תרגול 8

עצים:

הגדרות:

עץ הוא גרף לא מכוון קשיר וחסר מעגלים. עץ עם n קדקודים מכיל $n-1$ צלעות.

יהא G גרף עם n קדקודים, תנאי מספיק לכך ש- G הוא עץ, הוא קיום שניים מבין התנאים הבאים:

1. G קשיר.
2. G חסר מעגלים.
3. G מכיל $n-1$ צלעות.

בהינתן גרף לא מכוון G , תת-גרף פורש של G הוא תת-גרף שמכיל את כל קדקודי G.

עץ פורש של G הוא תת-גרף פורש של G שהוא עץ.

עבור גרף $G = (V, E)$, צלע $e \in E$ וקודקוד $v \in V$, נשתמש בסימונים הבאים:

1. $G\setminus\{e\} = (V, E\setminus\{e\})$
2. $G\setminus\{v\} = (V\setminus\{v\}, E\setminus\{e: v \in e\})$

טענה שהראנו בהרצאה: כל גרף קשיר מכיל עץ פורש

תרגילים:

שאלה 1:

נתון גרף קשיר $G = (V, E)$. יש להוכיח כי קיים קדקוד $v \in V$ כך שהגרף $G' = G\setminus\{v\}$ הינו גרף קשיר.

פתרון:

כיוון שהגרף G קשיר, הוא מכיל עץ פורש T.

כפי שנלמד בכיתה, בכל עץ פורש עם שני קדקודים לפחות, ישנו עלה.

נבחין כי המסלולים היחידים בהם עלה משתתף הם מסלולים בהם הוא קדקוד קצה (ראשון/אחרון).

לכן, אם ננתק עלה v מ-T, המסלולים בין כל זוגות הקדקודים שנותרו יישארו כפי שהיו, כלומר שאר הקודקודים ישארו מקושרים אחד לשני וכך גם בכל גרף שמכיל את $T\setminus\{v\}$ זה ובפרט בגרף $G' = G\setminus\{v\}$.

שאלה 2:

נתון שבעץ מסוים T , ישנם שני מסלולים ארוכים ביותר בעלי אורך שווה, נסמנם P_1, P_2 . צריך להוכיח שהמסלולים P_1, P_2 אינם זרים בקדקודים, כלומר, יש להם קדקוד משותף אחד לפחות.

פתרון:

נניח בשלילה כי המסלולים אינם חולקים קדקוד משותף.

נתבונן בזוג קדקודים, האחד מ- P_1 והשני מ-P_2, בעלי מרחק מינימלי, v_1 ו-v_2, בהתאמה. מהמינימליות, המסלול המחבר ביניהם אינו חולק קודקוד משותף עם P_1 או עם P_2.

נסמן ב- B את תת המסלול הארוך של P_1 מבין השניים המתחילים בקצה של המסלול ומסתיימים ב-v_1 (במקרה של אורכים שווים, נבחר אחד מהם שרירותית). באופן דומה, נסמן ב- C את תת המסלול הארוך של P_2 מבין השניים המתחילים בקצה של המסלול ומסתיים ב-v_2 , וכן ב-D את המסלול בין v_1 ל- v_2.

נקבל כי שרשור המסלולים,BDC , הוא מסלול פשוט ארוך יותר מכ"א מהמסלולים P_1 ו- P_2 כיוון שמכיל שני חלקים מכ"א מהם שאורכם לפחות חצי, וכן לפחות צלע נוספת של D , בסתירה לכך ש- P_1, P_2 הינם המסלולים הארוכים ביותר בעץ, מש"ל.

<u>שאלה 3</u>:

יהי $T=(V,E)$ עץ כך ש- $|V|=n$,

א. הוכיחו שעבור כל זוג קדקודים $u,v\in V$ כך ש- $\{u,v\}\notin E$, מתקיים כי בגרף $G=(V,E\cup\{u,v\})$ יש מעגל פשוט יחיד.

ב. הוכיחו שלכל צלע $\{u,v\}\in E$, בגרף$G=(V,E\backslash\{\{u,v\}\})$ יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

<u>פתרון:</u>

א. נבחין תחילה שלא קיים בגרף המתקבל מעגל שאינו פשוט כיוון שאז גם לאחר הסרת $\{u,v\}$ הגרף T מכיל מעגל ואיננו עץ בסתירה לנתון בשאלה. מקשירות העץ נובע שקיים בעץ מסלול בין u ו- v. כעת, לאחר הוספת הצלע נוצר מעגל פשוט, נסמן אותו C_1. אם קיים בגרף G מעגל פשוט נוסף, C_2 , $\{u,v\}$ חייבת להשתתף בו, כיוון שבעץ המקורי T אין מעגלים. מכאן שב-T יש לפחות שני מסלולים בין u ו v, כלומר ישנו מעגל, בסתירה להיותו עץ.

