תרגיל בית 6

1. יהי $G=(V,E)$ גרף d-רגולרי עם n קודקודים. הוכיחו כי קיים ב-G זיווג בגודל לפחות $\frac{n}{4}$.
רמז: השתמשו בצביעה "חוקית" של צלעות הגרף, כאשר בצביעה כזו כל שתי צלעות עם קודקוד משותף צבועות בצבעים שונים.

<u>פתרון:</u>
גרף G הינו d-רגולרי ולכן ממשפט הדרגות יש בו $|E|=\frac{dn}{2}$ צלעות. יש צביעה חוקית של הצלעות בגרף ב- $(2d-1)$ צבעים (כלומר, ניתן לצבוע את צלעות הגרף כך שאין שתי צלעות עם קודקוד משותף באותו צבע), מפני שלכל צלע יש $2(d-1)$ צלעות עם קודקוד משותף. $d-1$ מכל קודקוד קצה שלה. לכן, קיימת קבוצת צלעות בגודל לפחות $\frac{n}{4}=\frac{dn}{4d}\geq\frac{dn}{4d-2}=\frac{dn}{2(2d-1)}$ אשר צבועות באותו הצבע בצביעת צלעות חוקית. מהגדרת צביעת צלעות חוקית אין לצלעות אלו קודקודי קצה משותפים ולכן הן מהוות זיווג.

2. הוכיחו כי בכל צביעה של צלעות K_6 באדום ובכחול יש:
   א. לכל היותר 18 משולשים דו-צבעיים
   ב. לפחות 2 משולשים חד-צבעיים
   (הדרכה: הגדירו זווית דו-צבעית כזוג צלעות בצבעים שונים שיש להן קודקוד משותף. חשבו את מספר הזוויות הדו-צבעיות המקסימלי שיכול להיות בגרף. לאחר מכן בעזרת מספר הזוויות הדו-צבעיות בגרף ספרו את מספר המשולשים הדו-צבעיים בגרף).

<u>פתרון:</u>
א. נגדיר זווית דו-צבעית כזוג צלעות בצבעים שונים שיש להן קודקוד משותף. עבור קודקוד מסוים v בגרף K_6, נסמן ב-b את מספר הצלעות הכחולות שיוצאות מ-v, ונסמן ב-r את מספר הצלעות האדומות שיוצאות ממנו. הקודקוד v הינו הקודקוד האמצעי ב- $b\cdot r$ זוויות דו-צבעיות. מכיוון שיש בסה"כ 6 קודקודים, מתקיים $r+b=5$ ולכן $b\cdot r\leq 6$. מתוך כך, עבור כל 6 קודקודי הגרף יש לכל היותר 36 זוויות דו-צבעיות. נשים לב כי בכל משולש דו-צבעי, יש בדיוק שתי זוויות דו-צבעיות, וכל זווית דו-צבעית שייכת בדיוק למשולש דו-צבעי אחד. לכן יש בגרף לכל היותר 18 משולשים דו-צבעיים.
ב. משום שבגרף כולו יש $\binom{6}{3}=20$ משולשים, לפחות שניים מהם חד-צבעיים.

3. מניחים מטבעות על לוח שח (כלומר לוח משבצות בגודל $8X8$), כך שבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק 4 מטבעות.

הוכיחו כי ניתן לבחור 8 מטבעות, כך שאין 2 מתוכן שנמצאות באותה שורה או באותה עמודה.

<u>פתרון:</u>

נדמה את הבעיה לגרף כך שכל קודקוד מייצג עמודה או טור, ובין שני קודקודים קיימת צלע אם ורק אם יש מטבע על המשבצת המשותפת ביניהם.

יהי גרף דו צדדי $G=(V_1\cup V_2,E)$, כך ש-$|V_1|=|V_2|=8$ והצלעות ב-E מתקיימות בהתאם ללוח כמתואר לעיל. נראה שקיים זיווג מושלם בגרף ע"י משפט Hall.

תהי $S\subseteq V_1$ כך ש-$|S|=k$, ונוכיח ש-$|\Gamma(S)|\geq k$. אם $k\leq 4$ אז מכיוון שלכל קודקוד יש בדיוק 4 שכנים מתחייב ש-$|\Gamma(S)|\geq k$. אחרת, אם $k>4$, נניח בשלילה ש-$|\Gamma(S)|<k$, מכיוון שהמספר הכולל של

צלעות הסמוכות לקודקודי S הוא $4k$ מתחייב שיהיה שכן אחד שישלחו אליו $\frac{4k}{|\Gamma(S)|} > 4$ צלעות. לפיכך יש טור שבו יש יותר מ-4 מטבעות וזו סתירה.

