תגבור

שבוע 12

מני סדיגורסקי

שאלה

בוחרים באקראי מספר שלם מתוך הקבוצה $\{1,\dots,1000\}$. מה ההסתברות שהמספר שנבחר מתחלק בלפחות אחד מהמספרים $2,3,5$?

תשובה

נסמן:

A_2 – קבוצת המספרים בקבוצה $\{1,\dots,1000\}$ המתחלקים ב 2.

A_3 – קבוצת המספרים בקבוצה $\{1,\dots,1000\}$ המתחלקים ב 3.

A_5 – קבוצת המספרים בקבוצה $\{1,\dots,1000\}$ המתחלקים ב 5.

$$|A_2| = \left\lfloor\frac{1000}{2}\right\rfloor = 500 \quad |A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor = 333 \quad |A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor = 200$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor = 166 \quad |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{10}\right\rfloor = 100$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{15}\right\rfloor = 66$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{30}\right\rfloor = 33$$

נסמן בA את המאורע בו נבחר מספר המתחלק ב**לפחות** אחד מבין $2,3,5$ ונקבל:(הכלה והדחה) :

$$|A| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| =$$
$$= 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$$

(זהו מספר המספרים בקבוצה $\{1,\dots,1000\}$ המתחלקים בלפחות 1 מבין $2,3,5$)

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{734}{1000}$$

שאלה

אדם מחזיק בצרור המכיל מפתחות לכל 30 דירות הבניין בו הוא גר. הוא בוחר מפתח באקראי ומנסה לפתוח את דלת דירתו שמספרה 25.

1. מה ההסתברות שהצליח בניסיון הראשון?
2. מה ההסתברות שהצליח בניסיון ה-10 אם השליך כל מפתח שנבחר ולא פתח את הדלת?
3. מה ההסתברות שהצליח בניסיון ה-10 אם החזיר לצרור כל מפתח שנבחר ולא פתח את הדלת?

תשובה

1. ההסתברות לבחור במפתח הנכון מבין ה-30 בבחירה אקראית היא $\frac{1}{30}$.
2. מרחב המדגם Ω יהיה קבוצת כל סדרות הנסיונות, כלומר, סדרות באורך 10 של איברים שונים מתוך 1 עד 30. אם כך, $|\Omega| = \binom{30}{10}10!$.

נסמן A- המאורע של הצלחה בנסיון ה-10, כלומר המאורע שבסדרת הנסיונות מופיע 25 במקום ה-10 ומספרים שונים בבל שאר המקומות. אזי, $|A| = \binom{29}{9}9!$ ולכן

$$Pr(A) = \frac{\binom{29}{9}9!}{\binom{30}{10}10!} = \frac{1}{30}$$

למעשה ההסברות שהמפתח של דירה 25 יבחר להיות עשירי בסדרה של 10 מפתחות זהה להסתברות שבל מפתח אחר יהיה העשירי בסדרה ולכן ההסתברות זהה עבור כל המפתחות, כלומר $\frac{1}{30}$.

שאלה

אדם מחזיק בצרור המכיל מפתחות לכל 30 דירות הבניין בו הוא גר. הוא בוחר מפתח באקראי ומנסה לפתוח את דלת דירתו שמספרה 25.

1. מה ההסתברות שהצליח בניסיון הראשון?
2. מה ההסתברות שהצליח בניסיון ה-10 אם השליך כל מפתח שנבחר ולא פתח את הדלת?
3. מה ההסתברות שהצליח בניסיון ה-10 אם החזיר לצרור כל מפתח שנבחר ולא פתח את הדלת?

תשובה (המשך)

3. Ω יהיה קבוצת כל סדרות הנסיונות, כלומר, סדרות באורך 10 של איברים מתוך 1 עד 30 (נרשה חזרות).
אם כך, $|\Omega| = 30^{10}$. נסמן A- המאורע של הצלחה בנסיון ה-10, כלומר המאורע שבסדרת הנסיונות מופיע 25 במקום ה-10 בלבד. אזי, $|A| = 29^9$
ולכן $Pr(A) = \frac{29^9}{30^{10}} \approx 0.025$.

