

רציפות הפונקציה. נגזרת

. I

1 הוכח כי למשוואות הבאות יש לפחות שורש אחד בקטע הנתון :

a)  $2^x - 5x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$       c)  $\ln^2 x + \ln x = 1, \quad x \in [1/e, e]$

b)  $2x^4 - x^3 = 6, \quad x \in [-2, 0]$       d)  $\sin^3 x + \cos^3 x = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$

2 תהי  $f(x)$  רציפה על כל הישר ונניח כי  $|f(x)| \leq 5$  לכל  $x \in R$ . הוכח כי למשוואה  $3x + f(x) = 9$  יש לפחות פתרון אחד.

3 האם קיימים שורשים לפונקציה  $f(x)$  : a)  $f(x) = \frac{1}{x} + x$       b)  $f(x) = 1 - x \cdot 2^x$

. II . מצא את האסימפטוטות האנכיות ואופקיות (אם הם קיימות) לגרפים של הפונקציות הבאות :

1)  $y = 5 + \frac{2}{x-1}$       2)  $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$       3)  $y = \tan \frac{x}{2}$       4)  $\sqrt{5-x^2}$       5)  $y = e^{-1/x}$

6)  $y = \ln(x+4)$       7)  $y = \frac{|x|^3}{x^3 - 8}$       8)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}$       9)  $y = \frac{\sin(x-6)}{(x-6)}$       10)  $y = \frac{2}{1 - e^{5x}}$

נגזרת של פונקציה

. III

חשב נגזרת של פונקציה על פי ההגדרה

1)  $f(x) = 3x + 5$       2)  $s(t) = t^2 - 9$       3)  $u(v) = \sqrt{3v+1}$       4)  $a(b) = \sin 3b$

גזור את הפונקציות הבאות :

5)  $y(x) = (3x^2 + 4x + 1)e^{3x-2}$       6)  $p(x) = \frac{x}{-x^2 + 5x}$       7)  $u(t) = (8t^2 + 1)\cos(3t + 2)$

8)  $y(x) = x^3 \tan 5x$       9)  $m(p) = \sqrt[3]{2p} + 25p^2 + 7p - 5$       10)  $u(v) = 7^{4v^2-3v+5}$

11)  $t(s) = 5\cos^{10} 2s$       12)  $y = e^{\sqrt[4]{x}}$       13)  $s = 1/\ln 3t$       14)  $y = \arctan(3-x^2)$       15)  $y = \sin \frac{1}{x^2}$

16)  $f(x) = \cos 2^x + 4^{\sqrt{x}}$       17)  $y = \frac{\cot 2x}{2^{3-2x}}$       18)  $y = \cos(1-\pi x)\sqrt{1-e^{2x}}$       19)  $y = \arcsin(2\ln^3 x)$

20)  $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$       21)  $f(x) = \frac{1}{\cos^n x}$       22)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

23)  $f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$       24)  $f(x) = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$

25)  $f(x) = \left( \frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right) e^{-x}$       26)  $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

27)  $f(x) = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$       28)  $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0, x > 0)$

29)  $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0)$       30)  $f(x) = \log_a^3 x^2 \quad (a > 0, a \neq 1)$       31)  $f(x) = e^x + e^{e^x}$

32)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}, \quad (b > 0, a > 0)$       33)  $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

34)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{2}}{x}$       35)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$       36)  $f(x) = \sqrt[x]{x} \quad (x > 0)$

IV

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

הוכח כי להפונקציה  $f(x)$  נגזרת בלתי רציפה.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0 \\ ax + b, & x > x_0 \end{cases} \quad (3)$$

עבור אילו ערכים של המקדמים  $a, b$  הפונקציה  $f(x)$  (רציפה ו)גזירה

בנקודה  $x_0$  ?

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c, & 0 < x < 1 \\ 3 - 2x, & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

עבור אילו ערכי המקדמים  $c, b, a$  הפונקציה  $f(x)$  גזירה?

### המשמעות של הנגזרת

V

מצא את משוואת הישר המשיק לגרף של הפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $M(x_0, y_0)$

$$1) f(x) = \frac{x}{x+1}, x_0 = 3 \quad 2) f(x) = \sqrt{2x^4 - 1}, x_0 = 1$$

$$3) f(x) = e^{4x} + 3 \arctan 2x, x_0 = 0 \quad 4) f(x) = \ln(2x), x_0 = \frac{1}{2e}$$

מצא את משוואת הישר הנורמל לגרף של הפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $M(x_0, y_0)$

$$5) f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6} \quad 6) f(x) = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}, x_0 = 2a$$

7) פונקציית הדרך של חלקיק פיסיקלי לאורך הישר היא  $s(t) = \sqrt{t+1}$ . מה תהיה מהירותו בזמן  $t_0 = 5$

### הדיפרנציאל של פונקציה

VI

חשב את הדיפרנציאלים של הפונקציות הבאות :

$$1) f(x) = \frac{1}{x} \quad 2) f(x) = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad 3) f(x) = \left(1 + 2x - 3x^2\right)^5$$

$$4) f(x) = \sin 2x - 2x \cos 2x \quad 5) f(x) = \frac{1}{x^3} \quad 6) f(x) = \cot^5 \frac{x}{2} \quad 7) f(x) = 5^{\ln \tan x}$$

$$8) f(x) = \ln \cot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} \right) \quad 9) f(x) = \sqrt{\arcsin 3x} + (\arctan 7x)^3$$

חשב

$$10) d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) \quad 11) d\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right) \quad 12) d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad 13) d(\ln(1-x^2)) \quad 14) d(\sinh^5 3x)$$

חשב בקירוב תוך החלפת התוספת של הפונקציה בדיפרנציאל (קירוב ליניארי):

$$15) \sqrt[3]{1.02} \quad 16) \sin 29^\circ \quad 17) \cos 151^\circ \quad 18) \arctg 1.05 \quad 19) \ln 1.05 \quad 20) e^{0.98^2}$$