תגבור 5

מני סדיגורסקי

שאלה

מהו מספר הסדרות באורך n מעל $\{0,1,2,3,4\}$
עם סכום זוגי?

תשובה

שאלה

מהו מספר הסדרות באורך n מעל {0,1,2,3,4} עם סכום זוגי?

תשובה

נשתמש בסימונים הבאים:

a_n – מספר הסדרות באורך n מעל {0,1,2,3,4} שבהן סכום הסדרה זוגי.

b_n – מספר הסדרות באורך n מעל {0,1,2,3,4} שבהן סכום הסדרה אי-זוגי.

ננסה להרכיב נוסחת נסיגה. נסתכל על הספרה השמאלית ביותר, קיימות שתי אפשרויות:

- ספרה זו היא זוגית. בעת על מנת שהסדרה תהיה באורך n ושסכום איבריה יהיה זוגי, עלינו להרכיב סדרה זוגית באורך n-1(שכן סכום זוגי בתוספת מספר זוגי, ייתן סכום זוגי). כלומר a_{n-1}.
- ספרה זו אי-זוגית. בעת על מנת שהסדרה תהיה באורך n ושסכום איבריה יהיה זוגי, עלינו להרכיב סדרה אי-זוגית באורך n-1(שכן סכום אי-זוגי בתוספת מספר אי-זוגי, ייתן סכום זוגי). כלומר b_{n-1}.

כיוון שיש 3 האפשרויות לספרה זוגית ו2 אפשרויות לספרה אי-זוגית, נוסחת הנסיגה היא :

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \to b_{n-1} = \frac{1}{2}(a_n - 3a_{n-1})$$

שאלה

מהו מספר הסדרות באורך n מעל {0,1,2,3,4} עם סכום זוגי?

תשובה

כעת ננסה להרכיב נוסחת נסיגה עבור b_n . נסתכל על הספרה השמאלית ביותר, קיימות שתי אפשרויות:

- ספרה זו היא זוגית. כעת על מנת שהסדרה תהיה באורך n ושסכום איבריה יהיה אי-זוגי, עלינו להרכיב סדרה אי-זוגית באורך n-1(שכן סכום אי-זוגי בתוספת מספר זוגי, ייתן סכום אי-זוגי). כלומר b_{n-1}.
- ספרה זו אי-זוגית. כעת על מנת שהסדרה תהיה באורך n ושסכום איבריה יהיה אי-זוגי, עלינו להרכיב סדרה זוגית באורך n-1(שכן סכום זוגי בתוספת מספר אי-זוגי, ייתן סכום אי-זוגי). כלומר a_{n-1}.

כיוון שיש 3 אפשרויות לספרה זוגית ו2 אפשרויות לספרה אי-זוגית, נוסחת הנסיגה היא :

$$b_n = 3b_{n-1} + 2a_{n-1} \rightarrow \frac{1}{2}\left(a_{n+1} - 3a_n\right) = \frac{1}{2}*3*\left(a_n - 3a_{n-1}\right) + 2a_{n-1}$$

מפישוט הביטוי ושינוי אינדקסים מקבלים:

$$a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2}$$

תנאי ההתחלה לבעיה הם:

$$a_1 = 3; a_2 = 13$$

תשובה

שאלה

מצא את הפתרון הכללי של נוסחאות הנסיגה הבאות)במידה ואין תנאי התחלה אין צורך למצוא את מקדמי הנוסחה)

1. $a_n = 3a_{n-1} + 2$ עם תנאי ההתחלה $a_0 = 1$
2. $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 4a_{n+1}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 4$
3. $a_{n+2} - 4a_{n+1} - 13a_n = 0$ ללא תנאי התחלה.
4. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ללא תנאי התחלה

שאלה

מצא את הפתרון הכללי של נוסחאות הנסיגה הבאות)במידה ואין תנאי התחלה אין צורך למצוא את מקדמי הנוסחה)

1. $a_n = 3a_{n-1} + 2$ עם תנאי ההתחלה $a_0 = 1$
2. $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 4a_{n+1}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 4$
3. $a_{n+2} - 4a_{n+1} - 13a_n = 0$ ללא תנאי התחלה.
4. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ללא תנאי התחלה

תשובה

$$a_n = 3a_{n-1} + 2 = 3^2 a_{n-2} + 2(1+3)$$
$$= 3^2(3a_{n-3} + 2) + 2(1+3) = 3^3 a_{n-3} + 2(1+3+3^2)$$
$$= \ldots = 3^k a_{n-k} + 2\sum_{i=0}^{k-1} 3^i$$
$$= \ldots = 3^n a_0 + 2\sum_{i=0}^{n-1} 3^i$$
$$3^n + 2(3^n - 1)/2 = 2 \cdot 3^n - 1$$

