מבנים בדידים וקומבינטוריקה – סמסטר ב' תש"ף

תרגיל בית 4 - פתרונות

1. יהי $G=(V,E)$ גרף. הוכיחו כי שלושת התנאים הבאים שקולים:
   א. G קשיר ויש לו מעגל פשוט אחד ויחיד.
   ב. קיימת צלע e כך ש $G\setminus\{e\}$ הוא עץ.
   ג. G קשיר ו $|E|=|V|$.

פתרון:
א ⇐ ב

תהי e צלע ששייכת למעגל הפשוט היחיד ב G ויהיו v ו – w שני הקדקודים במעגל הפשוט הזה שעליהם חלה הצלע e. אז קל לראות ש $G\setminus\{e\}$ - עדיין קשיר (כתוצאה מהעובדה שיש ב$G\setminus\{e\}$ מסלול פשוט מ v - ל w דרך שאר הצלעות במעגל הפשוט מ G וברור גם שאין מעגל ב $G\setminus\{e\}$ - לכן $G\setminus\{e\}$ הוא עץ.

ב ⇐ ג

אם קיימת צלע e כך ש $G\setminus\{e\}$ - הוא עץ, אז מספר הצלעות ב $G\setminus\{e\}$ הוא $|V|-1$ ולכן מספר הצלעות ב G הוא $|V|$ ו- G קשיר מפני ש $G\setminus\{e\}$ קשיר.

ג ⇐ א

נניח ש – G קשיר ו -$|E|=|V|$. אז G אינו עץ, לכן יש לו לפחות מעגל פשוט אחד. אם יש יותר ממעגל פשוט אחד, תהא e צלע ששייכת לאחד המעגלים הפשוטים אך לא לשני. אז $G\setminus\{e\}$ עדיין קשיר ועדיין מכיל מעגל פשוט, לכן מספר הצלעות ב $G\setminus\{e\}$ הוא לפחות $|V|$, בסתירה לנתון שיש $|V|$ צלעות ב G.

2. הוכיחו שכל גרף $G=(V,E)$ כך ש $|V|=n, |E|=m$ מכיל לפחות $m-n+1$ מעגלים שונים.

פתרון:
נחלק למקרים:

G קשיר – נתבונן בעץ פורש של הגרף T, יש בו בדיוק $n-1$ צלעות. כעת נוסיף כל אחת מבין שאר הצלעות ונבחין כי כל צלע שנוסיף, סוגרת מעגל בגרף G. יש לנו $m-(n-1)$ צלעות להוסיף, לכן יסגרו לנו $m-n+1$ מעגלים. ברור כי אלו מעגלים שונים, שכן כל מעגל כזה נסגר על ידי צלע ייחודית שהוספנו לעץ הפורש T. לכן יש לנו בגרף G לפחות $m-n+1$ מעגלים.

G אינו קשיר – נניח שיש לנו t רכיבי קשירות, נמספר אותם מ1 עד t, כך שברכיב הקשירות הi $1\le i\le t$, יש לנו n_i קודקודים ו- m_i צלעות.לפי המקרה הקודם יש לנו ברכיב הקשירות ה-i m_i-n_i+1 מעגלים. לכן, כאשר נחבר את כל רכיבי הקשירות נקבל:

$$\sum_{i=1}^{t} m_i-n_i+\ 1=m-n+t\ge m-n+1$$

מעגלים.

פתרון נוסף: באינדוקציה על m, בבסיס m=n: ממשפט שנלמד בכיתה קיים מעגל אחד לפחות. נניח ל m-1 ונוכיח ל m. בגרף עם m>n צלעות קיים מעגל, נמחק אחת מהצלעות בו, מהנחת האינדוקציה יש m-n מעגלים שונים בגרף שנותר, ויחד עם המעגל שבחרנו, נקבל m-n+1 מעגלים שונים.

3. בהינתן גרף $G=(V,E)$ נאמר שצלע $e\in E$ היא "גשר" אם בגרף $G'=G\setminus\{e\}$ יש יותר רכיבי קשירות מאשר ב G. הוכיחו כי אם דרגות כל הקודקודים בגרף G זוגיות אזי אין בו גשרים.