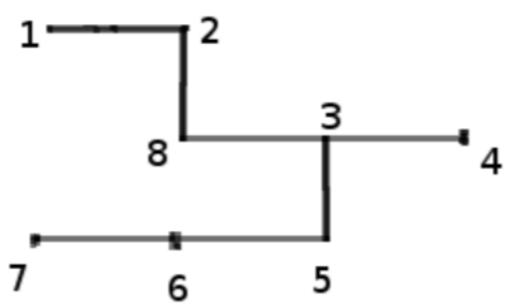
4. הוכיחו כי $R(4,4) \le 18$

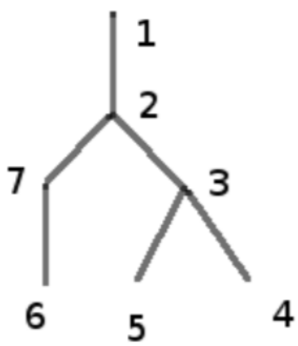
<u>פתרון:</u>

יהיה $G=(V,E)$ גרף K_{18} שצלעותיו צבועות בכחול ובאדום ויהי $v \in V$. לפי עקרון שובך היונים ל-v יש לפחות 9 שכנים כחולים או לפחות 9 שכנים אדומים. מאחר ו-$R(4,4)$ הוא סימטרי נניח בלי הגבלת הכלליות של-v יש 9 שכנים אדומים. מאחר וידוע ש-$R(4,3)=9$, בגרף המושרה על השכנים של v יש או K_4 כחול או K_3 אדום, שביחד עם v יוצרים K_4 אדום.

5.

א. חשבו את קוד פרופר של העצים הבאים:





ב. ציירו את העצים המתאימים לסדרות הבאות:

1,2,3,4,4,5

6,6,6,3,4

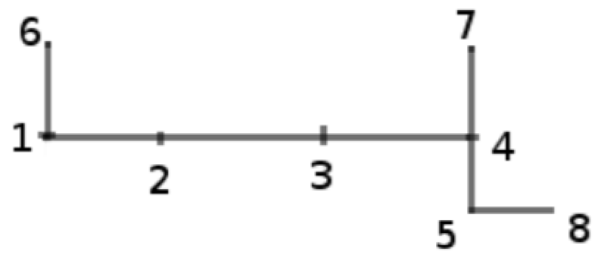
פתרון:

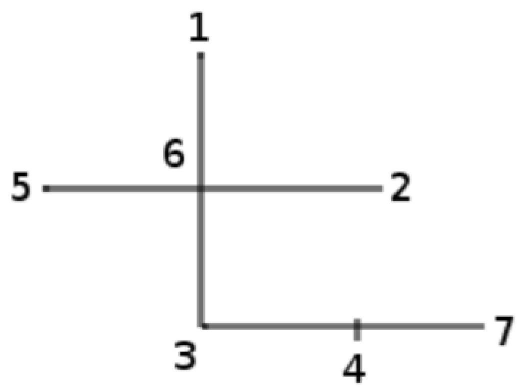
א.

2,8,3,6,5,3

2,3,3,2,7

ב.





6. תהי $V=\{1,2,3,..n\}$ קבוצה של קודקודים כך ש-$n>5$. כמה עצים מתויגים ישנם מעל V כך שהקודקודים $1,2,3$ הם עלים ואורך המסלול הקצר ביותר בין כל שניים מהם גדול ממש מ-2?

<u>פתרון:</u>
תחילה נבחין שאם אורך המסלול הקצר ביותר בין כל זוג קודקודים הינו לפחות 3 אז אין לשני קודקודים שכן משותף.
ממשפט קיילי, מספר העצים המתויגים על הקודקודים $\{4,..,n\}$ הוא $(n-3)^{n-5}$. כעת כדי להשלים לעץ מתויג שבו הקודקודים $1,2,3$ הם עלים אנו צריכים לחבר אותם לקודקודים כלשהם, כאשר הקודקודים חייבים להיות שונים (אחרת המסלול יהיה באורך 2).
ישנן $n-3$ אפשרויות לקודקוד הראשון (כלומר 1), $n-4$ לקודקוד השני ו- $n-5$ לקודקוד השלישי ולכן בסה"כ:

$$(n-3)^{n-5}(n-3)(n-4)(n-5)$$

7. א. בכמה מהעצים על הקודקודים המתויגים $\{1,2,3,4,5,6\}$ הקודקוד 6 הוא עלה?
ב. בכמה מהעצים על הקודקודים המתויגים $\{1,2,3,4,5,6\}$ הקודקוד 6 הוא עלה וישנה הצלע $\{1,2\}$

<u>פתרון:</u>
א. עלה הוא קודקוד שאינו מופיע בקוד פרופר. לכן קוד פרופר של עץ על הקודקודים המתוייגים $\{1,2,3,4,5,6\}$ בו 6 הוא עלה, יהיה באורך 4 ומעל הספרות $1,2,3,4,5$. כלומר בסה"כ 5^4 אפשרויות.

ב. כל עץ על הקודקודים המתויגים $\{1,2,3,4,5,6\}$ בו 6 הוא עלה שקול לעץ מסוים על הקודקודים המתוייגים $\{1,2,3,4,5\}$ בתוספת צלע מקודקוד כלשהו ל-6.
נחשב את מספר העצים על הקודקודים המתוייגים $\{1,2,3,4,5\}$ שיש בהם את הצלע $\{1,2\}$:
מספר העצים המתוייגים על קודקודים אלו לפי משפט קיילי הוא 5^3. בכל עץ יהיו 4 צלעות, לכן סה"כ בכל העצים על קודקודים אלו יהיו $4 \cdot 5^3$ צלעות. הצלע $\{1,2\}$ משתתפת במספר עצים זהה לכל צלע אחרת, וישנן $\binom{5}{2} = 10$ צלעות אפשרויות. לכן מספר העצים על הקודקודים המתוייגים $\{1,2,3,4,5\}$ שיש בהם את הצלע $\{1,2\}$ הוא $\frac{5^3 \cdot 4}{10} = 50$. לכל עץ כזה יש 5 אפשרויות להוספת 6 בתור עלה, לכן סה"כ 250 עצים.