תרגיל 7

שאלה 1

מרחק הסתברות, התפלגות אחידה

שישה תלמידים רצו להתחלק לשתי קבוצות למידה, לשם כך הם התיישבו במעגל והחליטו לשחק בגרסה מורחבת של "משלושה יוצא אחד". כל התלמידים בבת אחת מושיטים יד כאשר הם בוחרים באקראי האם להושיט אותה עם גב היד מופנה כלפי מעלה או כלפי מטה. קבוצה אחת תהיה אלה שבחרו בגב היד והשנייה אלה שבחרו להיפך.

בהנחה וכל אחד מהם מחליט מה לעשות באקראיות מוחלטת ובהתפלגות אחידה, מה ההסתברות שלאחר ניסיון אחד יצליחו להתחלק כראוי לשתי קבוצות שוות גודל?

תשובה

תחילה נשים לב כי לכל תלמיד יש 2 אפשרויות, מאחר ויש 6 תלמידים מרחב המדגם הוא סדרות מאורך 6 שכל תו בהם מקבל אחד משני ערכים (בינארי). מכאן ש $|\Omega| = 2^6 = 64$

המאורע שאת הסתברותו אנו מעוניינים לחשב הוא

$$A = \{s \in \Omega \mid s \text{ contains } 3 \text{ ups and } 3 \text{ downs}\}$$

נחשב את גודל המאורע –

נבחר 3 מקומות בסדרה שיהוו קבוצה אחת, השאר יהוו קבוצה שניה (נשים לב שזה לא משנה האם קבוצה א' הייתה עם היד כלפי מעלה או מטה). כלומר

$$|A| = \binom{6}{3} = 20$$

ולכן ההסתברות היא

$$Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{64} = 0.3125$$

שאלה 2

אי-תלות

יהיו X ו-Y מאורעות בלתי תלויים, כלומר מתקיים $\Pr(X \cap Y) = \Pr(X) \cdot \Pr(Y)$.

הוכיחו כי מתקיים:

א. המאורעות $\overline{X}$ ו- Y בלתי תלויים.
ב. המאורעות $\overline{X}$ ו- $\overline{Y}$ בלתי תלויים.

תשובה

א. נראה כי מתקיים $\Pr(\overline{X} \cap Y) = \Pr(\overline{X}) \cdot \Pr(Y)$ ואז לפי הגדרה המאורעות יהיו בלתי תלויים:

$$\Pr(\overline{X} \cap Y) = \Pr(Y \setminus (X \cap Y)) = \Pr(Y) - \Pr(X \cap Y) = \Pr(Y) - \Pr(X) \cdot \Pr(Y) =$$
$$= \Pr(Y)\,(1 - \Pr(X)) = \Pr\,(Y) \cdot \Pr\,(\overline{X})$$

ב. לפי סעיף א' מתקיים כי המאורעות $\overline{X}$ ו-Y הם בלתי תלויים, כלומר $\Pr(\overline{X} \cap Y) = \Pr(\overline{X}) \cdot \Pr(Y)$.
נראה כי מתקיים $\Pr(\overline{X} \cap \overline{Y}) = \Pr(\overline{X}) \cdot \Pr(\overline{Y})$ ונקבל שהמאורעות המבוקשים בלתי תלויים:
$$\Pr(\overline{X} \cap \overline{Y}) = \Pr(\overline{X} \setminus (\overline{X} \cap Y)) = \Pr(\overline{X}) - \Pr(\overline{X} \cap Y) = \Pr(\overline{X}) - \Pr(\overline{X}) \cdot \Pr(Y) = \Pr(\overline{X})\,(1 - \Pr(Y)) = \Pr\,(\overline{X}) \cdot \Pr\,(\overline{Y})$$

שאלה 3

משתנים מקריים, הגדרת התוחלת, אי-תלות

מטילים קובייה הוגנת (בעלת 6 פאות) פעמיים ורושמים את המספר הגבוה מבין שתי ההטלות.

א. מה ההסתברות שהתוצאה (המספר הגבוה מבין שתי ההטלות) תהיה קטנה או שווה ל3?
ב. מה תוחלת התוצאה? (יש לתת תשובה מספרית)

מטילים קובייה הוגנת עם **20 פאות** פעמיים ורושמים את המספר הגבוה מבין שתי ההטלות.

ג. מה ההסתברות שהתוצאה (המספר הגבוה מבין שתי ההטלות) תהיה קטנה או שווה ל 12?
ד. מה ההסתברות שהתוצאה תהיה גדולה ממש מ 11?
ה. מה ההסתברות שהתוצאה תהיה שווה בדיוק ל 12? העזרו בסעיפים הקודמים.