פתרון:

נניח כי G קשיר (במידה והוא לא קשיר נוכל להשתמש במשפט עבור אחד מרכיבי הקשירות שלו).
נניח בשלילה כי עבור גרף G בעל דרגות זוגיות בלבד קיימת צלע $e=\{v_1,v_2\}$ שהיא גשר. לכן בגרף $G'=G\setminus\{e\}$ יש בדיוק 2 רכיבי קשירות. יהי G_1 רכיב הקשירות המכיל את v_1. כל הקודקודים בG_1 בעלי דרגה זוגית למעט v_1 אשר בעל דרגה אי-זוגית, לכן סכום הדרגות הוא אי-זוגי, בסתירה למשפט שנלמד בכיתה.

4. הוכיחו או הפריכו:
   א. אם G גרף קשיר אז הגרף המשלים $\bar{G}$ איננו קשיר.
   ב. אם G גרף מקוטר לפחות 3 אז הגרף המשלים $\bar{G}$ קשיר.

פתרון:

א. לא נכון. למשל P_4, גרף המסלול עם 4 קודקודים, הוא גרף קשיר, והמשלים שלו הוא גם P_4 ולכן קשיר.

ב. נכון. אם u,v זוג קודקודים כך ש $d(u,v)\geq 3$, אזי במשלים $\bar{G}$ יש ביניהם צלע. כמו כן, כל קודקוד אחר x לא יכול להיות מחובר ב-G גם ל-u וגם ל-v (אחרת המרחק ביניהם יהיה 2), כלומר ב-$\bar{G}$ x מחובר או ל-u או ל-v (או לשניהם), לכן ניתן לראות ש-$\bar{G}$ קשיר.

5. יהי $G=(V,E)$ גרף 3 רגולרי ויהי t מספר טבעי כך ש $n=|V|\geq 3\cdot 2^t-1$. הוכיחו כי $diam(G)\geq t+1$.

פתרון:

יהי $u\in V$ קודקוד כלשהו של G. לכל j כך ש - $0\leq j\leq t$ יהי $V_j=\{v|d(u,v)=j\}$, ונסמן $c_j=|V_j|$. אז מתקיים כי $c_0=1,c_1=3$. לכל $1\leq j\leq t-1$ יש לכל קודקוד מ V_j שני שכנים לכל היותר ב V_{j+1} (זאת משום שיש לו לפחות שכן אחד ב- V_{j-1}), לכן $c_{j+1}\leq 2c_j$.
אז $c_2\leq 6,c_3\leq 12$, ובאופן כללי $c_j\leq 3\cdot 2^{j-1},\forall 1\leq j\leq t$. לכן מתקיים כי:

$$\left|\cup_{j=0}^{t} V_j\right|=\sum_{j=0}^{t}\left|V_j\right|=\sum_{j=0}^{t} c_j\leq 1+\sum_{j=1}^{t} 3\cdot 2^{j-1}=1+3(2^t-1)=3\cdot 2^t-2$$

אך נשים לב כי $n=|V|\geq 3\cdot 2^t-1$, לכן יש קודקוד $v\in V$ שאינו שייך ל $\cup_{j=0}^{t} V_j$ וזה גורר ש- $d(u,v)\geq t+1$. ומכך נובע כי $diam(G)\geq t+1$.

6.
   א. הראו שבגרף עם 60 קודקודים ודרגה מינימלית 41 קיים K_4 כתת גרף.
   ב. מצאו דוגמא לגרף עם 60 קודקודים ודרגה מינימלית 40 ללא K_4.

פתרון:

א. יהי $v_1\in V$, אזי $deg(v_1)\geq 41$. יהי $v_2\in V$ כך ש $\{v_1,v_2\}\in E$. אזי יש לפחות $41-19=22$ קודקודים שהם שכנים גם של v_1 וגם של v_2. יהי v_3 אחד מן השכנים הללו. בדומה לחישוב הקודם קיימים לפחות $41-19-19=3$ שכנים המשותפים ל v_1,v_2,v_3 לכן יש לנו לפחות 3 אופציות לבחור את v_4. כל אחת מן האופציות הללו מהווה קליקה בגודל 4 ב-G.