ב. הצלע $\{u,v\}$ הינה המסלול הפשוט היחיד בין u ו- v בעץ. אם היה עוד אחד, T היה מכיל מעגל, בסתירה להיותו עץ. לכן כשמסירים אותה, ב- G לפחות שני רכיבי קשירות. נבחין שלא יתכן שיש ב- G יותר משני רכיבי קשירות כיוון שבהוספת $\{u,v\}$ ניתן לחבר לכל היותר שני רכיבים (הרכיב של u והרכיב של v) אולם G בתוספת בצלע $\{u,v\}$ זהו העץ T שהינו קשיר.

<u>שאלה 4:</u>

יהיו $T_2=(V,E_2)$, $T_1=(V,E_1)$ עצים מעל קבוצת קדקודים V. צריך להוכיח כי לכל צלע $e_1\in E_1$ קיימת צלע $e_2\in E_2$ כך שהגרפים- $G_1=(V,(E_1\backslash\{e_1\})\cup\{e_2\})$ וכן $G_2=(V,(E_2\backslash\{e_2\})\cup\{e_1\})$ הינם עצים.

<u>פתרון:</u>

תהי $e_1\in E_1$

מקרה 1- $e_1\in E_2$:

במקרה זה ברור כי אם נבחר $e_2=e_1$ אזי $G_1=(V,(E_1\backslash\{e_1\})\cup\{e_1\})$

וכן$G_2=(V,(E_2\backslash\{e_1\})\cup\{e_1\})$ הינם עצים.

מקרה 2 - $e_1\notin E_2$:

נסמן $e_1=(u,v)$, בגרף $G'=(V,E_1\backslash\{e_1\})$ יש בדיוק שני רכיבי קשירות, נסמנם $C_u,\ C_v$.

ב- T_2 יש מסלול פשוט בין v ל u שאינו מכיל את e_1, נסמנו ב- P.

כיוון ש- P מתחיל בקדקוד מ C_v ומסתיים בקדקוד מ- C_u, יש בו צלע e_2 המחברת בין C_v ל- C_u.

נבחין ש- $e_2\notin E_1\backslash\{e_1\}$, כיוון שב- G' אין צלע בין שני רכיבי הקשירות C_u,C_v .

לכן נקבל ש $G_1=(V,(E_1\backslash\{e_1\})\cup\{e_2\})$ קשיר בעל $n-1$ צלעות ולכן עץ, כנדרש.

ב- $G''=(V,E_2\cup\{e_1\})$ יש מעגל פשוט יחיד המכיל את הצלעות e_2 וe_1 (זה המורכב מהמסלול היחיד ב- T_2 בין v ו u שמכיל את הצלע e_2 בתוספת הצלע $e_1=(u,v)$.

לכן ב- $G_2=(V,(E_2\backslash\{e_2\})\cup\{e_1\})$ יש $n-1$ צלעות ולא נותרו מעגלים, כלומר, G_2 הינו עץ כנדרש.

<u>שאלה 5:</u>

נתון גרף $G=(V,E)$ קשיר כך ש - $|V|>1$ ועבור כל צלע $e\in E$ הגרף $G'=(V,E\backslash\{e\})$ הוא עץ. יש להוכיח שכל קדקוד ב - G הוא בעל דרגה 2 (כלומר G מעגל).

<u>פתרון:</u>

ראשית נבחין כי לכל קודקוד ב- G דרגה 2 לפחות. אחרת, ישנו קודקוד עבורו צלע יחידה החלה בו וע"י השמטתה נקבל גרף לא קשיר. נראה כי לכל קדקוד דרגה 2 בדיוק.

יהי $v\in V$ ותהי $e=\{u,v\}$ צלע ב $-G$. מהנתון, אם נשמיט את e מG - נקבל עץ. בעץ לפחות שני עלים, ודרגת כל עלה היא 1. דרגת כל קדקוד ב-G היא לפחות 2 והסרת הצלע הפחיתה רק מדרגות u,v, לכן $u-v$ ו הם עלים בעץ G' , כלומר דרגתם המקורית הייתה בדיוק 2.