תשובה

א. נתבונן במרחב המדגם

		קוביה ראשונה					
6	5	4	3	2	1		
6	5	4	3	2	1	1	קוביה
6	5	4	3	2	2	2	שניה
6	5	4	3	3	3	3	
6	5	4	4	4	4	4	
6	5	5	5	5	5	5	
6	6	6	6	6	6	6	

ההתפלגות אחידה ולכן ההסתברות לקבלת תוצאה קטנה או שווה ל3 היא 1/4=9/36

ב. נחשב על ידי ההגדרה ונקבל
$$1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.47$$

ג. $\Pr(\max - \text{of} - \text{dices} \leq 12) = \Pr(\text{first} - \text{dice} \leq 12 \text{ and second} - \text{dice} \leq 12)$
$$= \Pr(first - dice \leq 12)\,\Pr(second - dice \leq 12) = \frac{12}{20} \cdot \frac{12}{20} = \frac{9}{25}$$

ד. $\Pr(\max-of-dices>11)=1-\Pr(\max-of-dices\le 11)=1-\left(\frac{11}{20}\right)^2\approx 0.7$

ה. $\Pr(max-of-dices=12)$
$$=\Pr(max-of-dices\le 12)-\Pr(max-of-dices\le 11)=\frac{12}{20}\cdot\frac{12}{20}-\frac{11}{20}\cdot\frac{11}{20}=\frac{23}{400}=0.0575$$

שאלה 4

משתנים מקריים, תוחלת, לינאריות התוחלת, שונות, חסמים

הארווי דנט מטיל מטבע שוב ושוב. המטבע איננו הוגן אלא נופל על "עץ" בהסתברות של 0.4.

לאחר 100 הטלות

1. מה תוחלת מספר הפעמים בהם יצא לו "עץ"?
2. מה השונות עבור מספר הפעמים בהם יצא לו "עץ"?
3. הרווי שם לב כי נרשמו למעלה מ 60 פעמים "עץ". הארווי יודע שישנו סיכוי של 1/16 שברוס החליף את המטבע המקורי שלו במטבע מזויף הנשלט מרחוק. מה יותר סביר: שבאופן מקרי קיבל הרווי מספר כזה של הטלות "עץ" או שברוס הצליח להחליף לו את המטבע?

תשובה

1. נסמן ב X_i את המשתנה המקרי שמחזיר 1 אם בהטלה ה i יצא "עץ" ו0 אחרת. נסמן ב X את מספר ההטלות הכולל בהם יצא "עץ".
נחשב
$$E[X_i]=0.4\cdot 1+0.6\cdot 0=0.4$$
$$E[X]=E\left[\sum_{i=1}^{100}X_i\right]=\sum_{i=1}^{100}E[X_i]=100\cdot 0.4=40$$
2. תחילה נחשב
$$E\left[X_i^2\right]=0.4\cdot 1^2+0.6\cdot 0^2=0.4$$
ולכן
$$Var(X_i)=E\left[X_i^2\right]-E[X_i]^2=\frac{6}{25}$$
ומכאן נקבל
$$Var(X)=Var\left[\sum_{i=1}^{100}X_i\right]=\sum_{i=1}^{100}Var[X_i]=100\cdot\frac{6}{25}=24$$
3. מאי-שיוויון צ'ביצב עבור *t=20* נקבל
$$Pr(X\ge 60)\le Pr(|X-40|\ge 20)\le\frac{24}{20^2}<\frac{25}{20^2}<\left(\frac{5}{20}\right)^2=\frac{1}{16}$$
כלומר המאורע שברוס החליף את המטבע הינו סביר יותר.

שאלה 5

תוחלת, לינאריות התוחלת

1. עבור המספרים $1,2,\ldots,100$, בוחרים באקראי, בהסתברות שווה, 15 מספרים בלי חזרות. מה ההסתברות שהמספר הגבוה ביותר שנבחר יהיה גדול יותר מ-80?
2. עבור המספרים $1,2,\ldots,80$, בוחרים באקראי, בהסתברות שווה, 15 מספרים בלי חזרות. מה תהיה תוחלת הסכום של 15 המספרים שנבחרו?

