תגבור

שבוע 11

מני סדיגורסקי

שאלה

יהי G גרף עם 50 קודקודים ועם התכונה הבאה: בכל רביעייה של קודקודים ישנם שניים שהם בלתי תלויים (כלומר, אין ביניהם צלע).
הוכח שיש ב- G קבוצה בלתי תלויה של קודקודים מגודל 5.

תשובה

לפי משפט ארדש-סקרש מתקיים: $R(4,5) \leq \binom{4+5-2}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$.
נתבונן בגרף K_{50}. מאחר ו- $R(4,5) \leq 35$, בכל צביעת צלעות של K_{50} ב-2 צבעים, אדום וכחול, נקבל שבהכרח יש בגרף K_4 כחול או K_5 אדום.
נצבע את הצלעות שקיימות ב-G בכחול ואת הצלעות שלא קיימות בו (כלומר, צלעות $\bar{G}$) באדום.
מאחר וב-G אין K_4 (בכל 4 קוד' יש 2 קוד' שהם בת"ל) נקבל כי לא קיים ב- K_{50} שצבענו K_4 כחול (הצלעות הכחולות הן של G ואין בו K_4), לכן יש בו בהכרח K_5 אדום, כלומר יש בגרף $\bar{G}$ קליקה בגודל 5 (הצלעות האדומות הן של $\bar{G}$), ובגרף G קוד' הקליקה מהווים קב' בת"ל בגודל 5, כנדרש.

שאלה

1. מתקיים טורניר בדורגל של 46 קבוצות, כך שכל קבוצה צריכה לשחק נגד כל יתר הקבוצות. בכל סיבוב הקבוצות מתחלקות לזוגות ובין כל זוג מתקיים משחק, כלומר 23 משחקים בסיבוב. הוכיחו כי לאחר ששוחקו 8 סיבובים (לא מתקיים אותו משחק בשני סיבובים שונים), נוכל למצוא 3 קבוצות שבין כל 2 מהן לא התקיים עדיין משחק. (רמז: השתמשו במספרי רמזי).
2. אותה השאלה, אך בטורניר של 18 קבוצות.

תשובה

1. נתבונן בגרף K_{46} כך שקודקודיו כל 46 הקבוצות, ויש צלע כחולה בין שני קודקודים המייצגים קבוצות ששחקו אחת נגד השניה וכל יתר הצלעות אדומות. נשים לב שבגרף אין קליקה כחולה בגודל 9: אם היתה קליקה בגודל 9, אז כל קודקוד בקליקה הוא מדרגה 8 (לפחות), ומשום שהתקיימו בדיוק שמונה סיבובים, אז הדרגה היא בדיוק 8. כלומר כל קודקוד בקליקה שיחק עם כל אחד מהקודקודים האחרים בקליקה, ורק איתם. כלומר בכל סיבוב שיחקו קודקודים מהקליקה רק עם קודקודים אחרים מהקליקה, אך זה לא אפשרי כי בקליקה מספר אי זוגי של קודקודים. לכן אין קליקה כחולה בגודל 9.

ממשפט ארדש-סקרש: $R(9,3) \leq \binom{9+3-2}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$. משום בגרף אין קליקה כחולה בגודל 9, ישנה קליקה אדומה בגודל 3, כלומר 3 קבוצות שלא שחקו זו שאף שתיים מהן לא שחקו זו נגד זו.

שאלה

1. מתקיים טורניר בדורגל של 46 קבוצות, כך שכל קבוצה צריכה לשחק נגד כל יתר הקבוצות. בכל סיבוב הקבוצות מתחלקות לזוגות ובין כל זוג מתקיים משחק, כלומר 23 משחקים בסיבוב. הוכיחו כי לאחר ששוחקו 8 סיבובים (לא מתקיים אותו משחק בשני סיבובים שונים), נוכל למצוא 3 קבוצות שבין כל 2 מהן לא התקיים עדיין משחק. (רמז: השתמשו במספרי רמזי).

א- אותה השאלה, אך בטורניר של 18 קבוצות.

תשובה

2. נתבונן בגרף K_{18} כך שקודקודיו 18 הקבוצות, ויש צלע כחולה בין שני קודקודים המייצגים קבוצות ששחקו אחת נגד השניה וכל יתר הצלעות אדומות. נבחר קודקוד כלשהו A, ונתבונן ב9 הקבוצות שA לא שחקה מולן. אם שתיים מהן לא שחקו עוד אחת נגד השנייה, אז יחד עם A הן מהוות משולש אדום וסיימנו. אחרת, כל 9 הקבוצות שחקו אחת נגד השנייה, אך בפתרון הסעיף הקודם הוכחנו כי זה בלתי אפשרי בשמונה סיבובים.