<u>גרפים דו-חלקיים (דו-צדדיים):</u>

<u>הגדרות:</u>

- גרף לא מכוון G נקרא **רגולרי** אם לכל הקדקודים בו יש את אותה הדרגה. אם לכל הקדקודים דרגה d, הגרף נקרא **d-רגולרי**.
- גרף $G=(V,E)$ ייקרא **דו-חלקי** אם ניתן לחלק אתV לשתי קבוצות זרות $V=V_1 \uplus V_2$, כך שכל צלע בגרף היא בין קדקוד מ – V_1 לקדקוד מ – V_2, כלומר $E \subseteq V_1 \times V_2$

<u>משפט</u>: גרף הוא דו-חלקי אם ורק אם כל המעגלים שלו הם באורך זוגי.

<u>שאלה 6:</u>

הגדרה: גרף הקובייה Q_n הוא הגרף שקדקודיו הם כל הסדרות הבינאריות באורך n, ובין שני קדקודים יש צלע אם ורק אם הסדרות הבינאריות שהם מייצגים נבדלות בביט יחיד.

צ"ל שגרף הקובייה Q_n דו-חלקי.

<u>פתרון 1:</u>

נגדיר:

L = כל הקדקודים המייצגים סדרה עם מספר זוגי של אפסים.

R = כל הקדקודים המייצגים סדרה עם מספר אי-זוגי של אפסים.

כל קדקוד מייצג סדרה בינארית עם מספר זוגי או אי זוגי של אפסים, לכן $L \cup R = V(Q_n)$, וכן $L \cap R = \emptyset$.

נראה שאין צלעות בגרף בין שני קדקודים ב- L או בין שני קדקודים ב- R.

יהיו $u,v \in V(Q_n)$. אם $\{u,v\} \in E(Q_n)$, אז הסדרות המיוצגות ע"י u,v נפרדות בביט אחד בדיוק. לכן באחת הסדרות בהכרח מס' אי זוגי של אפסים ובשנייה מס' זוגי, ולכן אחד הקדקודים נמצא ב – R, והשני ב - L.

<u>פתרון 2:</u>

נראה כי כל המעגלים בגרף הקובייה הם באורך זוגי.

<u>טענה</u>: זוג קדקודים u,v בגרף הקובייה מחוברים במסלול באורך זוגי אם"ם v ו u נבדלים במספר זוגי של ביטים.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על אורך המסלול m.

בסיס: $m=1$, כלומר המסלול הינו צלע (u,v) . מהגדרת גרף הקובייה v ו u נבדלים בביט אחד, כלומר מספר אי-זוגי של ביטים.

נניח שהטענה נכונה עבור מסלולים באורך $m-1$.

נתבונן במסלול באורך m מ- v ל- u, $(v=v_0,\dots,v_m=u)$. המסלול בין v_0 לv_{m-1} הוא באורך $m-1$.

נניח כי $m-1$ זוגי, אזי מהנחת האינדוקציה v_0 וv_{m-1} נבדלים במספר זוגי k של ביטים. v_m נבדל מ-v_{m-1} בביט אחד ולכן נבדל מ-v_0 ב- $k+1$ או $k-1$ ביטים, כלומר במספר אי-זוגי של ביטים. היות ו- $m-1$ זוגי, הרי ש- m אי זוגי, כנדרש. המקרה השני בו $m-1$ אי זוגי דומה.

כעת, נראה כי כל המעגלים בגרף הקובייה הם באורך זוגי.

יהא מעגל $(v_0,\dots,v_m)$ בגרף, אזי זהו מסלול מהקדקוד v_0 לעצמו. מכיוון שכל קדקוד נבדל מעצמו ב-0 ביטים הרי שאורך מסלול ממנו לעצמו, ע"פ הטענה, הינו זוגי. מכאן שגרף הקובייה הוא דו-חלקי.

<u>שאלה 7:</u>

גרף דו-חלקי מלא $G = (V_1 \uplus V_2, E)$ הינו גרף דו-חלקי שבו ישנה צלע בין כל אחד מקדקודי V_1 לכל אחד מקדקודי V_2, $(E = V_1 \times V_2)$ ונהוג לסמנו - $K_{m,l}$ כאשר $|V_1| = m$, $|V_2| = l$.

א. הראו שלכל $l > 0$, $K_{1,l}$ הינו עץ.

ב. הראו שלכל $m, l \geq 2$, $K_{m,l}$ אינו עץ.