שאלה

עבור מאורעות A,B נתון: $P(A) = 0.5, P(A \cup B) = 0.7$. יש לחשב את $P(B)$ כאשר:

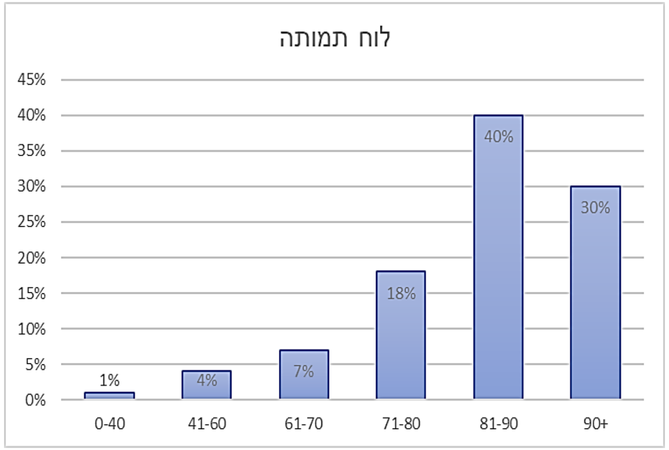
1. A,B בת"ל.
2. A,B זרים.

תשובה

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$
   כלומר
   $0.7 = 0.5 + P(B) - 0.5 \cdot P(B) \Leftarrow P(B) = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$.
2. כאן $P(A \cap B) = 0$, לכן $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.2$.

שאלה

נתון כי בישראל אורך החיים מתפלג באופן הבא:



[תוחלת אורך החיים היא 84.75]

יורם בן למעלה מ 80, מה הסיכוי שיחיה מעבר לגיל 90?

תשובה

נשים לב כי מאחר והמאורעות $Y > 90$ ו $80 < Y \leq 90$ זרים נקבל $Pr(Y > 80) = Pr(80 < Y \leq 90) + Pr(Y > 90)$ ומנוסחת בייס נקבל

$$Pr(Y > 90 | Y > 80) = \frac{Pr(Y > 90 \wedge Y > 80)}{Pr(Y > 80)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.4} = \frac{3}{7} \approx 43\%$$

הערה: שימו לב שסיכוי זה גבוה משמעותית מהסיכוי הכללי לחיות מעבר לגיל 90 (שמופיע בנתוני השאלה).

שאלה

אדם מחזיק ברשותו 5 מטבעות: שניים רגילים, שניים בהם בשני הצדדים מופיע "עץ" ואחד בו בשני הצדדים מופיע "פלי". האדם עוצם עיניו, לוקח מטבע אחד מבין החמש ומטיל אותו.

1. מה ההסתברות שיצא עץ?
2. האדם פוקח עיניו ורואה שיצא "עץ".

   מה ההסתברות שגם בצדו התחתון של המטבע שהוטל מופיע "עץ"?

תשובה

נסמן:

H_1 – המאורע שבהטלה הראשונה יצא "עץ".

H_2 – המאורע שבהטלה השנייה יצא "עץ".

C – המאורע שהמטבע הנבחר להטלות הוא מטבע רגיל.

C_H – המאורע שהמטבע הנבחר להטלות הוא מטבע ששני צדדיו הם "עץ".

1. בהסתברות $\frac{2}{5}$ נבחר מטבע רגיל, בהסתברות $\frac{2}{5}$ נבחר מטבע ששני צדדיו "עץ" ובהסתברות $\frac{1}{5}$ נבחר מטבע ששני צדדיו "פלי". לכן, $Pr(H_1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}$.
2. למעשה יש לחשב את ההסתברות לכך שנבחר מטבע ששני צדדיו "עץ" בהנתן שבהטלה יצא "עץ", כלומר $Pr(C_H|H_1)$. נחשב:

$$Pr(C_H|H_1)=\frac{P(C_H)P(H_1|C_H)}{P(H_1)}=\frac{2/5}{3/5}=\frac{2}{3}$$

שאלה

אדם מחזיק ברשותו 5 מטבעות: שניים רגילים, שניים בהם בשני הצדדים מופיע "עץ" ואחד בו בשני הצדדים מופיע "פלי".
האדם עוצם עיניו, לוקח מטבע אחד מבין החמש ומטיל אותו.

