תגבור

שבוע 13

מני סדיגורסקי

שאלה

קבוצות הכדורסל בוסטון סלטיקס ולוס אנג'לס לייקרס מתחרים על תואר אלופת ה NBA . הם משחקים סדרה של משחקים והקבוצה הראשונה המגיעה ל4 ניצחונות מנצחת את הסדרה. בהנחה שהקבוצות שקולות (כל אחת מנצחת כל משחק בהסתברות חצי). מה ההסתברות שהסלטיקס ינצחו את הסדרה?

תשובה

מסימטריה – 0.5

שאלה

יהי f משתנה מקרי אי-שלילי עם
תוחלת 3 ושונות 5
מצאו חסם טוב בכל שתוכלו
להסתברות ש $f \geq 6$.

תשובה

ננסה את שני חסמי הזנב שלמדנו
תחילה ננסה את מרקוב

$$Pr(f \geq 6) \leq \frac{3}{6} = 0.5$$

נבדוק כעת את צ'ביצ'ב

$$Pr(f \geq 6) \leq Pr(f \geq 6 \; or \; f \leq 0) = Pr(|f-3| \geq 3) \leq \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$$

נשים לב שבמקרה הזה אי-שוויון מרקוב נתן חסם הדוק יותר.

שאלה

מטילים 5 קוביות $C_1, C_2, \ldots, C_5$ כל אחת עם 7 פאות הממוספרות $1, \ldots, 7$

יהי f_i המשתנה המקרי שערכו הוא תוצאת הטלת הקובייה C_i עבור i כלשהו.

נגדיר מ"מ נוסף

$$f = f_1 + \cdots + f_5$$

1. חשב את התוחלת ואת השונות של f
2. תנו חסם תחתון גדול ככל האפשר להסתברות ש $15 < f < 25$

תשובה

1. לכל i מתקיים $E[f_i] = \frac{1+2+3+4+5+6}{7} = 4$ ולכן

$$E[f] = E\left[\sum_{i=1}^{5} f_i\right] = \sum_{i=1}^{5} E[f_i] = 20$$

המשתנים המקריים f_i בלתי תלויים ולכן

$$Var[f] = Var\left[\sum_{i=1}^{5} f_i\right] = \sum_{i=1}^{5} Var[f_i]$$

לכל i מתקיים ש

$$E\left[{f_i}^2\right] = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2}{7} = \frac{140}{7} = 20$$

ומכאן ש

$$Var[f_i] = E\left[{f_i}^2\right] - E[f_i]^2 = 20 - 4^2 = 4$$

ולכן

$$Var[f] = \sum_{i=1}^{5} Var[f_i] = 20$$

שאלה

מטילים 5 קוביות $C_1,C_2,\ldots,C_5$ כל אחת עם 7 פאות הממוספרות $1,\ldots,7$

יהי f_i המשתנה המקרי שערכו הוא תוצאת הטלת הקובייה C_i עבור i כלשהו. נגדיר מ"מ נוסף

$$f = f_1 + \cdots + f_5$$

1. חשב את התוחלת ואת השונות של f
2. תנו חסם תחתון גדול בכל האפשר להסתברות ש $15 < f < 25$

תשובה (המשך)

2. נשתמש באי-שיוויון צ'בישב עם $C=5$

$$Pr[|f - E[f]| \geq 5] \leq \frac{Var[f]}{5^2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

ולכן

$$Pr]|f - 20| \geq 5] \leq \frac{4}{5}$$

ומכאן

$$Pr[15 < f < 25] \geq 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

שאלה

$G=(V,E)$ גרף מקרי, כלומר
גרף בו כל צלע נבחרת
בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן בלתי תלוי
ביתר הצלעות, ויהיו $u,v\in V$. מה
ההסתברות ש - $d(u,v)\geq 3$?

תשובה

$d(u,v)\geq 3 \Leftrightarrow$ ($\{u,v\}\notin E$ וגם לכל $x\in V\setminus\{u,v\}$ לא מתקיים $\{x,u\},\{x,v\}$ $\in E$).

