25/12/05

פיתרון במבחן
מועד ב'

1) אלגו' Bellman-Ford.

השינוי היחיד שצריך לעשות הוא
הערכת המרחק העדכנית עם
ההערכה שמקבלים בהוספת
ועוד משקל בקשת על-ידי, מתקבלת
ההוספה.

זמן ריצה: $O(m)$.

תקשורת: כיון שכל צומת עשוי
לעדכן את הערכת המרחק שלו
לכל היותר $n\cdot f(n)$ פעמים
(שכן אורכי המסלולים האפשריים
הם בתחום $\{n\cdot f(n), \ldots, 2, 1\}$).
על-כן כמות ההודעות היא

$$\sum_{v\in V} \deg(v)\cdot O(f(n)\cdot n) = O(|E|\cdot n\cdot f(n))$$

2. (a) האלג' הוא:

v מפעיל לפעול בסיבוב $\hat{L}(v)+1$.

הוא מעדכן את $\tilde{d}_v \leftarrow d_v$.

אם בסוף $\tilde{d}_v \le 1$ (כלו' יש אסימונים מיותרים בתת-העץ T_v) וכמות האסימונים במצבור יותר v גדולה או שווה ל-2, אזי v שולח אסימון לאביו.

כמו-כן הוא מעדכן את d_v ל-$\tilde{d}_v$ (מוסיף לו 1).

<u>טענה:</u> בסיום האלג', לכל $v \in V$, $\tilde{d}_v \ge 0$.

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה שקיים $v \in V$ שמקיים $\tilde{d}_v = n_v - \tilde{k}_v \le -1$,

כאשר $\tilde{k}_v$ הוא כמות האסימונים ב-T_v בשלב הזה. דהיינו $n_v \le \tilde{k}_v - 1$,

$\tilde{k}_v \ge n_v + 1$.

יהי $\tilde{l}_v$ כמות אסימונים ב-v בשלב הזה.

אם v הוא <u>עלה</u> אזי ~~$\tilde{k}_v = \tilde{l}_v \ge 2$~~

ולכן v היה שולח אסימון לאביו, סתירה.

אחרת . $\tilde{k}_v = \tilde{l}_v + \sum_{w \in Ch(v)} \tilde{k}_w$

אם $\tilde{l}_v \geq 2$ אזי השיקול הקודם מביא לסתירה.

אחרת, $\tilde{l}_v \leq 1$, וזה גורר

$$\tilde{d}_v = n_v - \tilde{k}_v = (1 - \tilde{l}_v) + \sum_{w \in Ch(v)} (n_w - \tilde{k}_w) =$$

$$= (1 - \tilde{l}_v) + \sum_{w \in Ch(v)} \tilde{d}_w \leq -1$$

$$\Rightarrow \sum_{w \in Ch(v)} \tilde{d}_w \leq \tilde{l}_v - 2 \leq -1.$$

לכן קיים בן $w \in Ch(v)$ שמקיים

$\tilde{d}_w \leq -1$,

לכן אפשר להפעיל את השיקול הנ"ל עם הבן w. בצורה הזאת נבנה סדרת צמתים $v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$,

כאשר v_{i+1} הוא בנו של v_i, ו-v_k

בגלל זה אלה או מקיים $\tilde{\ell}_{v_u} \geq 2$,

וכן הצמתים הנ"ל מקיימים $\tilde{d}_{v_i} \leq -1$.

בשני המקרים מגיעים את השיקול

הקודם של v_u ומגיעים לסתירה.

מ.ש.ל.

(ב) טענה: $\tilde{\ell}_v = 1 + \left(\sum_{w \in Ch(v)} \tilde{d}_w\right) - \tilde{d}_v$.

הוכחה

$$1 + \sum_{w \in Ch(v)} \tilde{d}_w - \tilde{d}_v =$$

$$= 1 + \left(\tilde{k}_v - \sum_w \tilde{k}_w\right) - \left(u_v - \sum_w u(w)\right) =$$

$$= 1 + \tilde{\ell}_v - 1 = \tilde{\ell}_v.$$

מ.ש.ל.

3) נסתכל על צומת $v \in V$,
ועל הרגע הראשון x שבו v
מעלה את משתנה הדופק P_v שלו ל-n,
עבור ערך שלם חיובי n כלשהו.
לכל ~~שכן~~ צומת $w \in V$, ~~של v~~ מתקיים

$$P_w(x) \ge P_v(x) - \Delta_{max}.$$

לפי הגדרת $Timepulse(\eta)$, אחרי
$Timepulse(\eta)$ יחידות (מקסימליות) של זמן
יתקיים שלכל $w \in V$,