בעת עלינו להוכיח זאת באינדוקציה

בסיס: $a_0 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

הנחה: עבור k מתקיים $a_n = 2 \cdot 3^k - 1$

צעד: עבור k+1 נקבל

$$a_{k+1} = 3a_k + 2 = 3\left(2 \cdot 3^k - 1\right) + 2 = 2 \cdot 3^{n+1} - 1$$

(השוויון השני מתקבל מהנחת האינדוקציה)

כנדרש.

שאלה

מצא את הפתרון הכללי של נוסחאות הנסיגה הבאות (במידה ואין תנאי התחלה אין צורך למצוא את מקדמי הנוסחה)

1. $a_n = 3a_{n-1} - 2$ עם תנאי ההתחלה $a_0 = 1$
2. $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 4a_{n+1}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 4$
3. $a_{n+2} - 4a_{n+1} - 13a_n = 0$ ללא תנאי התחלה.
4. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ללא תנאי התחלה

תשובה

1. $2 \cdot 3^n - 1$
2. $a_n = 4^n$
3. $a_n = A\left(2 + \sqrt{17}\right) + B\left(2 - \sqrt{17}\right)$
4. $a_n = A\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + B\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$

שאלה

1. מצא פתרון לנוסחת הנסיגה הבאה כאשר

$$a_0 = 1$$

$$a_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

רמז: אינדוקציה

2. הוכח כי מספר הדרכים לכתיבה של מספר טבעי n בסכום של מספרים טבעיים (כאשר סדר הנסכמים חשוב/מובחן) הינו 2^{n-1}.

רמז: העזר סעיף א

תשובה

שאלה

1. מצא פתרון לנוסחת הנסיגה הבאה באשר

$$a_0 = 1$$

$$a_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

<u>רמז</u>: אינדוקציה

2. הוכח כי מספר הדרכים לכתיבה של מספר טבעי n כסכום של מספרים טבעיים (באשר סדר הנסכמים חשוב/מובחן) הינו 2^{n-1}.

<u>רמז</u>: העזר סעיף א

תשובה

<u>טענה</u>: $a_n = 2^n$

בסיס: $n = 0$ נקבל $a_0 = 1 = 2^0$

הנחה: עבור n מתקיים

$$a_n = 2^n$$

צעד: נתבונן ב a_{n+1}

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n} a_i = 1 + a_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 2a_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

שאלה

1. מצא פתרון לנוסחת הנסיגה הבאה כאשר

$$a_0 = 1$$

$$a_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

<u>רמז</u>: אינדוקציה

2. הוכח כי מספר הדרכים לכתיבה של מספר טבעי n כסכום של מספרים טבעיים (כאשר סדר הנסכמים חשוב/מובחן) הינו 2^{n-1}.

<u>רמז</u>: העזר סעיף א

תשובה

יהי מספר n. נסמן את מספר הדרכים לפרק את המספר לסכום ב a_n

יש דרך אחת בלבד לרשום את n כסכום של איבר יחיד $n = n$

נתייחס למצב זה בנפרד

ולכן נניח כי האיבר הגדול ביותר בסכום קטן ממש מ n.

יהיה k מספר בין 1 ל n-1.

נתבונן בסכום שבו המספר האחרון הוא k.

$$n = k_1 + \ldots + k_i$$

(כאשר $k = k_i < n$)

