שאלות לתגבור 3

פסקל

שאלה

לכל נקודה במשולש פסקל נתבונן בשש הנקודות שסובבות אותה (בדוגמה כאן, המספר הצבוע באדום הינו המרכז). נחלק את הקודקודים לשתי קבוצות של קודקודים לא סמוכים. בדוגמה – הנקודות בכחול הן קבוצה אחת והנקודות בירוק הן קבוצה שניה

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

נקבל כי מכפלת כל קבוצה זהה $5X6X20 = 4X10X15$

1. בטאו תבונה זו באופן מתמטי (במשוואה).
2. הוכיחו אלגברית את השיוויון.

תשובה

1. $\binom{n-1}{m-1}\binom{n}{m+1}\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1}\binom{n-1}{m}\binom{n+1}{m+1}$
2. $\binom{n-1}{m-1}\binom{n}{m+1}\binom{n+1}{m} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}$
$= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \binom{n}{m-1}\binom{n-1}{m}\binom{n+1}{m+1}.$

מולטינום

שאלה

מה המקדם של $x^2y^3z^4$ בביטוי $(x+y+z)^9$?

תשובה

על מנת לקבל $x^2y^3z^4$ יש לבחור בשניים מהפולינומים במכפלה ב – x, בשלושה מהם ב-y, ובארבעה מהם ב-z. מספר האפשריות לכך הוא

$$\binom{9}{2,3,4}$$

מאחר וכל מחובר בזה תורם 1 למקדם הרי שהמקדם יהיה $\binom{9}{2,3,4}$.

שאלה

מה המקדם של x^{21} בביטוי $(-1-2x^2+4x^5+6x^7)^6$?

תשובה

על מנת לקבל x^{21} יש לבחור באחת מהאפשרויות הבאות:

- בשלושה מהפולינומים במכפלה ב- $6x^7$ ובשאר השלושה ב -1. יש $\binom{6}{3.0.3.0}=20$ מחוברים כאלה. כל מחובר בזה תורם $(-1)(-1)(-1)\cdot 6\cdot 6\cdot 6=-216$ למקדם .
- בשניים מהפולינומים במכפלה ב- $6x^7$, באחד ב $4x^5$ ובאחד ב $-2x^2$ ובשניים הותרים ב -1. יש $\binom{6}{2,1,1,2}=180$ מחוברים כאלה. כל מחובר בזה תורם $(-1)(-1)(-2)\cdot 6\cdot 6\cdot 4=-288$ למקדם .
- באחד מהפולינומים במכפלה ב- $6x^7$, בשניים ב $4x^5$ ובשניים ב $-2x^2$ ובאחד ב -1. יש $\binom{6}{1,2,2,1}=180$ מחוברים כאלה. כל מחובר בזה תורם $(-1)(-2)(-2)\cdot 6\cdot 4\cdot 4=-384$ למקדם .
- בשלושה מהפולינומים במכפלה ב $4x^5$ ובשלושה ב $-2x^2$. יש $\binom{6}{0,3,3,0}=20$ מחוברים כאלה. כל מחובר בזה תורם $(-2)(-2)(-2)\cdot 4\cdot 4\cdot 4=-512$ למקדם .

בסך הכול נקבל שהמקדם הוא

$$-216\cdot 20-288\cdot 180-384\cdot 180-512\cdot 20=-135520$$

שאלה

מה המקדם של x^4 בביטוי $(1-2x^3+4x^5+6x^7)^{100}$?

תשובה

נשים לב כי אין אף דרך לקבל את הביטוי x^4 בעזרת מכפלות של מחוברי הפולינום ולכן המקדם הוא 0.

שאלה

בגן בלנית 14 ילדים. לאור המצב הגן סגור. בהתאם להקלות האחרונות הותר על הילדים להתחלק לקבוצות קבועות של 3 ולהתפצל למטפלות פרטיות. יש בנמצא 5 מטפלות שמוכנות לקלוט את הילדים. כמה דרכים יכולים הילדים להתחלק לקבוצות?

תושבה

נשים לב כי בהכרח תהיה בדיוק מטפלת אחת שאצלה ישובצו 2 ילדים בלבד ובכל שאר ה 4 ישובצו 3 כל אחת. כלומר תחילה יש לבחור מי תהיה המטפלת שתקבל רק 2 ולאחר מכן לחלק את הילדים ל5 קבוצות – אחת של 2 ו4 של 3. לפי נוסחת המולטינום יש $\binom{14}{3,3,3,3,2}$ דרכים לבצע חלוקה כזאת ולכן בסך הכול (כולל בחירת המטפלת שאצלה יהיו רק 2) נקבל $5\binom{14}{3,3,3,3,2}$ אפשרויות.

