אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 16.02.10
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **חדו"א 1 לביוטכנולוגיה**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד ב סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים), מחשב כיס עם צג קטן.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים המיועדים לכך בלבד
לטיוטה השתמשו במחברת טיוטה
לכל השאלות משקל שווה (20 נקודות)

בהצלחה!

שאלה מס' 1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א) (10 נק')

$$I=\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}}\frac{\cos^3(1/x)}{x^2}dx$$

$$I=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}}\cos^3\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)=\left\{t=\frac{1}{x}\right\}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 t\,dt=$$

$$=+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\,d\sin t=\{u=\sin t\}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}(1-u^2)\,du=$$

$$=u-\frac{u^3}{3}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=1-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}=\underline{\underline{\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{12}}}$$

ב) (10 נק')

$$I=\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$$

$$I=\left\{\begin{matrix}x=\ln t\\ dx=\frac{dt}{t}\end{matrix}\right\}=\int\frac{t^3+1}{(t+1)t}dt=\int\frac{1}{t}(t^2-t+1)\,dt=$$

$$=\int\left(t-1+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|+C\Big|_{t=e^x}=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C}$$

שאלה מס' 2. מצאו את הגבולות הבאים:

א) (8 נק')
$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{\cos(ax)}-\sqrt[5]{\cos(bx)}}{\sin^2 x}$$

$$\cos(ax) = 1-\frac{(ax)^2}{2}+O(x^4) = 1+\alpha(x)$$

$$\alpha(x) = -\frac{(ax)^2}{2}+O(x^4)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$ כאשר

$$\sqrt[5]{\cos ax} = \sqrt[5]{1+\alpha(x)} = 1+\frac{1}{5}\alpha(x)+O([\alpha(x)]^2)$$

$$O([\alpha(x)]^2) = O(x^4)$$

קיבלנו ש- $$\sqrt[5]{\cos ax} = 1-\frac{a^2x^2}{10}+O(x^4)$$

5/C

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{a^2x^2}{10}-1+\frac{b^2x^2}{10}+O(x^4)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{10}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+O(x^4)}{\sin^2 x} = \frac{b^2-a^2}{10}$$

ב) (8 נק') $A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{1/x}$

$$\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\left(\ln(1+x)-\ln(1+2x)\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{2}{1+2x}}{1} = -1$$

$$A = e^{-1}$$

ג) (4 נק') $\lim_{x\to 0+} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=}$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

שאלה מס' 3.

חשבו את האינטגרל הלא אמתי הבא: $I = \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx = \{t = x^2\} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{4-t}} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} u^2 = 4-t \\ dt = -2u\,du \\ u = \sqrt{4-t} \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\int \frac{(u^2-4)^2}{u}\,2u\,du =$$

$$= -\int (u^4 - 8u^2 + 16)\,du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{8}{3}u^3 + 16u\right) + C =$$

$$= \underbrace{-\left(\frac{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{8}{3}(4-x^2)^{3/2} + 16(4-x^2)^{1/2}\right)}_{\parallel \atop F(x)} + C$$

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(F(2-\varepsilon) - F(0)\right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F(2-\varepsilon) = 0$$

$$I = -F(0) = \underline{\underline{\frac{2^5}{5} - \frac{8}{3}2^3 + 16 \cdot 2 = 7\frac{1}{15}}}$$

שאלה מס' 4. חקרו את הפונקציה $y = \frac{1}{x} + \ln x$ וסרטטו את הגרף שלה.

<u>צריך למצוא</u>: תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול.

<u>תחום הגדרה:</u> $x>0$, <u>אסימפטוטה אנכית:</u>

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1+x\ln x}{x} = +\infty$$

כי $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$. אז $x=0$ - אסימפטוטה.

אס. משופעת:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=+\infty \Leftrightarrow$$ אין אס. משופעת