נשים לב כי $n - k = k_1 + \ldots + k_{i-1}$

מספר הדרכים לסכום זה (כלומר הסכום בלי k) הוא a_{n-k}

מכאן שמספר הדרכים לפרק את n לסכום כאשר הנסכם הגדול ביותר הוא k שווה a_{n-k}

ולכן בסך הכל מספר הדרכים לפרק את n לסכום שווה

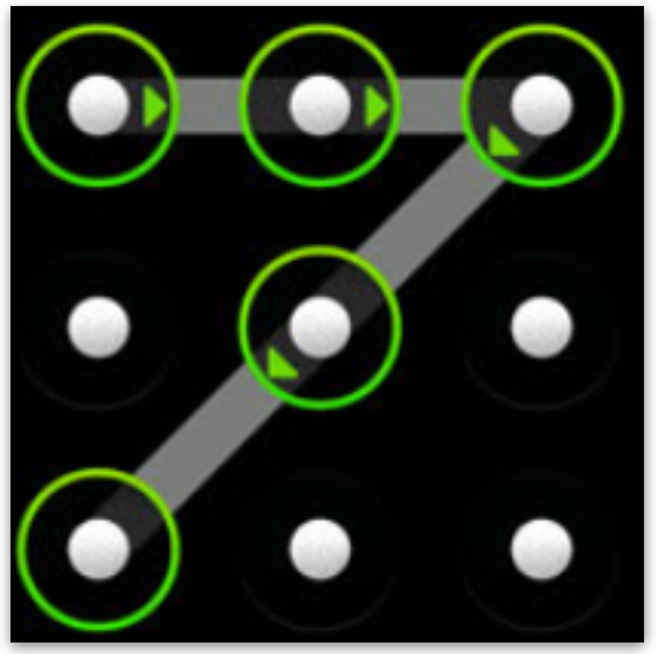
$$a_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

ועל פי סעיף א נקבל כי

$$a_n = 2^n$$

שאלה

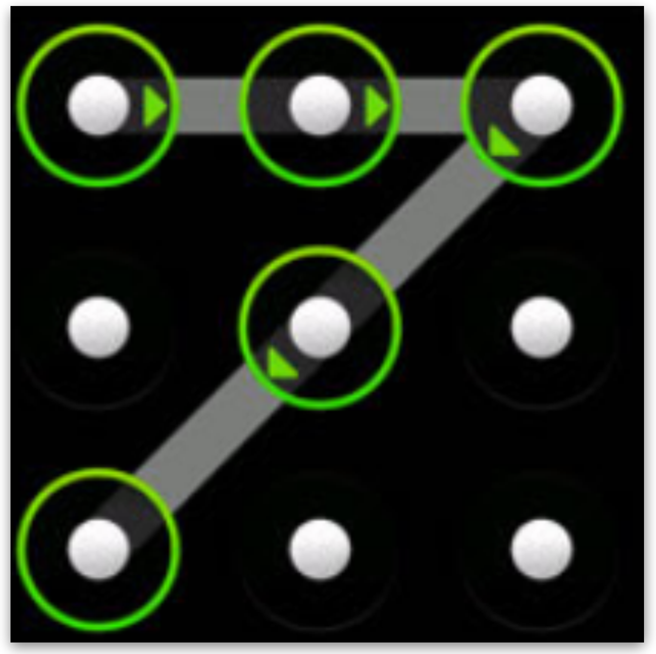
דפוס נעילה של טלפון סלולרי הוא מסלול מאורך n בין נקודות סריג מגודל 3X3 (מותר בכל שלב לעבור מנקודה לכל אחת הנקודות הסמוכות אליה, גם באלכסון כולל נקודות שביקרנו בהם בשלב קודם).
מצא ביטוי מפורש למספר דפוסי הנעילה מאורך n המתחילים המתחילים מאחת הפינות. יש למצוא נוסחת נסיגה ולפתור אותה



תשובה

שאלה

דפוס נעילה של טלפון סלולרי הוא מסלול מאורך n בין נקודות סריג מגודל 3X3 (מותר בכל שלב לעבור מנקודה לכל אחת הנקודות הסמוכות אליה, גם באלכסון כולל נקודות שביקרנו בהם בשלב קודם).
מצא ביטוי מפורש למספר דפוסי הנעילה מאורך n המתחילים מאחת הפינות. יש למצוא נוסחת נסיגה ולפתור אותה



תשובה

נסמן ב- a_n את מספר הדפוסים מאורך n המתחילים בפינה השמאלית העליונה.

נשים לב כי a_n הוא גם מספר הדפוסים מאורך n המתחילים בכל אחת מהפינות.

בנוסף נסמן ב b_n את מספר הדפוסים מאורך n המתחילים באחת מ 4 הנקודות שבין 2 פינות.

לבסוף, נסמן ב c_n את מספר הדפוסים מאורך n המתחילים במרכז.

נקבל את הנוסחאות הבאות

$$a_n = 2b_{n-1} + c_{n-1}$$
$$b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + c_{n-1}$$
$$c_n = 4a_{n-1} + 4b_{n-1}$$

מאלה נקבל כי

$$a_n = 2a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$$

מכאן שהמשוואה האופיינית היא

$$x^3 - 2x^2 - 12x - 8 = 0$$

ולה שורשים

$$-2, 2+\sqrt{8}, 2-\sqrt{8}$$

ולכן

$$a_n = A(-2)^n + B\left(2+\sqrt{8}\right)^n + C\left(2-\sqrt{8}\right)^n$$