פתרונות

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 10.12.2015
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
בוחן ב: חדו"א 1 לביוטכנולוגיה
מס' הקורס: 201.1.9561
סמ' א משך הבוחן- 2 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות A4 אחד (שני צדדים)

יש לענות על כל 4 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות).
נא לפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

בהצלחה !

שאלה מס' 1.

1א) (12 נק') תנו הגדרה לגבול של פונקציה: פונקציה $f(x)$ שואפת ל-L כאשר x שואף ל-a אם לכל סדרה $\{x_n\}$ המקיימת

$\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ x_n \neq a\}$ ק"מ ושווה לאותו מספר L I

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

הגדרה שקולה:

$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ אם לכל $\varepsilon>0$ ק"מ $\delta>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta$ II

אז $|f(x)-L|<\varepsilon$.

1ב) (13 נק') יהיו שתי פונקציות, f ו-g, מוגדרות בסביבת נקודה x_0 וגזירות ב-x_0. הוכיחו כי בנקודה זו $\frac{d}{dx}(f\cdot g)=\frac{df}{dx}\cdot g+f\cdot\frac{dg}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0} g(x)\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)}_{=f(x)}\ \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}_{=g'(x)}+g(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{=f'(x)}=$$

$$=fg'+gf'$$

הערה: f גזירה ב-x אז f רציפה ב-x,

אז $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$

שאלה מס' 2. השתמשו בכלל לופיטל כדי לחשב את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 1-}\left[\ln x\cdot\ln(1-x)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{x\ln^2 x}{1-x} =$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{\ln^2 x + 2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1-}\left(-\ln^2 x - 2\ln x\right) =$$

$$= -\ln^2(1) - 2\ln(1) = 0$$

שאלה מס' 3

3א) (12 נק') מצאו גבול $\lim_{n\to\infty}\left(2^n+3^n\right)^{1/n}$

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{1/n}$$

$$1<\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}$$

$$2^{\frac{1}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

תשובה: $\underline{A=3}$

3ב) (13 נק') עבור $x \neq 1$ מוגדרת פונקציה

$$f(x) = \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$$

האם אפשר להגדיר $f(1)$ כך שהפונקציה תהיה רציפה בנקודה $x=1$? הסבירו.

כאשר $x \to 1^+$ מקבלים:

$\frac{1}{x-1} \to +\infty$, $2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty$, $f(x) \to 0$

כאשר $x \to 1^-$ מקבלים:

$\frac{1}{x-1} \to -\infty$, $2^{\frac{1}{x-1}} \to 0$, $f(x) \to 1$

אז

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

ועבור כל ערך של $f(1)$ פונקצ' $f(x)$ תהי' אי רציפה ב-$x=1$.

שאלה מס' 4. מצאו משוואה של קו משיק לגרף של פונקציה

$$f(x)=(x+e)^{\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)}$$

בנקודה $(0,f(0))$.
מספיק לבטא מקדמי המשוואה דרך הקבועים הידועים e ו- π (אין צורך להציב את ערכם).

משוואת המשיק:

$$y=f(0)+f'(0)(x-0)$$

$$f(0)=e^{\arccos\frac{1}{2}}=e^{\frac{\pi}{3}}$$

$$f(x)=e^{\varphi(x)},\qquad \varphi(x)=\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot\ln(x+e)$$

$$f'(x)=e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)$$

$$\varphi'(x)=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}\cdot\ln(x+e)+\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot\frac{1}{x+e}$$

$$\varphi'(0)=-\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\ln e+\frac{\arccos\frac{1}{2}}{e}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3e}$$

$$f'(0)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{3e}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

תשובה:

$$y=e^{\frac{\pi}{3}}+e^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{3e}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x$$