<u>פתרון:</u>

א. $K_{1,l}$ הינו גרף דו חלקי מלא כך שבצד אחד נמצא קדקוד יחיד, נסמנו ב-x, ובצד שני כל היתר, נסמנם ב – Y. צלעות הגרף הן $\{x, y\}$, לכל $y \in Y$. ישנם $n = |Y| + 1$ קודקודים ו-$|Y| = n - 1$ צלעות וכן, בין כל שני קדקודים ישנו מסלול העובר דרך x ולכן הגרף קשיר. מכאן שזהו עץ.

ב. נסמן את שני קדקודים שבצד האחד ב - $\{x_1,\ x_2\}$, ושני קודקודים בצד השני ב - $\{y_1,\ y_2\}$ (ניתן לביצוע כי $m, l \geq 2$). הגרף מכיל את המעגל $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_1)$, ולכן אינו עץ.

<u>שאלה 8:</u>

נתון גרף דו-חלקי, קשיר ו – r-רגולרי $G = (V, E)$. הוכיחו שעבור כל קודקוד $v \in V$, $G' = G \backslash \{v\}$ גרף קשיר.

<u>פתרון:</u>

G גרף דו-חלקי, נסמן ב- $V = A \uplus B$ את צדדי הגרף. כעת נבחין כי אם $|V| = 2$ הטענה טריוויאלית. אם $|V| > 2$ אז $r > 1$ כי G קשיר. נבחר $v \in V$ כלשהו, $G \backslash \{v\}$ נניח בה"כ כי $v \in A$ ונתבונן בגרף $G' = G \backslash \{v\}$.
נניח בשלילה כי G' אינו קשיר. כלומר, ישנם 2 שכנים של v ב-G, x, y שנמצאים כעת ברכיבים שונים.
יהא G_1 רכיב קשירות של G' שמכיל את x. נסמן ב-$k < r$ את מספר השכנים של v ברכיב ואת צדדי G_1 ב A_1 – וב B_1 –. דרגת כל קודקוד ב– A_1 היא r וב–B_1 דרגת k שכניו של v היא $r - 1$ ודרגת שאר הקדקודים היא r.
מכיוון ש-G_1 דו-חלקי מתקיים $\sum_{v \in A_1} d(v) = \sum_{v \in B_1} d(v)$. לכן,
$k \cdot (r-1) + (|B_1| - k) \cdot r = |A_1| \cdot r$,
ז"א $k \cdot (r-1) = r(|A_1| - |B_1| + k)$.
השוויון הנ"ל מתקיים אם שני האגפים שווים 0, או ש- r מחלק את $k \cdot (r-1)$.
לא ייתכן כי אגף שמאל שווה ל-0 כי $k > 0$ (x שכן של v ברכיב G_1) ו- $r - 1 > 0$ ולכן r מחלק את $k \cdot (r-1)$. $r, r-1$ זרים, לכן r מחלק את k, אך $k < r$, סתירה.
אם כן, G' קשיר.

<u>שאלה 9:</u>

מהו מספר הגרפים הדו-חלקיים עם קבוצות הקדקודים A, B , $|A| = |B| = 3$ שאינם מכילים רכיב קשירות בעל צלע בודדת?

<u>פתרון:</u>

נחשב בעזרת הבעיה המשלימה ונשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה.
עבור גרף דו-חלקי עם שתי קבוצות קדקודים בגודל 3 ישנן 9 צלעות אפשריות, כשכל אחת יכולה להופיע או להעדר. לכן, סה"כ ישנם 2^9 גרפים אפשריים.
לכל צלע אפשרית e_i , $1 \leq i \leq 9$ נסמן ב- E_i, את קבוצת הגרפים בהם הצלע e_i שייכת לרכיב קשירות בעל צלע בודדת. לכל $1 \leq i \leq 9$, $|E_i| = 2^4$: כמספר האפשרויות ליתר הצלעות בגרף.
לכל $1 \leq i < j \leq 9$, אם לצלעות e_i ו-e_j נקודת קצה משותפת אז $|E_i \cap E_j| = 0$.
אחרת, $|E_i \cap E_j| = 2$: כמספר האפשרויות להמצאות/היעדרות הצלע הנותרת. מספר הזוגות ללא נקודת קצה משותפת הוא $\binom{3}{2} \cdot 3 \cdot 2$: מספר האפשרויות לבחירת נקודות הקצה מ-A והתאמת נקודת קצה מ-B לכל אחת מהן.
מספר השלשות של צלעות e_i, e_j, e_k הזרות בזוגות הוא כמספר התמורות: $3!$. ומתקיים $|E_i \cap E_j \cap E_k| = 1$.
לכן, מספר הגרפים האפשריים הוא: $2^9 - 9 \cdot 2^4 + \binom{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3!$