ב. נחלק את הקודקודים בגרף G לשלוש קבוצות זרות A,B,C כך שגודל כל קבוצה הוא בדיוק 20 קודקודים. נגדיר קשתות בין הקודקדים של כל קבוצה לקודקודים בקבוצות האחרות. זהו גרף אשר

אינו מכיל קליקה בגודל 4, כיוון שמכל 4 קודקודים יהיו 2 באותה הקבוצה, כלומר ללא צלע ביניהם.
כמו כן, לכל קודקוד בגרף יש דרגה 40.

7. הוכיחו שמספר הגרפים עם n קודקודים בהם כל הדרגות זוגיות הוא $2^{\binom{n-1}{2}}$.

פתרון:

תהי P קבוצת כל הגרפים עם n-1 קודקודים, בה"כ הקודקודים הם $\{1, \ldots, n-1\}$. נראה התאמה חח"ע ועל בין P אל Q, קבוצת כל הגרפים עם n קודקודים בהם כל הדרגות זוגיות. עבור גרף G עם n-1 קודקודים, נוסיף קודקוד חדש {n} ונחבר אותו בצלע לכל קודקוד של G מדרגה אי-זוגיות. כעת כל הדרגות של הגרף שקיבלנו זוגיות (של הקודקוד החדש גם, כי ראינו בכיתה שמספר הקודקודים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי), לכן זוהי אכן פונקציה אל Q. לפונ' זו יש הופכית, הפונקציה שבהנתן גרף עם n קודקודים וכל הדרגות זוגיות, משמיטה את הקודקוד {n} ואת הצלעות החלות בו.

כעת, מספר הגרפים עם n-1 קודקודים הוא $2^{\binom{n-1}{2}}$, כמספר תתי הקבוצות של $\binom{\{1, \ldots, n-1\}}{2}$.

8. הראו שאם $G = (V, E)$ גרף מדרגה מינימלית 2, אזי קיים גרף קשיר G' עם בדיוק אותה סדרת דרגות כמו של G. (<u>הדרכה</u>: שנו חלק מצלעות הגרף כך שמספר רכיבי הקשירות יקטן, אך הדרגות לא ישונו.)

פתרון:

נתבונן ברכיבי הקשירות של G. במידה ויש לנו רכיב קשירות 1 סיימנו. אחרת, נתבונן בתהליך הבא, שמקטין ב-1 את מספר רכיבי הקשירות ושומר על סדרת הדרגות. נניח B,A שני רכיבי קשירות שונים של G, כיוון שהדרגה המינימלית היא 2, כל אחד מהם מכיל מעגל (אם יש m צלעות ו n קודקודים ברכיב קשירות, סכום הדרגות בו שווה ל2m , ומצד שני הוא לפחות 2n, לכן $m \geq n$ ויש מעגל). ניקח צלע $\{u, v\}$ במעגל כלשהו של A, ו $\{x, y\}$ צלע במעגל כלשהו של B. כעת נמחק את זוג הצלעות הללו, ונשים לב ש-B,A נותרו רכיבי קשירות, כי הסרת צלע ממעגל לא פוגעת בקשירות. כעת, נוסיף לגרף את הצלעות $\{u, x\}$ ו $\{v, y\}$, שמחברות בין רכיבי הקשירות B,A, ונבחין כי הדרגות לא השתנו כלל.

נוכל להמשיך בתהליך זה עד שנקבל רכיב קשירות יחיד, וזה יהיה G’.

9. **בונוס:** הראו שאם $G = (V, E)$ גרף שלם עם n קודקודים, בו הצלעות ממוספרות $1,2,\ldots,\binom{n}{2}$ באופן כלשהו, אזי קיים מסלול מונוטוני מאורך n-1 (כלומר מסלול בו מספרי הצלעות הן סדרה מונוטונית עולה).

פתרון:

נניח שעל כל קודקוד עומד אדם. נקריא את המספרים $1,2,\ldots,\binom{n}{2}$ לפי הסדר. בכל פעם שאדם שומע מספר של צלע החלה בקודקוד עליו הוא עומד, הוא ילך לקצה השני של הצלע (כלומר יתחלף עם האדם העומד שם). בסך הכל יתבצעו $\binom{n}{2}$ חילופים, או n(n-1) צעדים על ידי כל האנשים. מעקרון שובך יונים, אחד מ-n האנשים יעשה לפחות n-1 צעדים.