$P(\{u,v\}\notin E)=\frac{1}{2}$, ועבור כל $x\in V\setminus\{u,v\}$, $P(\{x,u\},\{x,v\}\in E)=\frac{1}{4}$. אם כן,

מכך שהצלעות נבחרות לגרף באופן בלתי תלוי, $P(d(u,v)\geq 3)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{|V|-2}$.

שאלה

ג'וני משחק ברולטה ומחליט לתחמן את המערכת ולנצח על בטוח. ג'וני תמיד מהמר על כך שברולטה יצא מספר שצבעו שחור (זה קורה בהסתברות 18/38). הוא ישחק עד אשר ינצח לפחות משחק אחד. או עד שיפסיד 11 סיבובים ברצף. במשחק הראשון הוא מהמר על שקל. במשחק השני על 2 שקלים ובמשחק ה i על 2^{i-1} שקלים. בכל משחק אם הוא ניצח הוא מקבל את הסכום שעליו הימר, ואם הפסיד מפסיד את כספו.

1. כמה ג'וני ירוויח אם ינצח בסיבוב ה i?
2. מה תוחלת מספר הסיבובים שג'וני ישחק?
3. (בונוס) מה ההסתברות שג'וני יצא מרווח (לפחות בשקל)?
4. (בונוס) מה תוחלת הרווח של ג'וני?

תשובה

נסמן $p = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$ ו $q = 1 - p = \frac{10}{19}$

1. אם ג'וני ניצח בסיבוב ה i וזה אומר שבכל אחד מ $i-1$ הסיבובים הראשונים הוא השתתף והפסיד. אז סה"כ הרווח שלו :

$$2^{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1} = 2^{i-1} - \sum_{j=0}^{i-2} 2^{j} = 1$$

2. נגדיר משתנה מקרי X שערכו הוא מספר הסיבובים שג'וני שיחק. ונגדיר X_i משתנה מקרי אינדיקטור שמקבל 1 אם ג'וני שיחק בסיבוב ה i ו 0 אחרת. נקבל כי

$$E(X_i) = (1-p)^{i-1}$$

כי בשביל להשתתף בסיבוב ה i ג'וני צריך להפסיד ב $i-1$ הסיבובים הראשונים. נשים לב כי i המקסימלי הוא 11 וכי $X = \sum_{i=1}^{11} X_i$. מלינאריות התוחלת נקבל כי

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{11} X_i\right) = \sum_{i=1}^{11} E(X_i) = \sum_{i=1}^{11} 1 \cdot P(X_i) = \sum_{i=1}^{11} (1-p)^{i-1} = \sum_{i=1}^{11} q^{i-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{10} q^{i} = \frac{1-q^{11}}{1-q} \approx 2.109$$

שאלה

ג'וני משחק ברולטה ומחליט לתחמן את המערכת ולנצח על בטוח. ג'וני תמיד מהמר על כך שברולטה יצא מספר שצבעו שחור (זה קורה בהסתברות 18/38). הוא ישחק עד אשר ינצח לפחות משחק אחד. או עד שיפסיד 11 סיבובים ברצף. במשחק הראשון הוא מהמר על שקל. במשחק השני על 2 שקלים ובמשחק הi על 2^{i-1} שקלים. בכל משחק אם הוא ניצח הוא מקבל את הסכום שעליו הימר, ואם הפסיד מפסיד את כספו.

1. כמה ג'וני ירוויח אם ינצח בסיבוב הi?
2. מה תוחלת מספר הסיבובים שג'וני ישחק?
3. (בונוס) מה ההסתברות שג'וני יצא מרווח (לפחות בשקל)?
4. (בונוס) מה תוחלת הרווח של ג'וני?

