תגבור

שבוע 10

מני סדיגורסקי

שאלה

כמה מעגלי המילטון יש בגרף K_n?

תשובה

כל סדרת קדקודים $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ הינה מעגל המילטון בגרף המלא. כל מעגל נספר כך $2n$ פעמים: n פעמים ע"י בחירת נקודת ההתחלה והסיום (שאינה חשובה), וכן פעמיים לפי כיווני ההליכה האפשריים (שגם כן אינם חשובים). לכן בסה"כ: $\frac{(n-1)!}{2} = \frac{n!}{2n}$ מעגלים.

שאלה

יהי $G = (V,E)$ גרף עם $2k$ קדקודים שדרגות כולם אי זוגיות. צ"ל ש – G הוא איחוד של k מסלולים זרים, כלומר שקיימים בגרף G k מסלולים, כך שכל צלע e ∈ E מופיעה בדיוק באחד.

תשובה

נוסיף ל – G קדקוד חדש ונחבר אותו לכל יתר הקדקודים. הגרף המתקבל קשיר ולכל קדקוד בו דרגה זוגית (כי $|V(G)| = 2k$), ולכן מכיל מעגל אוילר. עם הסרת הקדקוד החדש, מתפרק המעגל ל – k המסלולים הזרים המבוקשים.

שאלה

יהא $G=(V,E)$ גרף עם n קדקודים.

1. הוכיחו כי אם ב-G ישנן $\binom{n-1}{2}+2$ צלעות, אז G מכיל מעגל המילטון.
2. מצאו גרף G עם $\binom{n-1}{2}+1$ צלעות שאינו מכיל מעגל המילטון.

תשובה

1. נראה ש-G מקיים את משפט *Ore*. נבחין כי הגרף מכיל לפחות 2 צלעות ולכן לפחות 3 קדקודים. נניח בשלילה כי יש ב-G זוג קדקודים $u,v \in V$ שאינם שכנים וסכום דרגותיהם קטן מ-n. נבחין כי המספר המקסימלי של צלעות שאינן חלות ב-u או ב-v הוא $\binom{n-2}{2}$. כמו כן, מההנחה, מספר הצלעות החלות ב-u או ב-v הוא לכל היותר $n-1$ ולכן סך הצלעות בגרף הוא לכל היותר:

$$\binom{n-2}{2}+n-1=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+n-1$$
$$=\frac{(n-2)(n-3)+2n-2}{2}=\frac{(n-2)(n-3)+2(n-2)+2}{2}$$
$$=\frac{(n-2)(n-1)+2}{2}=\binom{n-1}{2}+1$$

בסתירה לכך שבגרף $\binom{n-1}{2}+2$ צלעות. מכאן שתנאי משפט *Ore* מתקיים ולכן בגרף קיים מעגל המילטון.

שאלה

יהא $G = (V,E)$ גרף עם n קדקודים.

1. הוכיחו כי אם ב-G ישנן $\binom{n-1}{2} + 2$ צלעות, אז Gמכיל מעגל המילטון.
2. מצאו גרף Gעם $\binom{n-1}{2} + 1$ צלעות שאינו מכיל מעגל המילטון.

תשובה (המשך)

2. נתבונן בגרף המורכב מקליקה בגודל $n-1$ אליה מחובר קדקוד בצלע בודדת. היות ודרגת הקדקוד הבודד בגרף היא 1, בעוד במעגל המילטון דרגות כל הקדקודים 2, הרי שלא קיים מעגל המילטון בגרף. כמו כן, מספר הצלעות בגרף הוא $\binom{n-1}{2} + 1$, כנדרש

שאלה

יש להוכיח שלכל גרף מישורי פשוט $G = (V,E)$ עם $|V| \geq 3$, יש חלוקה של V ל - $V = V_1 \uplus V_2 \uplus V_3$ (איחוד זר בזוגות) כך שלכל $1 \leq i \leq 3$, תת-הגרף המושרה על-ידי V_i חסר מעגלים.

הדרכה: הוכיחו באינדוקציה על מספר הקודקודים.