$$P_w(x) \ge P_v(x) - \Delta_{max} + 1,$$

ואחרי $Timepulse(\eta) \cdot (\Delta_{max})$ יחידות
זמן יתקיים שלכל $w \in V$,

$$P_w(x) \ge P_v(x).$$

בפרט, לכל שכן w של v יתקיים
אחרי $Timepulse(\eta) \cdot \Delta_{max}$ יחידות זמן ש

$$P_w(x) \ge P_v(x).$$

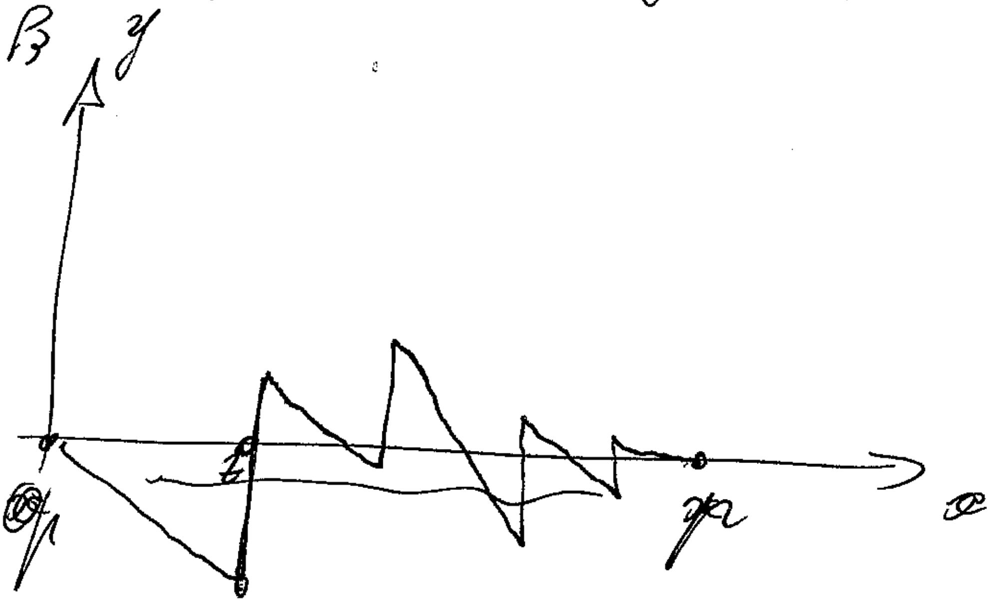
לכן, לפי הגדרת $Timepulse(\eta)$, אחרי $Timepulse(\eta)$
יחידות זמן נוספות יעלה v את הפולס שלו
ל $P_v(x) + 1 = n + 1$.

מ.ש.ל.

ט) <u>טענה:</u> תמיד קיימת נקודה כנ"ל.

<u>הוכחה</u>

תהי נקודה שרירותית על המעגל.
נשים את המכוניות ב-[illegible] ונסע איתם
בכיוון שרירותי, כשאנו מניחים (רק לצורך
הדיון) שמותר לנסוע ללא דלק.
נצייר את גרף ~~[illegible]~~ של כמות
הדלק של המכונית ~~[illegible]~~ כפונ' של ה-x
יש לנו את הנקודה שבה נמצאות
המכוניות, ועל ציר ה-y - כמות הדלק.
כשהמכונית אין דלק היא נכנסת
ל"אוברדראפט" ~~[illegible]~~ וכמות הדלק בה נ"ת
שלילית.



כשהמכונית "נוסעת עם דלק" כמות
הדלק שהיא ~~מתכלה~~ מבזבזת תהיה שוה לכמות
הדלק שהיא היתה ~~...~~ מבזבזת לו היה
לה הדלק בשפע.

נסתכל על גרף הפונקציה.

ברור שבתחום הסיבוב המכונית מגיעה
לנק' רק עם אותה כמות הדלק שעימה
החלה המכונית את הסיבוב.

