תגבור

שבוע 9

מני סדיגורסקי

שאלה

הוכיחו כי לכל ציור מישורי של K_n עבור $n \geq 5$, יש לפחות $\frac{\binom{n}{5}}{n-4}$ חיתוכים בין צלעות (אפשר להניח שאין צלעות שכנות שנחתכות).

רמז: K_5 אינו מישורי.

תשובה

נשים לב שבגרף K_n עבור $n \geq 5$, כל תת גרף המורכב מחמישה קודקודים כלשהם והצלעות החלות בהם הוא K_5, ולכן כל תת גרף כזה הוא לא מישורי, ויש בו לפחות חיתוך אחד. כל חיתוך כזה מורכב משתי צלעות, שנוגעות בסה"כ 4 קודקודים (צלעות שכנות לא נחתכות). מספר החיתוכים שנקבל הוא כמספר תתי הגרפים האלה, שהוא $\binom{n}{5}$, אך כל חיתוך עלול להספר n-4 פעמים, במספר החמישיות שמכילות רביעיית קודקודים נתונה. אם כך מספר החיתוכים הוא לפחות:

$$\frac{\binom{n}{5}}{n-4}$$

כנדרש.

שאלה

גרף פשוט G עם n קודקודים נקרא outer-planar אם הוא מישורי ובנוסף ניתן לציירו במישור כך שכל הקודקודים על הפאה האינסופית.

1. הוכיחו כי יש ב- G לכל היותר $2n-3$ צלעות.
2. הוכיחו כי ניתן לצבוע את קדקדי G ב3 צבעים באופן חוקי.

תשובה

1. נוסיף לגרף קדקוד ונחבר אותו בצלעות לכל מהקדקודים על הפאה החיצונית. ניתן לעשות זאת ללא חיתוכי צלעות. קיבלנו גרף מישורי עם n+1 קדקודים וכן |E|+n צלעות, ומהמשפט עבור גרפים מישוריים $|E|+n \leq 3(n+1) - 6 = 3n-3$
   בפרט $|E| \leq 2n-3$.

שאלה

גרף פשוט G עם n קודקודים נקרא outer-planar אם הוא מישורי ובנוסף ניתן לציירו במישור כך שכל הקודקודים על הפאה האינסופית.

1. הוכיחו כי יש ב- Gלכל היותר 2n − 3 צלעות.
2. הוכיחו כי ניתן לצבוע את קדקדי G ב3 צבעים באופן חוקי.

תשובה (פתרון נוסף)

1. תחילה נניח כי הגרף קשיר. עבור פאה $f \in F$ נסמן ב - t(f) את מספר הצלעות שמקיפות אותה. נסמן בf_{out} את הפאה החיצונית. אם הגרף הוא עץ, אז יש לכל היותר $n-1$ צלעות וסיימנו. אחרת, הצלעות החלות על כל פאה מכילות מעגל, ובפרט משרות גרף קשיר, לכן לפחות nצלעות מקיפות את הפאה החיצונית f_{out}. מכיוון שכל פאה מוקפת על ידי 3 צלעות לפחות, אנחנו מסיקים כי

$$2|E| = \sum_{f\in F} t(f) = t(f_{out}) + \sum_{f\in F\setminus\{f_{out}\}} t(f) \geq n + 3\cdot(|F|$$

$-1)$ ממשפט אוילר, . . $|E| = n + |F| - 2 \leq n + \left(\frac{2}{3}|E| - \frac{1}{3}n + 1\right) - 2$

ובפרט, $|E| \leq 2n-3$.

בעת נטפל במקרה שהגרף אינו קשיר. יהיו $C_1, \ldots, C_k$ רכיבי הקשירות באשר m_i צלעות חלות בC_i. נשים לב של רכיב קשירות הינו outer-planar ולכן מהחלק הראשון בשאלה אנחנו מסיקים

$$|E| = \sum m_i \leq \sum (2|C_i| - 3) = 2n - 3k \leq 2n - 3$$

שאלה

גרף פשוט G עם n קודקודים נקרא outer-planar אם הוא מישורי ובנוסף ניתן לציירו במישור כך שכל הקודקודים על הפאה האינסופית.

1. הוכיחו כי יש ב- Gלכל היותר $2n-3$ צלעות.
2. הוכיחו כי ניתן לצבוע את קדקדי G ב3 צבעים באופן חוקי.

תשובה

2. נוסיף קדקוד חדש v בפאה החיצונית, נוסיף צלע ממנו לכל שאר קדקדי הגרף. ממשפט ארבעת הצבעים ניתן לצבוע את הגרף החדש $G \cup \{v\}$ ב4 צבעים. מאחר ו v מחובר לכל שאר הקדקודים בהכרח הוא צבוע בצבע (מתוך ה4 הצבעים שבהם נצבע הגרף) שונה מכל שאר הקדקודים ובפרט שאר הקדקודים צבועים בשאר 3 הצבעים. כלומר קדקודי G צבועים באופן חוקי ב3 צבעים בלבד.