תשובה

נוכיח באינדוקציה על $|V| = n$. בסיס, $|V| = 3$ – ברור.
נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n. ידוע שבגרף מישורי קיים קדקוד בדרגה קטנה מ – 6. יהי $V \in v$ בעל דרגה קטנה מ – 6, ונסיר אותו מהגרף (עם הצלעות החלות בו). בגרף הנותר אחרי הסרת v יש מהנחת האינדוקציה חלוקה של V לשלוש קבוצות נטולות מעגלים; בנוסף, מכך שדרגת v היא לכל היותר 5, הרי שבאחת הקבוצות בחלוקה יש ל – v שכן אחד לכל היותר. לכן הוספת v לקבוצה זו לא תסגור מעגל.

שאלה

יהי $G=(V,E)$ גרף r–רגולרי עם $2r+1$ קדקודים

1. הוכיחו כי יש בגרף מסלול המילטון.
2. האם יש בגרף בהכרח מעגל אוילר? הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמה נגדית.
3. חשבו את הקוטר של G. נמקו את החישוב.

תשובה

1. נגדיר גרף חדש $G'=(V',E')$ באופן הבא:
נוסיף קדקוד חדש $u \notin V$ ונגדיר
$$V' = \mathrm{V} \cup \{u\}, E' = \mathrm{E} \cup \{\{u,v\} \mid v \in V\}$$
ב G’ יש $2r+2$ קדקודים ודרגת כל קדקוד היא לפחות $r+1$,
לכן ממשפט Ore יש ב G’ מעגל המילטון. כאשר נסיר את u
והצלעות שחלות בו מהגרף, נקבל מסלול המילטון ב G.
2. Gקשיר, משום שיש בו מסלול המילטון.
בנוסף, ממשפט הדרגות נסיק שמתקיים
$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) = r(2r+1)$$
נשים לב שלפי הצד השמאלי נקבל כי מספר זה הינו זוגי.
מכיוון $2r+1$ אי–זוגי הרי שבהכרח r עצמו זוגי. בלומר דרגת כל קדקוד בגרף זוגית וממשפט אוילר נובע שיש בגרף מעגל אוילר.

שאלה

יהי $G = (V,E)$ גרף r–רגולרי עם $2r + 1$ קדקודים

1. הוכיחו כי יש בגרף מסלול המילטון.
2. האם יש בגרף בהכרח מעגל אוילר? הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמה נגדית.
3. חשבו את הקוטר של G. נמקו את החישוב.

תשובה (המשך)

3. נשים לב תחילה שהקוטר גדול ממש מ-1, משום שלכל קדקוד v יש בדיוק r שבנים אבל יש סה”כ 2r+1 קודקודים ומכאן שיש קדקוד שלא שבן של v.
נראה כי כל שני קודקודים שונים u,v הינם או שבנים או שיש להם שבן משותף, כלומר $d(u,v) \leq 2$. מכאן ינבע כי $diam(G) = 2$.
יהיו $u.v$ קודקודים שונים בגרף. אם הם שבנים, סיימנו
אחרת, בגרף כולו יש $2r + 1$ קדקודים, כלומר $2r - 1$ קדקודים מעבר ל u,v. מתוך קבוצה זו של קודקודים בדיוק r שבנים של u ו r שבנים של v. מעיקרון שובך היונים בהכרח יש קדקוד אחד שהינו גם שבן של u וגם שבן של v.

שאלה

הראו שאם בגרף G, מספר השכנים המשותף של כל שני קודקודים הינו אי-זוגי, קיים בגרף מעגל אוילר.

<u>רמז</u>: עבור קודקוד u הסתכלו על תת הגרף:

$$\mathrm{G_u} = (V_u, E_u)$$
$$V_u = \{u\} \cup \{v \in V | \{u, v\} \in E\}$$
$$E_u = \{\{v_1, v_2\} \in E \mid v_1, v_2 \in V_u\}$$

כלומר תת הגרף המורכב מ u, שכניו של u, והצלעות מתוך G הנוגעות בקודקודים אלה.

מה אתם יכולים לומר על דרגות הקודקודים בגרף זה?

תשובה

יהי u קודקוד כלשהו, נראה שדרגתו זוגית. נסמן ב-G_u את תת הגרף המורכב מ u, שכניו של u, והצלעות מתוך G הנוגעות בקודקודים אלה.