קטלן

שאלה

דוד ויונתן משחקים משחק הימורים פשוט עם מטבע. בכל סיבוב מטילים מטבע, אם יוצא עץ – דוד מביא ליונתן ביטקוין אחד, אם יוצא פלי – יונתן מביא לדוד.

הם שיחקו את המשחק במשך 47 סבבים ובסופן, דוד שהתחיל עם 3 ביטקוינים סיים ללא אף ביטקיון אבל מצד שני באף שלב במשחק הוא לא היה חייב ליונתן (הוא לא הגיע למאזן שלילי). כמה סדרות שונות של עץ-פלי יכולות היו להביא למצב כזה?

תשובה

כל רצף כזה מתאים לסדרה סוגריים מאוזנים מאורך 50 שמתחילה מ "(((" .

נחשב מספר זה בעזרת המשלים – כמה סדרות סוגריים מאוזנות מאורך 50 לא מתחילות ב "((("?

ישנן 2 אפשרויות איך סדרה כזאת מתחילה:

1) "()" – נותר להשלים עוד 24 זוגות בצורה מאוזנת ויש $\frac{1}{25}\binom{48}{24}$ כאלה
2) "(()" - נותר להשלים עוד 47 סוגרים, כך שבכל רישא מספר הסוגרים השמאליים קטן לכל היותר באחד מהימניים. אבל זה בדיוק מספר הסדרות המאוזנות באורך 48, כלומר יש $\frac{1}{25}\binom{48}{24}$ כאלה.

בסך הכול ישנן $\frac{1}{26}\binom{50}{25} - 2\frac{1}{25}\binom{48}{24}$ סדרות המתאימות למתואר בשאלה.

שאלה

מהו מספר הדרכים לערום מטבעות (בהנחה והן לא נופלות הצידה) כאשר בשורה התחתונה יש n מטבעות. בכל שורה יתכנו לכל היותר מספר קטן ב 1 ממספר המטבעות בשורה שתחתיה.

המחשה לאפשרויות לערמות עבור n=3

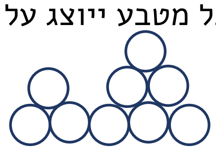
תשובה

הערה – הפתרונות כאן לא מלאים וכתובים בצורה מתומצתת מעט. נא לקחת בחשבון.

פתרון 1

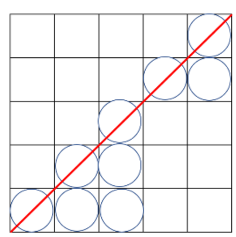
נמקם את המטבעות במישור, כל מטבע ייוצג על ידי ריבוע באורך ורוחב 1 כאשר בסיס הערמה יונח על הקו $y = x$

לדוגמה עבור הסידור



נקבל

1)



נשים לב שקיימת התאמה חח"ע ועל בין כל סידור תקין של מטבעות לבין כל הילוך מ $(0,0)$ ל (n, n) שבהם מותר לנוע רק ימינה או למעלה ואסור לעבור את האלכסון. מכאן שמספר הסידורים שווה למספר ההילוכים הנ"ל כלומר C_n

פתרון 2

נתבונן על הערמה משמאל לימין, כל מטבע יחולק לעליה (צידוהשמאלי) וירידה (צידו הימני). עבור ערימה נתייחס להילוך על המטבעות (על קו המתאר של הערימה), כל פעם שעולים נסמן U וכל פעם שיורדים נסמן D. נקבל שכדי שהערימה תהיה תקינה מספר ה U וה D חייבים להיות שווים ובנוסף לא ניתן לרדת לפני שעלינו, כלומר בכל ראשית של ה"הילוך" מספר ה U גדול שווה למספר ה D.
התיאור מגדיר פונקציה חח"ע ועל בין הערמות התקינות לסדרות הסוגריים המאוזנים ולכן מספרם C_n

פתרון 3

נסמן ב a_n את מספר הסידורים התקינים. עבור סידור מטבעות כלשהו נסמן ב k את הנקודה הראשונה שבה אין אף מטבע בשורה מעל מימין (במידה ואין כזה $k = n$). כעת נשים לב שמשמאל לנקודה המסומנת השורה השנייה מלאה עד אותה נקודה ומספר הסידורים האפשריים עד לאותה נקודה הוא a_{k-1} ומספר הסידורים מימין הוא כמספר הסידורים עבור הבסיס שנותר כלומר a_{n-k} מכאן שסך האפשרויות הוא

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\, a_{n-k}$$

מאחר וידוע לנו גם כי $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$

נקבל כי $a_n = C_n$