אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 05.04.09
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **<u>חדו"א 1 לביוטכנולוגיה</u>**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד ב סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות

<u>חומר עזר</u>: דף נוסחאות אחד (2 עמודים), מחשב כיס עם צג קטן.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים <u>המיועדים לכך בלבד</u>
לטיוטה השתמשו במחברת טיוטה
לכל השאלות משכל שווה (20 נקודות)

בהצלחה!

שאלה מס' 1. הנוסחה $f(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+x}-1}$ מגדירה את הפונקציה f עבור כל $x>-1$ פרט ל-$x=0$. הגדירו $f(0)$ כך שהפונקציה תהיה רציפה בנקודה $x=0$. האם הפונקציה תהיה גם גזירה בנקודה $x=0$? אם כן, מצאו את הנגזרת $f'(0)$.

$$\frac{\sin x}{\cos x(\sqrt{1+x}-1)} = \frac{x+O(x^3)}{[1-O(x^2)]\left[\frac{x}{2}+O(x^2)\right]} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$$

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x(\sqrt{1+x}-1)}-2}{x} = \frac{\sin x-2\cos x(\sqrt{1+x}-1)}{x\cos x(\sqrt{1+x}-1)} =$$

$$= \frac{x+O(x^3)-2\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+O(x^3)\right)}{x\left(1+O(x^2)\right)\left(\frac{x}{2}+O(x^2)\right)} =$$

$$= \frac{x-x+\frac{x^2}{4}+O(x^3)}{\frac{x^2}{2}+O(x^3)} = \frac{\frac{1}{2}+O(x)}{1+O(x)} \to \frac{1}{2}$$

תשובה:

1) $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 2$

2) נגדיר $f(0)=2$

ונקבל $\exists f'(0)=\frac{1}{2}$

שאלה מס' 2. מצאו את הגבולות הבאים:

א) (10 נק') $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)$ ב) (10 נק') $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(א

$$x\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}\right)=x\left(1+\frac{1}{5x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)-\left(1-\frac{1}{5x}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{5}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{2}{5}$$

(ב

$$A(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\underbrace{\frac{1}{x}(\ln x-\ln(\ln x))}_{S(x)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}S(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x-\ln(\ln x)}{x}\overset{Lop.}{=}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}A(x)=\lim_{x\to\infty}e^{S(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}S(x)}=1$$

שאלה מס' 3. חשבו בעזרת נוסחת טיילור את הערך של $\sin 1$ (1 רדיאן) בדיוק $2\cdot 10^{-4}$.

$\sin 1 = T_n(1) + R_n(1)$, $T_n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

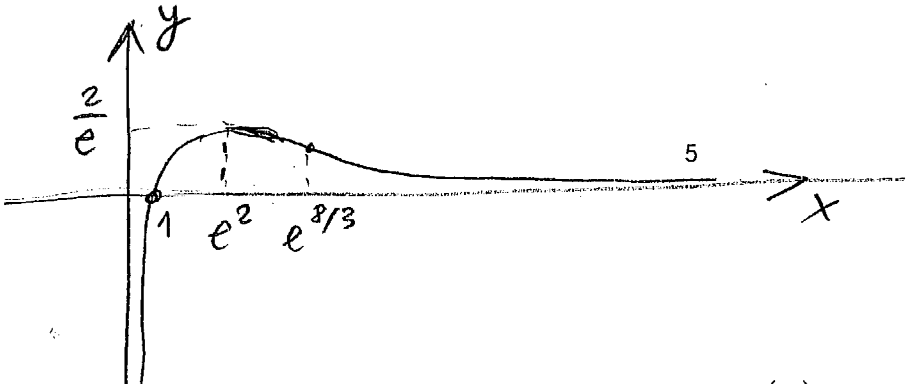
$|R_n(1)| = \left| \frac{(\sin x)^{(n+1)}\big|_{x=c}}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| \le \frac{1}{(n+1)!}$ $\quad 0 \le c \le 1$

$n=2)$ $\quad T_2(x) = x$, $\quad |R_2| \le \frac{1}{6} > 2\cdot 10^{-4}$

$n=4)$ $\quad T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ $\quad |R_4| \le \frac{1}{5!} \approx 0.008 > 2\cdot 10^{-4}$

$n=6)$ $\quad T_6 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad |R_6| \le \frac{1}{7!} = 1.98\cdot 10^{-4} < 2\cdot 10^{-4}$

$\sin 1 \approx T_6(1) \approx 0.8417$



שאלה מס' 4. חקרו את הפונקציה $y=\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ וסרטטו את הגרף שלה.