תשובה

1. נחשב את ההסתברות למאורע המשלים למאורע המבוקש: נמצא את ההסתברות לכך שכל המספרים שנבחרו יהיו קטנים או שווים ל-80. גודל מרחב המדגם שלנו הוא $\binom{100}{15}$, כלומר מספר האפש' לבחור 15 מספרים מתוך 100 מספרים. מספר המקרים הטובים שלנו יהיה כל האפש' לבחור 15 מספרים מבין קב' המספרים 1,2,...,80, כלומר יש לנו $\binom{80}{15}$ מקרים טובים. לכן ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שנבחר הוא לכל היותר 80 היא $\frac{\binom{80}{15}}{\binom{100}{15}}$

   לכן ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שנבחר גדול מ-80 היא $1-\frac{\binom{80}{15}}{\binom{100}{15}}$

2. נמצא את התוחלת עבור בחירה של מספר אחד מבין 1,2,...,80: כל מספר נבחר בהתפלגות אחידה, כלומר ההסתברות לבחירה של כל מספר היא $\frac{1}{80}$. נסמן: f_i– ערך המספר ה-i שנבחר, ואז מתקיים: $E(f_i)$ – הערך הממוצע של המספר ה-i שנבחר.

   לכן:

$$E(f_i)=\frac{1}{80}\cdot 1+\frac{1}{80}\cdot 2+\cdots+\frac{1}{80}\cdot 80=\frac{1}{80}(1+2+\cdots+80)=\frac{1}{80}\left(\frac{80(1+80)}{2}\right)$$
$$=\frac{81}{2}=40.5$$

לכן כאשר נסמן $f=f_1+f_2+\cdots+f_{15}$ הסכום הממוצע של 15 המספרים שנבחרו הוא $E(f)$, ומליניאריות התוחלת נקבל:

$$E(f)=E(f_1+f_2+\cdots+f_{15})=E(f_1)+E(f_2)+\cdots+E(f_{15})$$
$$=40.5+40.5+\cdots+40.5=40.5\cdot 15=607.5$$

שאלה 6 – לתרגול עצמי

הסתברות שלמה, בייס

במפעל טקסטיל בדימונה נגנב מחשב. כל אחד מהעובדים טוען לחפות ובשל כך החליטה ההנהלה להעביר את כל 1000 עובדי המפעל בדיקת פוליגרף.

למכונת הפוליגרף (הבדיונית, לצורך השאלה) דיוק של 95%

כלומר

- אדם המשקר יזוהה כשקרן 95% מהפעמים.

- אדם דובר אמת יזוהה כדובר אמת 95% מהפעמים.

שלפו באקראי (בהתפלגות אחידה) עובד מהמפעל – יוני

יוני נכנס לחדר הבדיקה, טען לחפותו אבל המכונה הודיעה כי הוא משקר!

תחת ההנחה כי רק עובד אחד מהמפעל הינו הגנב, מה ההסתברות שיוני למעשה חף מפשע?

תשובה

נסח תחילה את הנתונים באופן פורמלי:

נסמן את המאורע שהאדם שנבחר הינו הגנב (כלומר הוא משקר באמת) ב A

נסמן את המאורע שהמכונה טוענת שהאדם שנבחר משקר ב – B

הנתונים שיש לנו על המכונה הם

$$Pr(B|A) = 0.95$$

$$Pr(\bar{B}|\bar{A}) = 0.95$$

התוצאה שאנחנו מעוניינים לחשב היא $Pr(\bar{A}|B)$, כלומר בהינתן שהמכונה אמרה שהוא משקר מה ההסתברות לכך שהוא בעצם דובר אמת.

נשים לב שמתקיים

$$Pr(B|\bar{A}) = \frac{Pr(B \cap \bar{A})}{Pr(\bar{A})} = \frac{Pr(\bar{A}) - Pr(\bar{B} \cap \bar{A})}{Pr(\bar{A})} = 1 - Pr(\bar{B}|\bar{A})$$

נשתמש בחוק בייס כדי לחשב

$$Pr(\bar{A}|B) = \frac{Pr(B|\bar{A})Pr(\bar{A})}{Pr(B)} = \frac{\left(1 - Pr(\bar{B}|\bar{A})\right)Pr(\bar{A})}{Pr(B)} = \frac{(1 - 0.95) \cdot 0.999}{Pr(B)}$$

נותר אם כך לחשב את $Pr(B)$. נעשה זאת בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה.

נשים לב ש $\{A, \bar{A}\}$ נהינה חלוקה של המרחב לשתי קבוצות זרות, ולכן נקבל

$$Pr(B) = Pr(B|\mathrm{A})\mathrm{Pr(A)} + \mathrm{Pr(B|}\bar{A})Pr(\bar{A})$$

נציב את הנתונים ונקבל

$$Pr(B) = 0.95 \cdot 0.001 + (1 - 0.95) \cdot 0.999 = 0.0509$$

נציב במשוואה הקודמת ונקבל

$$Pr(\bar{A}|B) = \frac{(1 - 0.95) \cdot 0.999}{0.0509} \approx 0.9813$$

כלומר ההסתברות לכך שיוני למעשה חף מפשע היא, בערך, 98.13%