3. האדם פוקח עיניו ורואה שיצא "עץ".
האדם עוצם שוב את עיניו ומטיל את אותו המטבע בפעם השנייה.
מה ההסתברות שיצא "עץ"?

4. האדם פוקח עיניו שוב ורואה שיצא "עץ".
מה ההסתברות בעת שבצדו התחתון של המטבע שהוטל מופיע "עץ"?

תשובה

3. נחשב את ההסתברות שיצא "עץ" בהינתן שבהטלה הראשונה יצא "עץ" באותו המטבע. כלומר, $Pr(H_2|H_1)$. נבחין כי בהינתן שבהטלה הראשונה יצא "עץ" בהכרח המאורעות C או C_H מתקיימים ולכן

$$Pr(C|H_1) = 1 - Pr(C_H|H_1) = \frac{1}{3}$$

נחשב:

$$Pr(H_2|H_1) = Pr(C|H_1)P(H_2|C) + Pr(C_H|H_1)P(H_2|C_H) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

4. עלינו לחשב את ההסתברות לכך שנבחר מטבע ששני צדדיו "עץ" בהינתן שבשתי הטלות יצא "עץ":

$$Pr(C_H|H_1 \cap H_2) = \frac{Pr(C_H \cap H_1 \cap H_2)}{Pr(H_1 \cap H_2)} = \frac{Pr(C_H)}{Pr(H_1)Pr(H_2|H_1)} = \frac{2/5}{3/5 \cdot 5/6} = \frac{4}{5}$$

שאלה

בתחנת דלק 40% מהלקוחות מתדלקים בבנזין 95, 35% בסולר ו 25% בבנזין 98.
נתון שמבין אלה שמתדלקים בבנזין 95 30% מתלאים את המיכל לגמרי והיתר באופן חלקי. מאלה שמתדלקים בסולר 60% ממלאים את המיכל לגמרי ומאלה שמתדלקים בבנזין 98 50% ממלאים את המיכל.

1. מה ההסתברות שלקוח אקראי מתדלק בסולר בהיתנן שהוא ממלא את המיכל לגמרי?
2. מה ההסתברות שלקוח אקראי מתדלק בבנזין 98 בהינתבן שהלקוח לא מילא את המיכל לגמרי?

תשובה

1. נסמן ב B את המאורע שבו הלקוח מתדלק בסולר וב A את המאורע שבו הוא ממלא את המיכל לגמרי.
מנוסחת בייס ומנוסחת ההסתברות השלמה מתקיים

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A|B)Pr(B)}{Pr(A)} = \frac{\frac{35}{100}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{35}{100}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{6}{13}$$
$$\approx 0.45$$

2. נסמן ב C את המאורע שבו הלקוח מתדלק בבנזין 98 וב D את המאורע שבו לא הלקוח לא ממלא לגמרי את המיכבל (נבחין כי $D=\bar{A}$) ומנוסחת בייס נקבל

$$Pr(C|D) = \frac{Pr(D|C)Pr(C)}{Pr(D)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{35}{100}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{25}{109} \approx 0.23$$

שאלה

במבחן האמריקאי בקומבינטוריקה יש 20 שאלות. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות ומשקל כל שאלה הוא 5 נקודות. הסטודנטים שקד, נוי ויובל ניגשים לבוחן אך מאחר ולא למדו היטב הם מנחשים את התשובה לכל שאלה באופן אקראי ובלתי תלוי.
כדי לעבור את הבחינה יש לקבל לפחות 60.

1. מה ההסתברות שלפחות אחד מבין שלושת הסטודנטים הנ"ל עובר את הבחינה?
2. מה ההסתברות שהציון של שקד גבוה יותר מזה של נוי?

תשובה

1. נמצא על ידי המאורע המשלים, כלומר נחשב את ההסתברות ששלושתם לא עוברים את המבחן ונחסר את התוצאה מ 1.
נמספר את שלושת הסטודנטים לשם נוחות
נסמן ב X_1 את המאורע שסטודנט ה l לא עובר את המבחן. נשים לב כי שלושת המאורעות זרים בזוגות.
עבור סטודנט l– כדי להיכשל צריך לצדוק לכל היותר ב 11 שאלות. כלומר לצדוק במספר כלשהו של שאלות, נסמן אותו ב j, בין 0 ל 11. כל בחירה של מספר השאלות בהם צדק צריך לבחור באילו שאלות צדק – יש $\binom{20}{j}$ אפשרויות לבחירה זו. הסיכוי לצדוק בשאלות האלה, מאחר ובכל שאלה יש סיכוי של 0.25 סיכוי לצודק, היא $\left(\frac{1}{4}\right)^{j}$.