תשובה (המשך)

3. מסעיף א' אם ג'וני מנצח בסיבוב ה i הוא יוצא מורווח בשקל, וזה נכון לכל i. כלומר ג'וני יצא מרווח אלא אם הפסיד בכל הסיבובים. ההסתברות שיפסיד בכל הסיבובים היא q^{11}
ולכן ההסתברות שיצא מרווח לפחות בשקל היא ההסתברות המשלימה

$$1-\mathrm{q}^{11}=1-\left(\frac{10}{19}\right)^{11}\approx 0.999$$

שאלה

ג'וני משחק ברולטה ומחליט לתחמן את המערכת ולנצח על בטוח. ג'וני תמיד מהמר על כך שברולטה יצא מספר שצבעו שחור (זה קורה בהסתברות 18/38). הוא ישחק עד אשר ינצח לפחות משחק אחד. או עד שיפסיד 11 סיבובים ברצף. במשחק הראשון הוא מהמר על שקל. במשחק השני על 2 שקלים ובמשחק ה i על 2^{i-1} שקלים. בכל משחק אם הוא ניצח הוא מקבל את הסכום שעליו הימר, ואם הפסיד מפסיד את כספו.

1. כמה ג'וני ירוויח אם ינצח בסיבוב ה i?
2. מה תוחלת מספר הסיבובים שג'וני ישחק?
3. (בונוס) מה ההסתברות שג'וני יצא מרווח (לפחות בשקל)?
4. (בונוס) מה תוחלת הרווח של ג'וני?

תשובה (תשובה)

1. נגדיר משתנה מקרי Y שיסכום כמה ג'וני הרוויח בכל סדרת המשחקים ו Y_i משתנה מקרי שיגיד כמה ג'וני הרוויח בסיבוב ה i . אם ג'וני לא השתתף בסיבוב ה i אז נגדיר כי $Y_i = 0$. ההסתברות שג'וני הגיע לסיבוב ה i וניצח בו היא $q^{i-1}p$ וההסתברות שהגיע לסיבוב זה והפסיד היא q^i. בכל מקרה אם הגיע לסיבוב הוא מהמר על 2^{i-1} ולכן

$$E(Y_i) = q^{i-1} \cdot p \cdot 2^{i-1} - q^i \cdot 2^{i-1} = 2^{i-1} q^{i-1}(p-q) = (2q)^{i-1}(p-q)$$

כמו כן $Y = \sum_{i=1}^{11} Y_i$ ומלינאריות התוחלת נקבל

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{11} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{11} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{11} (2q)^{i-1}(p-q) = (p-q)\sum_{i=1}^{11}(2q)^{i-1}$$

$$= \backslash(p-q)\sum_{i=0}^{10}(2q)^i = (p-q)\cdot\frac{(2q)^{11}-1}{2q-1} = (1-2q)\cdot\frac{(2q)^{11}-1}{2q-1}$$

$$= 1-(2q)^{11} = 1-\left(\frac{20}{19}\right)^{11} \approx 1-1.758 = -0.758$$

שאלה

יהא f משתנה מקרי בעל תוחלת 0 המקיים $\Pr(-3 < f < 2) = \frac{1}{2}$.

1. הוכח כי השונות של f היא לפחות 2.
2. הוכח כי $E[|f|] \ge 1$.
3. נתון כי כל ערכי f שלמים וש- -2 הוא ערכה המינימלי. כמו כן, ההסתברות לקבל כל אחד מהערכים שווה. חשב את השונות של f.

תשובה

1. $$Var(f) \ge 4\Pr(|f - E[f]| \ge 2) \overset{E[f]=0}{=} 4\Pr(|f| \ge 2) = 4\Pr(f \le -2 \ \ or \ \ f \ge 2) \ge$$
$$4\Pr(f \le -3 \ \ or \ \ f \ge 2) = 4\left(1 - \Pr(-3 < f < 2)\right) = 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2$$
2. בסעיף א' הראינו $4\Pr(|f| \ge 2) \ge 2$. לפי אי-שוויון מרקוב $\frac{E[|f|]}{2} \ge \Pr(|f| \ge 2)$ ולכן, $2E[|f|] \ge 4\Pr(|f| \ge 2) \ge 2$, כלומר $E[|f|] \ge 1$.
3. מהנתון כי $\Pr(-3 < f < 2) = \frac{1}{2}$ הרי ש-f מקבלת ערכים שלמים נוספים בגודל לפחות 2. מכיוון שההסתברות לכל ערך שווה, הרי שהיא מקבלת מספר זהה של ערכים בגודל לפחות 2 וערכים בתחום $[-2,1]$. כמו כן, נתון כי התוחלת 0 כלומר סכום הערכים צריך להיות 0 (היות וההסתברויות שוות).