שאלה

יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי עם n קדקודים ו m צלעות. נתון כי אורך המעגל הקצר ביותר ב G הינו מאורך לפחות k>2. הוכח כי

$$m \le \left(\frac{k}{k-2}\right)(n-2)$$

תשובה

נסמן את מספר הצלעות התוחמות פאה f בסימון $t(f)$. מאחר וכל צלע שותפה לכל היותר לשתי פאות מקבל

$$2m=\sum_f t(f)$$

לפי הנתון אין מעגלים מאורך קטן מ k ולכן בפרט לכל פאה יש לכל הפחות k צלעות שתוחמות אותה, כלומר $t(f)\ge k$. ולכן נקבל מהמשוואה הקודמת

$$2m \ge \sum_f k = k|F|$$

נציב אי שוויון זה נוסחת אוילר ונקבל כי

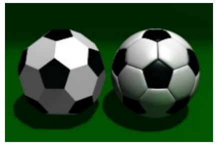
$$2=n+|F|-m \le n+\frac{2m}{k}-m$$

נעביר אגפים ונקבל

$$m \le \left(\frac{k}{k-2}\right)(n-2)$$

שאלה

נתבונן בכדור כדורגל מהסוג שהופיע במונדיאל 1970



הכדור מורכב ממשושים ומחומשים. בכל קדקוד נפגשים בדיוק שני מחומשים ומשושה אחד.

כמה מחומשים וכמה משושים יש בכדור?

עובדה: נוסחת אוילר תקפה גם עבור גרפים המצוירים על כדור [כאשר במצב כזה אין פאה אינסופית] ☺

תשובה

נסמן ב x את מספר המשושים וב y המחומשים.

תחילה נשים לב שמתקיים במובן $F = x + y$.

נסמן את מספר הצלעות התוחמות פאה f בסימון $t(f)$. לכל משושה מתקיים $t(f_6) = 6$ ולכן מחומש $t(f_5) = 5$. כל צלע משתתפת בדיוק ב 2 פאות ולכן $6x + 5y = \sum_f t(f) = 2E$.

נשים לב כי דרגת כל קדקוד היא בדיוק 3 וממשפט הדרגות נקבל כי

$$3V = \sum_v \deg(v) = 2E = 6x + 5y$$

ומנוסחת אוילר נקבל

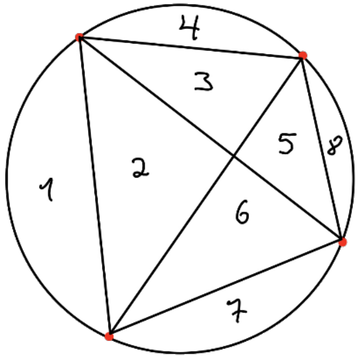
$$2 = F + V - E = x + y + \frac{6x + 5y}{3} - \frac{6x + 5y}{2} = \frac{y}{6}$$

כלומר $y = 12$. בעת נשים לב כי כל מחומש גובל בדיוק ב5 משושים. אם נסמן לכל מחומש p את מספר המשושים הגובלים בו ב $h(p)$ נקבל כי $\sum_p h(p) = 5y = 60$ בסכמה הזאת כל משושה נספר בדיוק שלוש פעמים, מאחר וכל משושה גובל ב 3 מחומשים בדיוק. ולכן מספר המשושים הוא $x = \frac{60}{3} = 20$.

לסיכום – יש 12 מחומשים ו 20 משושים.

שאלה

נתונות n נקודות על מעגל.
מותחים קו ישר בין כל שתי נקודות באופן כזה שאין אף שלושה קווים שנחתכים באותה נקודה.
למה חלקים מחלקים הקווים את פנים המעגל?
דוגמה: עבור 4 נקודות נקבל



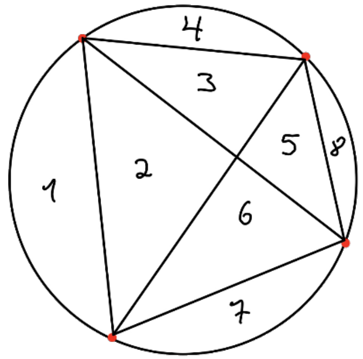
תשובה

נסיר תחילה את הקשתות המחברות את הקדקודים על המעגל עצמו.
הקדקודים, הקווים המחברים אותם ונקודות החיתוך יוצרים גרף מישורי (מעצם זה שהוא מצויר במישור וכל נקודת מפגש בין צלעות מוגדרת בקדקוד).
בגרף זה יש n קדקודים מהנתון בשאלה ובנוסף כל נקודת מפגש של שני קווים מקשרים ביניהם יוצרת קדקוד נוסף. כלומר הוספנו $\binom{n}{4}$ קדקודים ולכן יש בסך הכל $n+\binom{n}{4}$ קדקודים.
מכל נקודה שעל המעגל יוצאות $n-1$ קשתות ומכל קדקוד פנימי (נקודת מפגש) יוצאים בדיוק 4 קשתות. כל אחת מהקשתות שאליהם התייחסנו נספרה פעמים. כלומר יש בסך הכל $\frac{n(n-1)+4\binom{n}{4}}{2}$ קשתות.
מנוסחת אוילר נקבל

$$\mathrm{F} = 2 - \mathrm{V} + \mathrm{E} = 2 - \left(n + \binom{n}{4}\right) + \left(\frac{n(n-1) + 4\binom{n}{4}}{2}\right)$$

שאלה

נתונות n נקודות על מעגל.
מותחים קו ישר בין כל שתי נקודות באופן כזה שאין אף שלושה קווים שנחתכים באותה נקודה.
למה חלקים מחלקים הקווים את פנים המעגל?
דוגמה: עבור 4 נקודות נקבל



תשובה (המשך)

נשים לב שמספר זה כולל את הפאה אחיצונית/האינוספית ולכן עלינו לחסר 1.
בעת נחזיר את הקווים שהסרנו (המעגל עצמו) בלומר n קווים על המעגל, שיוצרים עוד n אזורים (בין כל שני קדקודים סמובים על המעגל יש קו, והאזור שנוצר מהקו המחבר בינם ובין הגרף המישורי לא נספר עד בה) בלומר אנו מוסיפים n פאות. ולכן בסך הכל התשובה היא

$$1+\frac{n(n-1)}{2}+\binom{n}{4}$$