שאלה

במבחן האמריקאי בקומבינטוריקה יש 20 שאלות. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות ומשקל כל שאלה הוא 5 נקודות. הסטודנטים שקד, נוי ויובל ניגשים לבוחן אך מאחר ולא למדו היטב הם מנחשים את התשובה לכל שאלה באופן אקראי ובלתי תלוי.
כדי לעבור את הבחינה יש לקבל לפחות 60.

1. מה ההסתברות שלפחות אחד מבין שלושת הסטודנטים הנ"ל עובר את הבחינה?
2. מה ההסתברות שהציון של שקד גבוה יותר מזה של נוי?

תשובה (המשך)

1. נשים לב שכדי לצדוק רק בשאלות אלו צריך גם לטעות בכל השאר. כלומר בכל שאר 20-j השאלות, כאשר לכל שאלה הסיכוי לטעות הוא 0.75 ולכן ההסתברות לטעות בכולם היא $\left(\frac{3}{4}\right)^{20-j}$.

בסך הכל ההסתברות לצדוק בדיוק ב j שאלות בלשהן הוא $\binom{20}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-j}$

מכאן שההסתברות עבור j כלשהו מ 0 עד 11 היא $Pr(X_i)=\sum_{j=0}^{11}\binom{20}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-j}$ ולכן הפתרון הוא

$$1-Pr(X_1\cap X_2\cap X_3)=1-Pr(X_1)Pr(X_2)Pr(X_3)=1-Pr(X_1)^3$$

$$=1-\left(\sum_{j=0}^{11}\binom{20}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-j}\right)^3$$

שאלה

במבחן האמריקאי
בקומבינטוריקה יש 20 שאלות.
לכל שאלה 4 תשובות אפשריות
ומשקל כל שאלה הוא 5 נקודות.
הסטודנטים שקד, נוי ויובל
ניגשים לבוחן אך מאחר ולא למדו
היטב הם מנחשים את התשובה
לכל שאלה באופן אקראי ובלתי
תלוי.
כדי לעבור את הבחינה יש לקבל
לפחות 60.

1. מה ההסתברות שלפחות אחד מבין שלושת הסטודנטים הנ"ל עובר את הבחינה?
2. מה ההסתברות שהציון של שקד גבוה יותר מזה של נוי?

תשובה (המשך)

2. נסמן ב X את המאורח שנוי ושקד קיבלו את אותו הציון. בלומר ישנו מספר כלשהו j בין 0 ל 20, כך ששתיהן צדקו בדיוק ב j שאלות וטעו בבל השאר. בדומה לסעיף א, באשר כאן יש לבחור j שאלות עבור נוי ו j שאלות עבור שקד, נקבל בי ההסתברות לכך היא

$$Pr(X) = \sum_{j=0}^{20} \binom{20}{j}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2j} \left(\frac{3}{4}\right)^{40-j}$$

ההסתברות שהן לא קיבלו את אותו הציון הוא $1 - Pr(X)$

נסמן ב A את המאורע שנוי קיבלה יותר משקד וב B את המאורע ששקד קיבלה יותר מנוי.

מתקיים בי $A \cup B = \bar{X}$ ומאחר והמאורעות זרים נקבל

$$1 - Pr(X) = Pr(A) + Pr(B)$$

מאחר ואין הבדל בין נוי לשקד הרי ש $Pr(A) = Pr(B)$ ומכאן ש

$$Pr(B) = \frac{1 - Pr(X)}{2} = \frac{1 - \sum_{j=0}^{20} \binom{20}{j}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2j} \left(\frac{3}{4}\right)^{40-j}}{2}$$

הערה: ניתן לפתור סעיף זה גם באופן ישיר על ידי שני אינדקסים וסיגמה כפולה.