  $e_j$  ограничению  $|\nabla \varphi|_{e_j}^2 \leq M_j$ , где  $M_j$  — константы, определенные ниже. (Градиент  $\varphi$  внутри каждого элемента постоянен.) Эти условия будем записывать в виде

$$f_j(\varphi) = s_j (|\nabla \varphi|_{e_j}^2 - M_j) \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $s_j$  (удобный при использовании методов штрафа нормирующий множитель) — площадь элемента  $e_j$ , а  $n$  — число конечных элементов.

В соответствии с данным выше определением оператора  $M$ , если на очередном шаге итераций во всех узлах элемента  $e_j$  выполнено неравенство  $h^{i-1} > h_0$ , то

$$(3.3) \quad M_j = \gamma^2.$$

Если, наоборот, во всех узлах элемента  $h^{i-1} \leq h_0$ , то

$$(3.4) \quad M_j = \max(\gamma^2, |\nabla h_0|_{e_j}|^2),$$

где под  $h_0$  подразумевается интерполюант опорной поверхности.

Сложнее выбрать ограничение, когда условие  $h^{i-1} > h_0$  выполняется в одном или двух узлах элемента, а в остальных нет. Ввиду неравенства  $h \geq h_0$ , при окончании итерационного процесса такая ситуация должна соответствовать элементам, на которых текущая и опорная поверхности совпадают частично. Использование формул (3.3) и (3.4) может в этом случае приводить, соответственно, к заниженным и завышенным значениям среднеэлементных ограничений на градиент. Численные эксперименты показали, что хорошие результаты дает модификация формулы (3.4), в которой функция  $h_0$  заменена линейной на  $e_j$  функцией с узловыми значениями  $\max(h_0, h^{i-1})$ .

Возникающая на каждой итерации конечномерная задача минимизации функции  $f_0(\varphi) = 1/2(N\varphi, \varphi) - (w, \varphi)$  при ограничениях  $f_1(\varphi) \leq 0, \dots, f_n(\varphi) \leq 0$  является задачей выпуклого программирования. В связи с нелокальным характером ограничений метод поточечной релаксации для ее решения неприменим [14]. Используемый ниже алгоритм поиска седловой точки расширенного лагранжиана, включающего штрафные члены, для задач с ограничениями-неравенствами предложен в [15], [16]. Этот метод представляет собой комбинацию методов двойственности и штрафа и имеет ряд преимуществ по сравнению с каждым из них. На очередном шаге алгоритма при заданном наборе множителей Лагранжа  $y^{(k)}$  находится вектор  $\varphi^{(k)}$ , минимизирующий расширенный лагранжиан

$$L_r(\varphi, y) = f_0(\varphi) + \frac{1}{4r} \sum_{j=1}^n \{ | (y_j + 2rf_j(\varphi))^+ |^2 - y_j^2 \},$$

после чего новые множители Лагранжа вычисляются по формуле

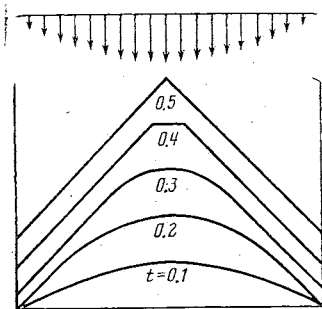
$$y_j^{(k+1)} = (y_j^{(k)} + 2rf_j(\varphi^{(k)}))^+.$$

Метод [15], [16] обладает глобальной сходимостью при фиксированном значении параметра штрафа  $r > 0$ , причем точная минимизация лагранжиана на каждом шаге не обязательна [16]. В настоящей статье для поиска  $\varphi^{(k)}$  использовалась стандартная процедура минимизации, реализующая метод сопряженных градиентов Флетчера — Ривса.

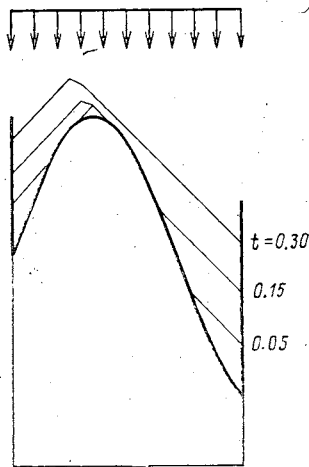
#### § 4. Решение модельных задач

Хотя описанный выше численный метод предназначен для решения двумерных задач, расчеты проводились лишь для задач с плоской или радиальной симметрией, сводящихся к одномерным. Приведем несколько примеров решения плоскосимметричных задач. Во всех случаях область  $\Omega = (0,1)$  разбивается на равные конечные элементы, угол естественного откоса материала  $\alpha = 45^\circ$ . Итерации при решении квазивариационных неравенств проводились, пока значения всех среднеэлементных ограничений на градиент  $M_j$  не устанавливались с точностью 0.01; погрешность минимизации расширенного лагранжиана — порядка  $10^{-5}$ , а параметр штрафа в алгоритме Рокафеллара  $r = 0.1$ . Отметим, что выбор параметра штрафа существенно влияет на скорость сходимости итераций и точность получаемого решения.

