בעיה 12

תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbf{K})$ מטריצה מסדר $n\times n$ מעל שדה K. ברר האם המטריצה A היא הפיכה ? אם כן מצא את המטריצה הפוכה עבור A.

אלגוריתם (דרך א):

צעד 1 - הרכב את מטריצה $B=(A\,|\,\mathbf{I})$ כאשר, $\mathbf{I}$ היא המטריצה היחידה מסדר $n\times n$.

צעד 2 - דרג את המטריצה B לצורה מדורגת קנונית B'. אם בתהליך של דירוג של B מופיע שורת אפסים בבלוק A של המטריצה B אזי מטריצה A לא הפיכה. אחרת עבור לצעד 3

צעד 3 בחר בצורה מדורגת קנונית $B'=(\mathbf{I}\,|\,C)$ את מטריצה C. אזי C היא המטריצה הפוכה עבור A ז.א. $C=A^{-1}$.

אלגוריתם (דרך ב):

צעד 1-חשב את דטרמיננטה $\det A$ של מטריצה A. אם $\det A=0$ אזי המטריצה A לא הפיכה. אחרת עבור לצעד 2

צעד 2 - חשב את האיברים b_{ij}:

$$(*)\quad b_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}\left|M_{ji}\right|}{|A|},\quad i,j\in\{1,\dots,n\}$$

כאשר M_{ji} הוא המינור של האיבר a_{ji} של A. אזי המטריצה $(b_{ij})=A^{-1}$.

הערה: הביטוי $(-1)^{i+j}\left|M_{ji}\right|$ נקרא המשלים האלגברי של האיבר a_{ij} ותסומן ב- A_{ji}:

$$A_{ji}=(-1)^{i+j}\left|M_{ji}\right|$$

דוגמא:

תהי מטריצה A:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

ברר האם המטריצה A היא הפיכה ? אם כן מצא את המטריצה הפוכה עבור A.

1. פתרון בעזרת אלגוריתם א

נרכיב את מטריצה הבלוקים $B=(A\,|\,\mathbf{I})$ כאשר I היא המטריצה היחידה מסדר 3×3. אחר כך בעזרת אלגוריתם 1 נגיע לצורה מדורגת קנונית B':

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1/2L_1 \to L_1 \\ \Rightarrow \\ \ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 - L_1 \to L_2 \\ \Rightarrow \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -L_2 \to L_2 \\ \Rightarrow \\ \ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3 - 2L_2 \to L_3 \\ \Rightarrow \\ -1/3L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 - 4L_3 \to L_2 \\ \Rightarrow \\ L_1 - 2L_3 \to L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{1/6} & \mathbf{4/3} & \mathbf{2/3} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{-1/6} & \mathbf{5/3} & \mathbf{4/3} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1/6} & \mathbf{-2/3} & \mathbf{-1/3} \end{array}\right) = B'$$

$\mathbf{A^{-1}}$

במשך של דירוג לא הופיעה שורת אפסים בבלוק A של המטריצה B. אזי בחצי הימני המטריצה אחרונה B' עומדת את המטריצה A^{-1}.

<u>2. פתרון בעזרת אלגוריתם ב:</u>
<u>נחשב את המשלימים האלגבריים של האיברים של A:</u>

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 .$$

מפני שהדטרמיננטה של A שווה ל-6, נקבל את המטריצה A^{-1} לפי הנוסחה (*):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 4/3 & 2/3 \\ -1/6 & 5/3 & 4/3 \\ 1/6 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$