נבחין כי הדרך היחידה בה תנאים אלה מתקיימים היא כאשר f מקבלת את הערכים -2 ו-2 , כל אחד בהסתברות 1/2 ואז
$V(f) = E(f^2) - E(f)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 0 = 4$.

שאלה

יהי G גרף עם m צלעות. הוכיחו כי לכל $k \geq 1$ קיים תת-גרף H של G על אותה קבוצת קדקודים, שהוא k-צביע ומכיל לפחות $m\left(1-\frac{1}{k}\right)$ צלעות.
רמז: השתמשו בצביעה מקרית של הגרף

תשובה

יהי $k \geq 1$
תהי Ω קבוצת כל הצביעות האפשריות של קדקודי G ב k צבעים.
אזי $|\Omega| = k^n$, כאשר n הוא מספר הקדקודים ב G.
הגרף המושרה על ידי צביעה $\chi \in \Omega$ הוא הגרף שמתקבל מ G על ידי השמטת הצלעות המונוכרומטיות (כלומר צלעות ששני הקודקודים בהם הן חלות צבועים באותו הצבע), נסמנו G_χ
יהי f משתנה מקרי המתאים לצביעה χאת מספר הצלעות ב G_χ.
נראה ש $E[f] = m\left(1-\frac{1}{k}\right)$ ומכאן שלפי עקרון שובך היונים קיימת צביעה כך שמספר הצלעות בגרף המושרה הוא לפחות $m\left(1-\frac{1}{k}\right)$.
תהי $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ קבוצת הצלעות של G. נגדיר m משתנים מקריים אינדיקטורים $f_1, \ldots, f_m$ כאשר $f\_i(\chi)) = 1$ אם הצלע e_i שייכת לגרף G_χ,
כלומר אם שני הקדקודים שחלים בה נצבעים בצבעים שונים.

שאלה

יהי G גרף עם m צלעות. הוכיחו כי לכל $1 \leq k$ קיים תת-גרף H של G על אותה קבוצת קדקודים, שהוא k-צביע ומכיל לפחות $m\left(1-\frac{1}{k}\right)$ צלעות.

רמז: השתמשו בצביעה מקרית של הגרף

תשובה (המשך)

נחשב

$$E[f_i] = Pr[f_i = 1] = \frac{k(k-1)k^{n-2}}{k^n} = 1 - \frac{1}{k}$$

ומליניאריות התוחלת נקבל

$$E[f] = E\left[\sum_{i=1}^{m} f_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[f_i] = m\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

שאלה

עבור גרף $G=(V,E)$ וחלוקה של הקודקודים ל 2 קבוצות זרות $V=A\cup B$, צלע חוצה הינה צלע $(u,v)\in E$ כך ש $u\in A, v\in B$
הוכח על ידי שימוש בשיטה ההסתברותית את הטענה הבאה:
לכל גרף $G=(V,E)$ עם n קדקודים ו m צלעות קיימת דרך לחלק את הקדקודים לשתי קבוצות כך שמספר הצלעות החוצות הינו לפחות $\frac{m}{2}$
כלומר קיימות $A,B\subseteq V$ כך ש
$$|\{(u,v)\in E : u\in A, v\in B\}| \geq \frac{m}{2}$$

תשובה

נגריל תת-קבוצה של קדקודים בהתפלגות אחידה, כלומר כל קודקוד יהיה בקבוצה בהסתברות $\frac{1}{2}$. נסמן קבוצה זו ב A ואת הקבוצה המשלימה ב B.
עבור צלע (u,v) ההסתברות ש u ו v נמצאים בקבוצות שונות היא בדיוק $\frac{1}{2}$.
מלינאריות התוחלת נקבל כי תוחלת מספר הצלעות בחתך הוא $\frac{m}{2}$ מכאן שקיימת חלוקה שמשיגה ערך זה