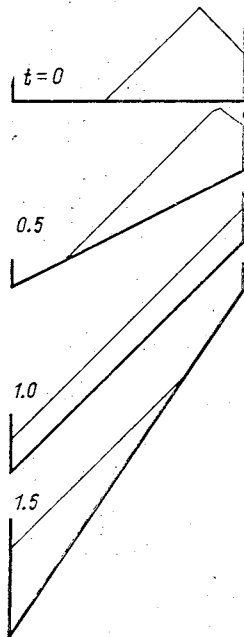
1. «Плоский конус». В случае плоскосимметричного сосредоточенного источника  $v=\delta(x-0.75)$  и горизонтальной исходной поверхности  $h_0=0$  точная кусочно-линейная форма насыпи легко находится. Она хорошо аппроксимируется при использовании 20 конечных элементов (см. таблицу,  $t=0.3$ ). При 10 элементах точность численного решения намного хуже, так как вершина возникающего плоского конуса находится над серединой элемента.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Образование конуса при распределенном источнике. Неравномерность высыпания среды из источника  $v=6x(1-x)$  на горизонтальную плоскость  $h_0=0$  за конечное время приводит к развитию растущего конуса с вершиной, расположенной под точкой с наибольшей интенсивностью высыпания (фиг. 1). Здесь  $n=20$ ,  $\tau=0.1$ .

3. Насыпь на поверхности с крутыми склонами. Пусть  $h_0=1.5 \exp[-(2x-0.7)^2]$  и  $v=1$ . Начиная с некоторого момента возникшая на вершине холма насыпь перестает расти и весь материал ссыпается на правый и левый склоны (фиг. 2). После того как левый склон закроется насыпью, рост конуса возобновляется, причем его вершина смещается влево. Это смещение продолжается, пока и правый склон не будет полностью засыпан. В этом примере  $n=20$ ,  $\tau=0.05$ . Рассмотренная задача не сводится к вариационному неравенству. Для итерационного

x	Точное решение	Приближенное решение, $\tau=0.1$	
		n=20	n=10
0.0	0.0	0.0001	0.0012
0.2	0.0515	0.0517	0.0238
0.4	0.2515	0.2514	0.2236
0.6	0.4515	0.4517	0.4240
0.75	0.6015	0.6018	—
0.8	0.5515	0.5516	0.6244
1.0	0.3515	0.3513	0.4246



решения квазивариационного неравенства приходилось делать в среднем  $\sim 30$  итераций на временной слой.

4. Пересыпание насыпи, вызванное движением основания. В начальный момент времени насыпь  $h(x, 0) = (0.4 - |x - 0.8|)^+$  расположена на горизонтальной опорной поверхности, при повороте которой  $h_0 = t(x-1)$  начинается пересыпание (фиг. 3). В этом примере источник отсутствует:  $v=0$ ,  $n=20$ ,  $\tau=0.1$ .

#### Литература

1. Гришкова А. А. и др. Управление загрузкой доменных печей. М.: Черметинформация. Сер. Автоматизация металлургич. произ-ва, 1981, вып. 4.
2. Hamilius A. et al. Blast furnace practice with stave coolers and a rotating chute for burden distribution at Sidmar, Ghent.— Ironmaking and Steelmaking, 1979, v. 6, № 2, p. 56–61.
3. Carson M. A. Angles of repose, angles of shearing resistance and angles of talus slopes.— Earth Surface Proc., 1977, v. 2, № 4, p. 363–380.
4. Bensoussan A., Lions J.-L. Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications.— Compt. rend. Acad. sci. Ser. A, 1973, t. 276, № 18, p. 1189–1192.
5. Baiocchi C. Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media.— In: Proc. Internat. Congress Math. Vancouver, Aug. 21–29, 1974, p. 237–243.
6. Mosco U. Implicit variational problems and quasivariational inequalities.— Lect. Notes Math., 1976, v. 543, p. 83–186.
7. Fridman S. The angle of repose of potash pellets.— Powder Technol., 1974, v. 10, № 1/2, p. 9–12.
8. Зенков Р. Л. Механика насыпных грузов. М.: Машиностроение, 1964.
9. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
12. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
13. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
14. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
15. Rockafellar R. T. A dual approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization.— Math. Program., 1973, v. 5, № 3, p. 354–373.
16. Rockafellar R. T. The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming.— J. Optimizat. Theory and Appl., 1973, v. 12, № 6, p. 555–562.

Поступила в редакцию 17.X.1984  
Переработанный вариант 26.VIII.1985