אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 17.03.09
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **חדו"א 1 לביוטכנולוגיה**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים), מחשב כיס עם צג קטן.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים המיועדים לכך בלבד
לטיוטה השתמשו במחברת טיוטה
לכל השאלות משכל שווה (20 נקודות)

בהצלחה !

שאלה מס' 1. הנוסחה $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{e^x-e^{-x}}$ מגדירה את הפונקציה f עבור $x\neq 0$. הגדירו $f(0)$ כך שהפונקציה תהיה רציפה. האים הפונקציה תהיה גם גזירה בנקודה $x=0$? אם כן, מצאו את הנגזרת $f'(0)$.

$$\sin 5x = 5x + O(x^3)$$

$$e^x - e^{-x} = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)=$$

$$=2x+O(x^3)$$

$$f(x)=\frac{\sin 5x}{e^x-e^{-x}}=\frac{5x+O(x^3)}{2x+O(x^3)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{5}{2}$$

נגדיר $f(0)=\frac{5}{2}$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{5x+O(x^3)}{2x+O(x^3)}-\frac{5}{2}}{x}=\frac{10x+O(x^3)-10x}{[2x+O(x^3)]\,x}=$$

$$=\frac{O(x^3)}{2x^2+O(x^4)}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

אז $f'(0)$ ק"מת ושווה ל-0.

שאלה מס' 2. מצאו את הגבולות הבאים:

א) (10 נק') $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4}$ ב) (10 נק') $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x+2}\right)^{x-2}$

א)

$$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+O(x^6)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)$$

$$\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{8}+O(x^6) = 1-\frac{x^4}{3}+O(x^6)$$

$$\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{3}+O(x^6)}{x^4}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{3}$$

ב)

$$A=\left(\frac{5x}{5x+2}\right)^{x-2} = e^{(x-2)\ln\frac{5x}{5x+2}}$$

$$S(x) = (x-2)\ln\left(\frac{5x}{5x+2}\right) = \frac{\ln 5x-\ln(5x+2)}{\frac{1}{x-2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln 5x-\ln(5x+2)}{\frac{1}{x-2}} \overset{Lop}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{5}{5x+2}}{-\frac{1}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2(x-2)^2}{x(5x+2)} = -\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{S(x)} = e^{\lim_{x\to\infty}S(x)} = e^{-\frac{2}{5}}$$

שאלה מס' 3. נתונה פונקציה $f(x)=\ln\left(1+\frac{2x}{3}\right)$.

רשמו את פולינום טיילור ממעלה שלישית בסביבת נקודה $x_0=0$ וחשבו בעזרתו ערך מקורב של פונקציה f בנקודה $x=0.2$. העריכו את השגיאה בחישוב זה.

$$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}+\underline{\text{שארית}}$$

$$\ln\left(1+\frac{2x}{3}\right)=\overbrace{\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}\right)^3}^{T_3(x)}+R_3(x)$$

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4, \qquad 0\le c\le x$$

$$f^{(4)}(c)=-\frac{6\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(1+\frac{2}{3}c\right)^4}, \qquad 0\le c\le x=0.2$$

$$f(0.2)\approx T_3(0.2)=0.12523\ldots$$

$$|f(0.2)-T_3(0.2)|=\left|\frac{6\left(\frac{2}{3}\right)^4(0.2)^4}{4!\left(1+\frac{2}{3}c\right)^4}\right|\le\frac{6\left(\frac{2}{3}\right)^4(0.2)^4}{4!}=$$

$$=7.9\cdot 10^{-5}$$

תשובה: $\underline{f(0.2)\approx 0.12523}$

$\underline{\text{השגיאה לא גדולה מ-}\ 7.9\cdot 10^{-5}}$

שאלה מס' 4. חקרו את הפונקציה $y=\sqrt{x}\ln(x)$ וסרטטו את הגרף שלה.

<u>צריך למצוא</u>: תחום הגדרה, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול. האים לפונקציה זו יש אסימפטוטות? אם כן, מצאו אותן.

1. תחום הגדרה: $X>0$.

2. כאשר $X\to 0+$ הפונקציה שואפת ל-0:

$$\lim_{X\to 0+}\sqrt{X}\ln X=\lim_{X\to 0+}\frac{\ln X}{\frac{1}{\sqrt{X}}}\overset{Lop}{=}\lim_{X\to 0+}\frac{\frac{1}{X}}{-\frac{1}{2}\cdot X^{-3/2}}=$$

$$=\lim_{X\to 0+}\left(-2X^{1/2}\right)=0.\Rightarrow$$ אז אין אסימפטוטה $X=0$.

3. $$\lim_{X\to\infty}f(x)=\infty$$

4. אסימפטוטה כאשר $X\to+\infty$:

$$k=\lim_{X\to+\infty}\frac{f(x)}{X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{\sqrt{X}}\overset{Lop}{=}\lim_{X\to+\infty}\frac{\frac{1}{X}}{\frac{1}{2\sqrt{X}}}=$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{X}}=0$$

$$b=\lim_{X\to+\infty}f(x)-0\cdot X=\infty$$ — אז אין אסימפטוטה משופעת

5. תחומי עליה וירידה:

$$f'(x)=\frac{1+\frac{\ln X}{2}}{\sqrt{X}}$$

$$f'(x)=0\longrightarrow X=e^{-2}$$

$0 \quad \ominus \quad e^{-2} \quad \oplus$

תחום ירידה: $(0,e^{-2})$

תחום עליה $(e^{-2},0)$

נקודה $X=e^{-2}$ היא נקודת מינימום.