שאלה

תהי G קבוצה של 17 חברי כנסת שיושבים לדון על שלושה נושאים

1. הפרדת דת ומדינה,
2. תקציב הביטחון,
3. משבר הדיור.

ידוע כי בין כל <u>זוג</u> חברי-כנסת בקבוצה יש הסכמה על **בדיוק** נושא אחד מבין שלושת הנושאים.

הוכיחו כי קיימת קבוצה של <u>שלושה</u> חברי-כנסת מתוך G שמסכימה על נושא אחד.

תשובה

למעשה יש להראות כי בכל צביעה של K_{17} בשלושה צבעים, קיים K_3 שצבוע בצבע אחד (מונוכרומטי).

נתבונן בK_{17} הצבוע בשלושה צבעים. נבחר קודקוד כלשהו $v \in V$. מההגדרה מתקיים $deg(v) = 16$. מעיקרון שובך היונים קיים צבע, נניח בה"כ שזהו הצבע הירוק, שלפחות 6 קשתות שחלות ב v צבועות בו.

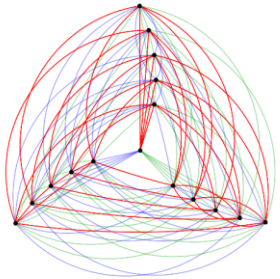
נתבונן אם כך בשכניו של v שחלים בצלעות הירוקות ונחלק לשני מקרים:

אם קיימת צלע ירוקה בין שניים מהם, הרי שקיבלנו K_3 ירוק כנדרש.

אחרת, כלומר כל הצלעות בין השכנים הללו של v צבועות או באדום או בכחול, מאחר ויש לפחות 6 שכנים כאלו קיבלנו צביעה של K_6 בשני צבעים.

לפי מה שראינו בכיתה מתקיים $R(3,3) = 6$ ולכן קיים בתת גרף זה (השכנים שמחוברים ל v בקשת ירוקה והקשתות ביניהם K_3) מונוכרומטי, אדום או כחול, כנדרש.

הערה: עבור קבוצה בגודל 16 ניתן להראות צביעה בשלושה צבעים שלא תכיל K_3 מונוכרומטי. מוזמנים לבדוק



שאלה

יהי X אוסף של n נקודות במרחב
R^d כך שלכל $x,y \in X$ מתקיים
$\|x\| > 1$
הוכח כי מספר הזוגות $\{x,y\}$ ב X
שמקיימות $\|x + y\| < 1$ הינו
לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

רמז: לכל שלושה וקטורים
x_1,x_2,x_3 מתקיים
$$\|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|z + y\|^2 \ge \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2$$

תשובה

נבנה גרף G באופן הבא -
$V = X$ ו $\{x,y\} \in E$ אם $\|x + y\| < 1$
אם נראה כי הגרף חסר-משולשים (מעגלים פשוטים מאורך 3) הרי שלפי משפט Mantel נקבל את החסם הדרוש.
נניח בשלילה כי קיים משולש בגרף x,y,z.
מכך ומהרמז נקבל
$$3 > \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|z + y\|^2 \ge \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 > 3$$
סתירה.

שאלה

באי מסוים חיים k שבטים, המחלקים את האי ביניהם לשטחים שווים. בנוסף, חיים על האי גם k סוגי צבים, שגם הם מחלקים את שטח האי לחלקים שווים.
כל שבט רוצה לבחור צב בתור סמל לאומי אבל רק מתוך הצבים שחיים בשטחו. הוכיחו שניתן לבחור סמל לאומי לכל שבט, כך שכל צב ישמש בסמל לאומי עבור שבט אחד בדיוק.

תשובה

נגדיר גרף דו"צ:
A – תהיה קבוצת השבטים, B תהיה קבוצת הצבים. נגדיר $V = A \cup B$
נמתח קשת בין שבט לצב אם הצב חי בתחום השבט.
השאלה שקולה למציאת זיווג מושלם בגרף שהתקבל.
נשים לב כי $|A| = |B| = k$. נותר להראות את תנאי משפט Hall: לכל $A \subseteq S$ מתקיים $|S| \leq |\Gamma(S)|$.
תהי $S \subseteq A$ קבוצת שבטים.
מהנתון לכל שבט ולכל סוג צב יש אותו גודל שטח. נבחין כי שטחי הצבים שנוגעים בשטחים של S, מכסים את כל שטח השבטים ב-S. לכן, שטח הצבים הנוגעים בשבטים ב-S, גדול-שווה משטח השבטים ב-S. לכן, מספר השכנים של S הוא גדול-שווה ממספר הקודקודים ב-S.