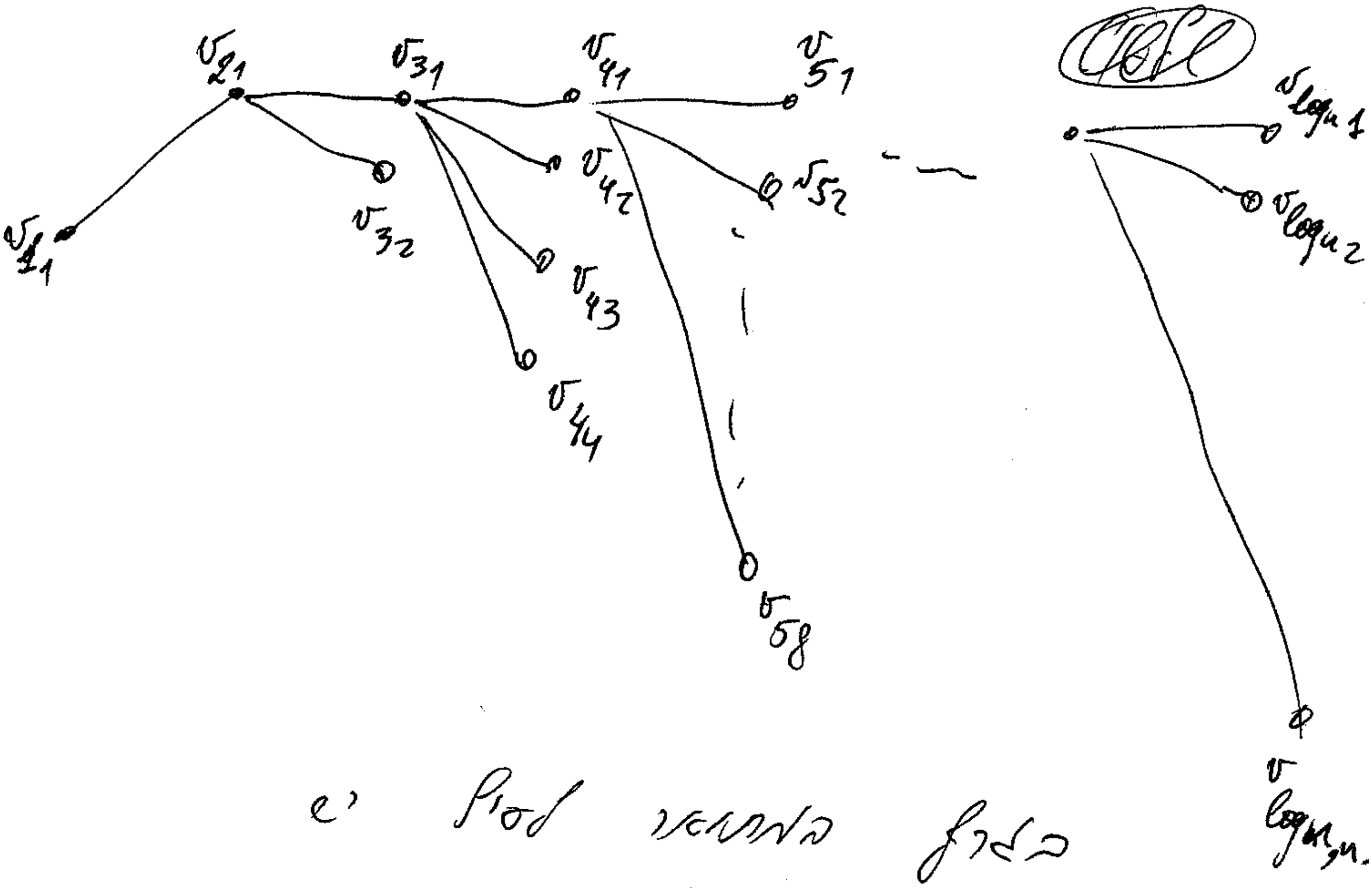
~~...~~ לכן הגרף מתחיל מערך y שווה
ל-0 ונגמר בערך y שווה ל-0.
הפונקציה היא פונקציה רציפה בקטע סגור,
ועל-כן היא מקבלת בו מינימום ומקסימום.

תהי z נקודת המינימום.
אם הערך של כמות הדלק ב-z הוא
גדול או שווה ל-0, אז גמרנו (כי
זו היתה המסקנה שאנו מחפשים).
אחרת, ~~...~~ כמות הדלק ב-z,
f(z) בגרף שלנו היא שלילית, אבל אם נתחיל
מ-z את הסיבוב (במקום את האוטו
ב-x מלכתחילה), אז בכל נקודה במעגל
כמות הדלק תהיה גדולה ב-|f(z)| מהכמות
שהיתה בה ~~שהחלה מ-x~~.

ולכן כמות הדלק בכל נקודה
תהיה חוקית כנדרש.
מ.ש.ל.

ד) המעבד v שיוצא מן הבסיס
שולח הודעת broadcast ברשת
עם כמות הדלק של המכונית שיוצאת
מהבסיס שלו בכיוון שליחת ההודעה.
כל צומת רושם לעצמו את כמות
הדלק של המכונית בכניסתו לתחנה,
מעדכן את כמות הדלק בהודעה
broadcast, ושולח את ההודעה הלאה.
בתום ה-broadcast הנ"ל, יוזם v
convergecast של מציאת נקודת המינימום
של בעץ. בתום ה-convergecast
יודע v את זהות הצומת z
שבו כמות הדלק היא מינימלית.
(רק לצומת שבמינימום מושג בנקודת
כניסה לאותה התחנה).
ע"י broadcast נוסף מודיע v את
כל שאר הצמתים על ה-Id של z.
זמן הריצה ~~ותקשורת הם~~ $O(n)$.