6. קמירות וקעירות:

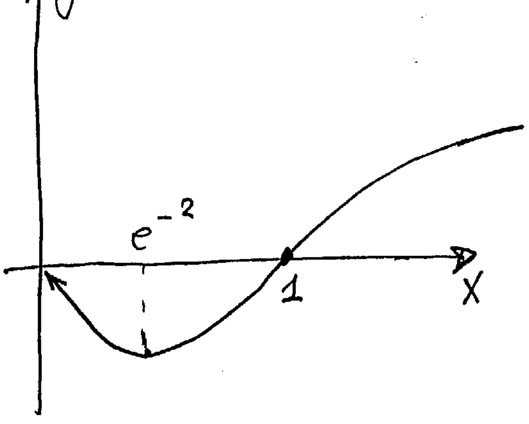
$$f''(x)=\frac{-\ln X}{4X^{3/2}}$$

$0 \quad + \quad 1 \quad -$

קמירות: $(0,1)$

קעירות: $(1,\infty)$

נקודת פיתול $X=1$



שאלה מס' 5.

א) (10 נק') מצאו אורך של העקום הבא נתון בקואורדינאטות פולריות:

$$0 \le \varphi \le \pi / 2, \quad r = \frac{1}{\cos(\varphi - \pi / 3)}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r)^2 + (r')^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\varphi - \frac{\pi}{3})} + \frac{\sin^2(\varphi - \frac{\pi}{3})}{\cos^4(\varphi - \frac{\pi}{3})}}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2(\varphi - \frac{\pi}{3})} =$$

$$= tg\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = tg\frac{\pi}{6} - tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

ב) (10 נק') חשבו את האינטגרל הבא: $\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 t}{(2-\sin^2 t)(\cos t+2)}dt$

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 t\,dt}{(2-\sin^2 t)(\cos t+2)}=\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos^2 t)\,d(-\cos t)}{(2-1+\cos^2 t)(\cos t+2)}=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos^2 t)\,d(-\cos t)}{(1+\cos^2 t)(\cos t+2)}=\left\{\begin{array}{l} x=-\cos t\\ x(0)=-1\\ x(\pi)=1\end{array}\right\}=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)(2-x)}$$

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)(2-x)}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{2-x}\Rightarrow \quad A=\frac{2}{5}\quad B=\frac{4}{5}\quad C=-\frac{3}{5}$$

$$I=\frac{1}{5}\int_{-1}^{1}\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\frac{4}{5}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}+\frac{3}{5}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\left[\frac{1}{5}\ln(x^2+1)+\frac{4}{5}\operatorname{arctg}(x)+\frac{3}{5}\ln|x-2|\right]\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{5}(\ln 3-\ln 3)+\frac{4}{5}(\underbrace{\operatorname{arctg}1}_{\frac{\pi}{4}}-\underbrace{\operatorname{arctg}(-1)}_{-\frac{\pi}{4}})+\frac{3}{5}(\underbrace{\ln 1}_{0}-\ln 3)=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2}{5}\pi-\frac{3}{5}\ln 3.}}$$

שאלה מס' 6.

א) (10 נק') עבור איזה ערכים של a מתכנס האינטגרל הלא אמתי הבא $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^a}dx$?

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^a}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^A\frac{\ln x}{x^a}dx$$

$$I(A)=\int_1^A\frac{\ln x}{x^a}=\begin{cases}\frac{1}{1-a}\int_1^A \ln x\, d(x^{1-a}) & a\neq 1\\ \int_1^A \ln x\, d(\ln x) & a=1\end{cases}$$

$a=1)\quad I(A)=\frac{\ln^2 A}{2}\xrightarrow[A\to\infty]{}\infty \Longrightarrow$ מתבדר

$a\neq 1)\quad I(A)=\frac{1}{1-a}\left[\ln x\cdot x^{1-a}\Big|_1^A-\int_1^A x^{-a}dx\right]=$

$$=\frac{1}{1-a}\left[A^{1-a}\ln A-\frac{A^{1-a}-1}{1-a}\right]=$$

$$=\frac{1}{1-a}\left[A^{1-a}\left(\ln A-\frac{1}{1-a}\right)\right]+\frac{1}{(1-a)^2}$$

$$\lim_{A\to\infty}\left[\frac{\ln A-\frac{1}{1-a}}{A^{a-1}}\right]\overset{Lop.}{=\!=}\lim_{A\to\infty}\frac{\frac{1}{A}}{(a-1)A^{a-2}}=\lim_{A\to\infty}A^{1-a}\cdot\frac{1}{a-1}$$

$$a>1\Longrightarrow \lim_{A\to\infty}A^{1-a}=0$$

$$a<1\Longrightarrow \lim A^{1-a}=\infty$$

תשובה: האינטגרל מתכנס עבור $a>1$.

ב) (10 נק') חשבו את הנגזרת הבאה: $\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{\sin x}\frac{\sin t}{t}dt\right)$.

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{\sin x}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot(\sin x)' -$$

$$- \frac{\sin x^3}{x^3}(x^3)' = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cos x - 3\frac{\sin x^3}{x}$$