שאלה

יהי $G=(V,E)$ גרף דו חלקי
$V=X\cup Y$
כך שלכל קבוצה $A\subseteq X$ מתקיים
ש $|A|\le|\Gamma(A)|$.

הוכיחו כי קיים בגרף זיווג המרווה את X (כלומר כל קודקודי X משתתפים בזיווג).

תשובה

ראשית נשים לב כי משום ש $Y\subseteq\Gamma(X)$ ולכן לפי הנחות השאלה מתקיים $|X|\le|\Gamma(X)|\le|Y|$.
במקרה ש $|X|=|Y|$, ידוע כי ישנו זיווג מושלם בגרף, ממשפט Hall שניתן בכתה.
לכן נותר לנו לטפל רק במקרה בו $|X|<|Y|$.
במקרה זה, נוסיף לגרף $|Y|-|X|$ קודקודים (נסמן ב X' את הקודקודים החדשים איחוד עם X), ונוסיף צלעות מכל קודקוד חדש לכל הקודקודים שYב. כעת נווכח שמדובר בגרף דו חלקי כאשר בכל צד מספר שווה של קודקודים, ונוכיח שמתקיים תנאי משפט Hall שניתן בהרצאה:
לכל קבוצה $A\subseteq X'$ מתקיים ש$|A|\le|\Gamma(A)|$.
תהא $A\subseteq X'$. אם קיים קודקוד חדש בA, אז $\Gamma(A)=Y$ וידוע כי מתקיים $|Y|\ge|X|\ge|A|$.
אחרת, $A\subseteq X$ ולפי הנחת השאלה מתקיים $|A|\le|\Gamma(A)|$. לכן לפי משפט Hall שניתן בכתה אנו יודעים שיש זיווג מושלם בגרף. אם נקח בזיווג זה רק את הצלעות שחלות בקודקוד מX נקבל זיווג בגרף המרווה את X.

שאלה

כמה עצים מתויגים בני 14 קודקודים ישנם, בהם $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ הם עלים ו- $\{9,10,11,12,13,14\}$ הם קודקודים מדרגה 3?

תשובה

קוד פרופר של עץ כזה הוא סדרה מאורך 12 שבה כל אחד מהמספרים מהקבוצה $\{9,10,11,12,13,14\}$ מופיע פעמיים. לכן מספר העצים שווה למסדר הסדרות האלה, שהוא

$$\frac{12!}{(2!)^6}$$

שאלה

חשבו את מספר העצים המתויגים T על n קודקודים כך שהקוטר של T שווה 3, כלומר $diam(T) = 3$

תשובה

הקודקודים של T הם $V(T) = \{1,2,\ldots,n\}$. התנאי $diam(T) = 3$ גורר שיש בדיוק שני קודקודים שאינם עלים,

נימוק – יהיו w,z שני קודקודים בגרף שהמרחק ביניהם הוא בדיוק 3 (יש כאלה כי זה קוטר הגרף). המסלול הקצר ביותר ביניהם הוא w,v_1,v_2,z מכאן ש v_1,v_2 מדרגה 2.

אם היה עוד קדקוד שאיננו עלה, נגיד v_3, אזי מתוך v_1,v_2,v_3 בהכרח שניים אינם שכנים (אחרת נקבל מעגל) כלומר הם במרחק 2 לפחות זה מזה. מאחר ודרגתם 2 הרי שיש לכל אחד מהם עוד שכן (לפחות) שאיננו על המסלול ביניהם, שכנים אלה יהיו אם כך במרחק 4 (לפחות) זה מזה, בסתירה לנתון שקוטר העץ הוא 3.

יש $\binom{n}{2}$ אפשרויות לבחירת שני קודקודים אלו, נסמנם ב u,v.

קוד פרופר של T הוא סדרה מאורך $n-2$ המורכבת מ u ו-v בלבד ובנוסף u,v מופיעים בו לפחות פעם אחת. מתוך הספרות המורכבות מ u,v יש רק 2 שבהם זה לא המצב (אלא הן מכילות רק u או רק v).

קיבלנו כי מספר הסדרות האפשרויות בסך הכול הוא

$$\binom{n}{2}\left(2^{n-2}-2\right)$$