סעיף (ג)



בגרף המתואר לעיל יש

$$\cancel{1}+1+2+\dots+2^{\log n-1} = 1+2^{\log n}-1=n$$

צמתים.

מקוטר שלו $D=\Theta(\log n)$

(הרדיוס כיוון ש-v_{11} הוא במרחק $\log n-1$.)

הגרף של Dijkstra של ~~כמה הרבה~~ כמות ההודעות

בגרף, אם v_{11} יוזם יחיד.

$$\cancel{1+(1+2)}+(1+2+4)+\dots+(1+2+\dots+2^{\log n})=$$

$$= 1 + (2^2-1) + (2^3-1) + \dots + (2^{\log n+1}-1)$$

$$= (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{\log n+1}) - (\log n - 1) =$$

$$= 2^2(1 + 2^1 + \dots + 2^{\log n-1}) - (\log n - 1) =$$

$$= 2^2(2^{\log n} - 1) - (\log n - 1) =$$

$$= 2^{\log n+2} - \log n - 3 = O(n)$$

Note that $\Omega(n \cdot D) = \Omega(n \cdot \log n)$.

ב

~~כן.~~

הוכחה: אלג' Dijkstra שולח
לפחות פעם אחת כל צלע בגרף
הגרף שלו. מ.ש.ל.

ג

$\Omega(D^2)$ זמן. ~~כן~~ -

הוכחה

לפי מבנה האלג', האלג' קורא

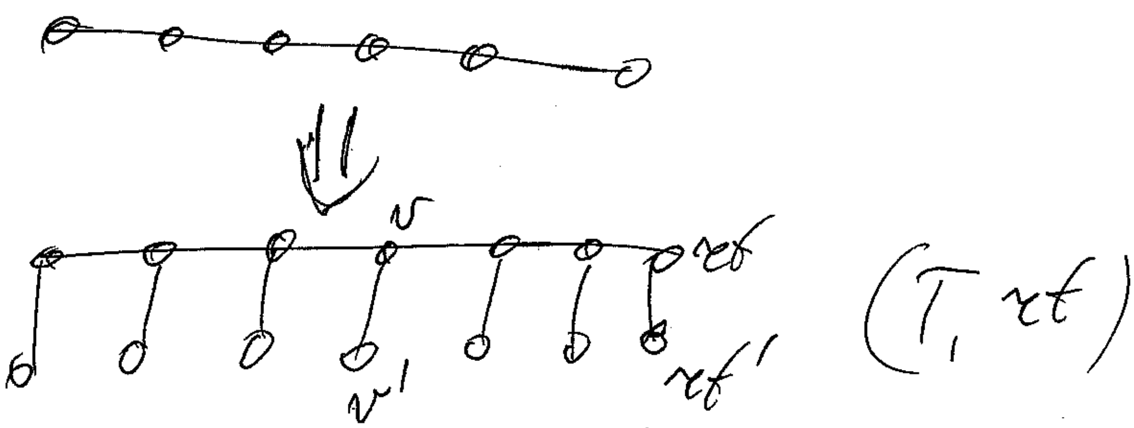
$$1 + 2 + \dots + Rad(G,v) = \frac{Rad(G,v)(Rad(G,v)-1)}{2}$$

$$= \Omega(D^2)$$

מ.ש.ל.

זמן.

ט) יהי Π^* אלג' לבעית מסלול $P=(V(P),E(P))$ שפורש
באופן הבא: בונים עץ (T,r)
שבו השורש שלו הוא הקצה השמאלי
של המסלול, ובעץ יש את כל הצמתים
והצלעות של המסילה ובנוסף לכך,
לכל צומת v במסילה מתווסף צומת v'
חדש שמחובר ל-v באמצעות צלע
חדשה $\{v',v\}$.



~~הרצת אלג' Π^* מפלט את~~
כמו-כן, הקב' U תוגדר
כאוסף כל הצמתים החדשים v'
$U=\{v' \mid v\in V(P)\}$.
קל לראות ש-U היא קב' ב"ת
מקסימלית.

עתה באלג' Π^* מפעיל

את האלג' Π על הגרף (T,id)

ומקבל קב"ת מקסימלית U.

באלג' Π^* כל צומת ע מסמנת גם

את יע. בתום הביצוע של Π,

מתעלם Π^* מהצבעים שניתנו לצמתי יע,

ומשתמש רק בצבעים שניתנו לצמתי

המסילה. הצביעה שמתקבלת היא 3-צביעה

של המסילה (כי היא צמצום למסילה

של הצ-צביעה של (T,id)).

לכן $Time(\Pi^*) \le Time(\Pi) + O(1)$.

~~כמו-כן~~ $\cancel{Time(\Pi^*) = \Omega(\log^* n)}$.

~~על-כן~~ $\cancel{Time(\Pi) = \Omega(\log^* n)}$,

~~כנדרש~~.

מ.ש.ל.

ע"ק