נסמן את שכניו של u ב$v_1, \dots, v_n$. מספר השכנים המשותפים של u וv_i הינו אי זוגי בגרף G_u (מהנתון בשאלה, כיוון שכל השכנים המשותפים שלהם נמצאים ב-G_u). לכן דרגת v_i ב- G_u היא זוגית (כל השכנים המשותפים עם u וכן u עצמו).

אם כך, כיוון שסכום הדרגות צריך להיות זוגי, וידוע שדרגות כל הקודקודים למעט u, הן זוגיות, אזי u בעל דרגה זוגית ב-G_u ולכן גם ב-G.

כיוון שאפשר לעשות את התהליך הנ"ל עבור כל קודקוד, דרגת כל קדקוד בגרף זוגית ולכן קיים בגרף מעגל אוילר.

שאלה

גרף G פשוט ולא מכוון נקרא היפוהמילטוני אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

- אין ב G מעגל המילטון
- לכל קודקוד v של G, קיים מעגל המילטון בגרף המתקבל מהסרת v והצלעות הנוגעות בו. נסמן גרף זה בG_v

הוכיחו:

I. אם G היפוהמילטוני אזי G קשיר
II. אם G היפוהמילטוני אז deg(v)>=3 לכל קודקוד v ב-G.
III. הראה שלא קיים גרף היפוהמילטוני עם 7 קודקודים.

<u>הדרכה:</u> הוכיחו שלא קיים בגרף קודקוד עם דרגה לפחות 4.

תשובה

I. יהיו v,w שני קודקודים שונים של G, ונראה שיש ביניהם מסלול בגרף. יהי u קודקוד שלישי כלשהו (נשים לב שבגרף יש לפחות 4 קודקודים). בגרף המתקבל מהסרת u והצלעות המחוברות אליו (נסמנו ב G_u), יש מעגל המילטון (כי G היפוהמילטוני) אשר מכיל את כל הקודקודים שנותרו ובפרט מכיל את v וw, לכן הם באותו רכיב קשירות ב G_u, ומכאן גם ב G.

II. יהיו u,v קודקודים כלשהם של G. מההגדרה, u שייך למעגל המילטון ב G_v, ולכן הדרגה שלו בגרף G_v היא לפחות 2. יהי w אחד משכניו של u. מכיוון ש u שייך למעגל המילטון גם בG_w אז גם שם דרגתו היא לפחות 2. אם כך,יש ל u לפחות שני שכנים נוספים חוץ מw ולכן דרגתו של u בגרף G היא לפחות 3. כלומר דרגת כל קודקוד בגרף G היא לפחות 3.

שאלה

גרף G פשוט ולא מכוון נקרא היפוהמילטוני אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

- אין ב G מעגל המילטון
- לכל קודקוד v של G, קיים מעגל המילטון בגרף המתקבל מהסרת v והצלעות הנוגעות בו. נסמן גרף זה בG_v

הוכיחו:

I. אם G היפוהמילטוני אזי G קשיר
II. אם G היפוהמילטוני אז deg(v)>=3 לכל קודקוד v ב-G.
III. הראה שלא קיים גרף היפוהמילטוני עם 7 קודקודים.

<u>**הדרכה:**</u> הוכיחו שלא קיים בגרף קודקוד עם דרגה לפחות 4.

תשובה (המשך)

III. נניח בשלילה ש G גרף היפוהמילטוני עם 7 קודקודים.
נניח תחילה שקיים קודקוד כלשהו בG עם דרגה לפחות 4, נסמנו ב u. נסמן את מעגל ההמילטון בG_u ב$< v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_0 >$. קיימים ל u לפחות ארבעה שכנים במעגל זה לכן קיים i עבורו מתקיים שv_i וגם v_{i+1} שכנים של u בגרף G.
אבל אז המעגל $< v_0 , \ldots ,v_i,u,v_{i+1},\ldots,v_0 >$ הוא מעגל המילטון ב G, בסתירה להנחה.
אם כך אין בגרף קודקוד עם דרגה לפחות 4 ולכן דרגת כל קודקוד בגרף היא לכל היותר 3 וביחד עם סעיף ב' נובע שדרגת כל קודקוד בגרף היא בדיוק 3. לכן סכום דרגות הגרף הינו $21 = 3 * 7$, אך סכום הדרגות בגרף חייב להיות זוגי, וקיבלנו שוב סתירה. אם כך לא קיים גרף היפוהמילטוני עם 7 קודקודים.