<u>תחומי ירידה ועליה:</u>

$$y' = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

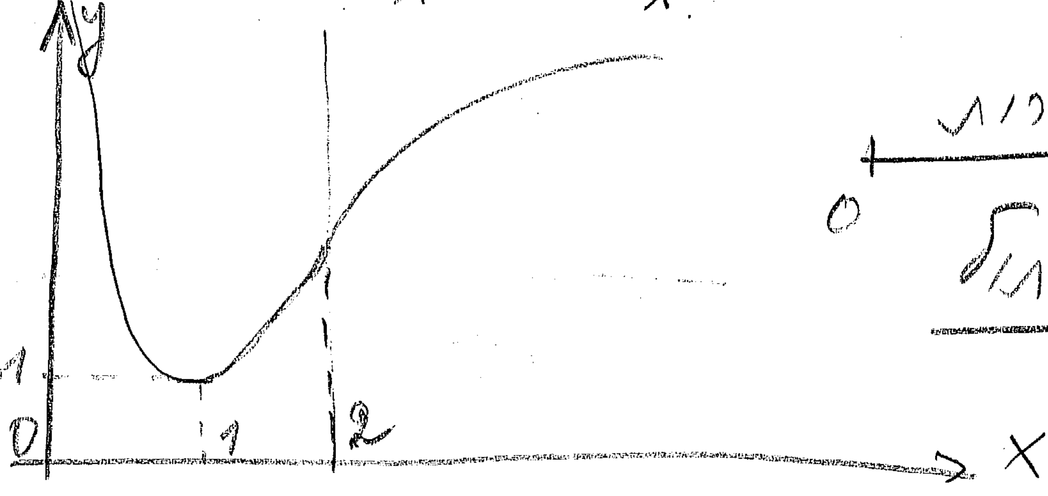
נק. מינימום: $x = 1$

$y(1) = 1$

0 ירידה 1 עליה

<u>תחומי קמירות וקעירות:</u>

$$y'' = +\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$



0 קמירות 2 קעירות

$x=2$ - נק' פיתול

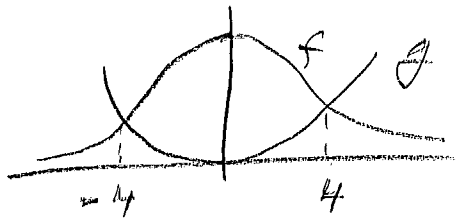
שאלה מס' 5.

חשבו נפח של הגוף הנוצר מסיבוב התחום החסום ע"י קווים $y=\frac{64}{x^2+16}$ ו- $x^2=8y$

סביב ציר x.

$$V=\pi\int(f^2-g^2)dx=$$

$$y=\frac{x^2}{8}=\frac{64}{x^2+16}\Rightarrow x=\pm 4$$



$$=\pi 64^2\int_{-4}^{4}\frac{dx}{(x^2+16)^2}-\frac{\pi}{64}\int_{-4}^{4}x^4dx=$$

$$=\pi 64^2 I_1-\frac{2\pi}{64}\,\frac{4^5}{5}=64^2\pi I_1-\pi\frac{32}{5}$$

$$I_1=\int_{-4}^{4}\frac{dx}{(x^2+16)^2}=\left\{\begin{array}{l}x=4\,tg\,t\\ dx=\frac{4dt}{\cos^2t}\\ x^2+16=16/\cos^2t\end{array}\right\}=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4dt}{16^2\cos^2t\left(\frac{1}{\cos^4}\right)}=\frac{1}{64}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\cos^2t\,dt=$$

$$=\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2t)dt=\frac{1}{64\cdot2}\left(t+\frac{\sin2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1}{132}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

$$V=\pi\frac{64^2}{64\cdot2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=32\pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\frac{32\pi}{5}=$$

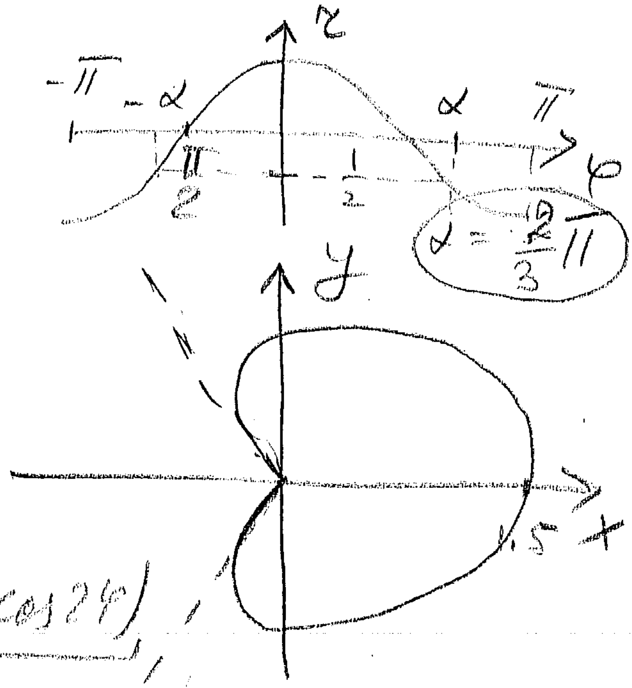
$$=32\pi\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}\right)$$

שאלה מס' 6.

א) (10 נק') סרטטו את העקום $r=0.5+\cos\varphi$ (נתון בקואורדינאטות פולריות) וחשבו שטח התחום החסום ע"י העקום.

$$r \geq 0 \rightarrow \cos\varphi \geq -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq \frac{2}{3}\pi$$



$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} r^2\,d\varphi =$$

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\left(\frac{1}{4}+\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{4}+\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\pi + \sin\frac{2}{3}\pi + \frac{\sin\frac{4}{3}\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8}}}$$

ב) (10 נק') מצאו אורך העקום הבא: $x=\sin^3 t$, $y=\cos^3 t$, $0\le t\le \pi$.

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{(y')^2+(x')^2}\,dt=3\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$

$$=3\int_0^{\pi}|\cos t|\sin t\,dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt-$$

$$-3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\sin t\,dt=-\frac{3}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{4}\cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=3$$