מבנים בדידים וקומבינטוריקה – סמסטר ב' תש"ף

תרגיל בית 4

1. יהי $G=(V,E)$ גרף. הוכיחו כי שלושת התנאים הבאים שקולים:
   א. G קשיר ויש לו מעגל פשוט אחד ויחיד.
   ב. קיימת צלע e כך ש $G\setminus\{e\}$ הוא עץ.
   ג. G קשיר ו $|E|=|V|$.

2. הוכיחו שכל גרף $G=(V,E)$ כך ש $|V|=n, |E|=m$ מכיל לפחות $m-n+1$ מעגלים שונים.

3. בהינתן גרף $G=(V,E)$ נאמר שצלע $e\in E$ היא "גשר" אם בגרף $G'=\mathrm{G}\setminus\{\mathrm{e}\}$ יש יותר רכיבי קשירות מאשר ב G. הוכיחו כי אם דרגות כל הקודקודים בגרף G זוגיות אזי אין בו גשרים.

4. הוכיחו או הפריכו:
   א. אם G גרף קשיר אז הגרף המשלים $\bar{G}$ איננו קשיר.
   ב. אם G גרף מקוטר לפחות 3 אז הגרף המשלים $\bar{G}$ קשיר.

5. יהי $G=(V,E)$ גרף 3 רגולרי ויהי t מספר טבעי כך ש $n=|V|\geq 3\cdot 2^t-1$. הוכיחו כי $diam(G)\geq t+1$.
   רמז: עבור קודקוד $u\in V$ כלשהו התבוננו בקבוצת השכנים שלו ממרחק j.

6.
   א. הראו שבגרף עם 60 קודקודים ודרגה מינימלית 41 קיים K_4 כתת גרף.
   ב. מצאו דוגמא לגרף עם 60 קודקודים ודרגה מינימלית 40 ללא K_4.

7. הוכיחו שמספר הגרפים עם n קודקודים בהם כל הדרגות זוגיות הוא $2^{\binom{n-1}{2}}$.

8. הראו שאם $G=(V,E)$ גרף מדרגה מינימלית 2, אזי קיים גרף קשיר G' עם בדיוק אותה סדרת דרגות כמו של G. (<u>הדרכה</u>: שנו חלק מצלעות הגרף כך שמספר רכיבי הקשירות יקטן, אך הדרגות לא ישונו.)

9. **בונוס:** הראו שאם $G=(V,E)$ גרף שלם עם n קודקודים, בו הצלעות ממוספרות $1,2,\ldots,\binom{n}{2}$ באופן כלשהו, אזי קיים מסלול מונוטוני מאורך n-1 (כלומר מסלול בו מספרי הצלעות הן סדרה מונוטונית עולה).