<u>צריך למצוא</u>: תחום הגדרה, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, אסימפטוטות, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול.

תחום הגדרה $x>0$.   נק' החיתוך עם ציר x: $(1,0)$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty \Rightarrow$$ ישר אסימפטוטה $x=0$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}x^{1/2}}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}=0$$

אסימפטוטה $y=0$

$$y'=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)}{x^2}$$

$y'=0 \Rightarrow x=e^2$

נקודת max: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$

$0 \leftarrow + \quad e^{2} \quad -$

תחום עליה: $0<x<e^2$

תחום ירידה: $e^2<x$

$$y''=\left[x^{-3/2}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)\right]'=-\frac{3}{2}x^{-5/2}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)-x^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2x}=$$

$$=-\frac{3}{2}x^{-5/2}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{x^{-5/2}}{2}=-2x^{-5/2}+\frac{3x^{-\frac{5}{2}}}{4}\ln x=$$

$$=x^{-\frac{5}{2}}\left(-2+\frac{3}{4}\ln x\right).$$

$y''=0 \Rightarrow e^{8/3}$

$y''>0 \rightarrow x>e^{8/3}$ פונקציה קמורה בתחום,

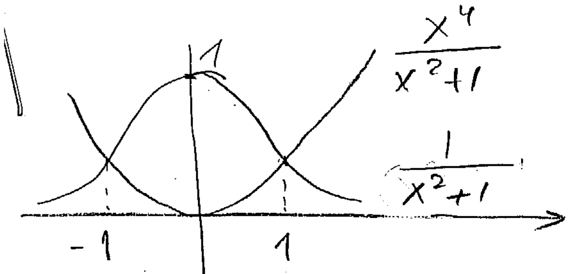
$y''<0 \rightarrow 0<x<e^{8/3}$ פונקציה קעורה בתחום

נקודת פיתול $x=e^{-2/3}$.

שאלה מס' 5.

חשבו נפח של הגוף הנוצר ע"י סיבוב סביב ציר X של תחום מישורי כלוא בין עקומות

$y=\frac{x^4}{x^2+1}, \quad y=\frac{1}{x^2+1}.$



$$\frac{x^4}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow x=\pm 1.$$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}-\frac{x^8}{(x^2+1)^2}\right]dx=-\pi\int_{-1}^{1}\frac{(x^8-1)dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^8-1}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2-1)(x^4+1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{(x^2+1-2)(x^4+1)}{x^2+1}=x^4+1-2\frac{x^4+1}{x^2+1}=x^4+1-2x^2+2-\frac{4}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{l} x^4+1 \;\big|\; x^2+1 \\ \underline{x^4+x^2} \quad x^2-1 \\ -x^2+1 \\ \underline{-x^2-1} \\ \quad 2 \end{array}$$

$$V=-\pi\int_{-1}^{1}\left(x^4-2x^2+3-4\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=-\pi\left[\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+6-8\,\mathrm{arctg}\,1\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{14}{15}-6+2\pi\right]=3.82$$

שאלה מס' 6.

א) (10 נק') מצאו קו משיק לעקומה $\left\{x = ae^t + t^2,\ y = be^{t^2} + t\right\}$ בנקודה $(x(0), y(0)) = (a,b)$. מצאו גם ערך של $\frac{d^2y}{dx^2}(x_0)$ כאשר $x_0 = x(0)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2be^{t^2}t+1}{ae^t+2t}$$

$$\frac{dy}{dx}(a) = \frac{1}{a} \quad \left(\begin{array}{c}\text{מקבלים} \\ \text{עבור} \\ t=0\end{array}\right)$$

קו משיק:

$$\boxed{y = b + \frac{1}{a}(x-a)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{2bte^{t^2}+1}{ae^t+2t}\right)'_t}{ae^t+2t} =$$

$$= \frac{\left[4bt^2e^{t^2}+2be^{t^2}\right]\left[ae^t+2t\right]-\left[2bte^{t^2}+1\right]\left[ae^t+2\right]}{(ae^t+2t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(a) = \frac{2ba - a - 2}{a^3} \quad \left(\begin{array}{c}\text{מקבלים} \\ \text{עבור} \\ t=0\end{array}\right)$$

ב) (10 נק') הוכיחו את ההתכנסות וחשבו את האינטגרל הלא אמתי הבא: $I(1)=\int_0^1 \frac{x\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{x\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx=\{t=x^2\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2}\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2}\arcsin t\, d(\arcsin t)=$$

$$=\frac{1}{4}(\arcsin\alpha^2)^2$$

$$I(1)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1}{4}(\arcsin\alpha^2)^2=\frac{1}{4}(\arcsin 1)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}$$