תרגול 7

תורת הגרפים – מבוא

מושגים:

- תהי V קבוצה סופית לא ריקה, ותהי $E \subseteq V \times V$ קבוצה של זוגות איברים שונים מתוך V.
הזוג $G = (V, E)$ נקרא <u>גרף לא-מכוון</u>, אם E קבוצה של זוגות לא סדורים. (אין חשיבות מי מופיע ראשון)
הזוג $G = (V, E)$ נקרא <u>גרף מכוון</u>, אם E קבוצה של זוגות סדורים. (יש חשיבות מי מופיע ראשון)
איברי הקבוצה V נקראים <u>קודקודים</u> או <u>צמתים</u>.
איברי הקבוצה E נקראים <u>צלעות</u> או <u>קשתות</u>.

<u>הערה</u>: במהלך הקורס, אלא אם כן מצוין אחרת, במושג גרף נתכוון לגרף לא-מכוון.

- יהי $G = (V, E)$ גרף לא-מכוון. <u>הדרגה</u> של קודקוד $v \in V$ היא מספר הצלעות החלות ב – v, כלומר:
$|\{u \in V : (v, u) \in E\}|$ והיא תסומן ע"י $deg(v)$ או $d(v)$.
- יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון.
<u>דרגת הכניסה</u> של $v \in V$ היא מספר הצלעות הנכנסות אל v, $|\{u \in V : (u, v) \in E\}|$.
<u>דרגת היציאה</u> של $v \in V$ היא מספר הצלעות היוצאות מ- v, $|\{u \in V : (v, u) \in E\}|$

<u>משפט הדרגות</u>: בגרף לא מכוון $G = (V, E)$, מתקיים $\sum_{v \in V} deg\,(v) = 2|E|$. בפרט נשים לב שממשפט זה נובע כי סכום הדרגות בגרף חייב להיות <u>זוגי</u>

- יהי $G = (V, E)$ גרף לא-מכוון. סדרה של קודקודים $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ כאשר $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ לכל $1 \leq i \leq p - 1$ נקראת <u>טיול</u>. אם הצלעות $\{v_i, v_{i+1}\}$ כולן שונות זו מזו, נאמר שזהו <u>מסלול</u> (או <u>מסילה</u>). אם כל הקודקודים לאורך המסלול שונים זה מזה אז המסלול <u>פשוט</u>.
אם במסלול $v_0 = v_p$ וגם $p \geq 1$ אזי המסלול נקרא <u>מעגל</u>.
אורך המסלול $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ שווה ל - p, כלומר למספר הצלעות שלאורכו.
יהיו $u, v \in V$ שני קודקודים. <u>המרחק</u> בין u ל– v מוגדר כאורך המזערי (הקצר ביותר) של המסלול ביניהם, ומסומן ע"י $d(u, v)$. אם אין מסלול בין u ל– v אז מגדירים $d(u, v) = \infty$.
- גרף לא-מכוון נקרא <u>קשיר</u> אם קיים מסלול בין כל זוג קודקודים. גרף מכוון נקרא <u>קשיר היטב</u> (או <u>קשיר חזק</u>) אם לכל שני קודקודים $a, b \in V$ יש מסלול מ – a ל – b וגם מסלול מ – b ל – a.
- יהי $G = (V, E)$ גרף לא-מכוון. נגדיר יחס שקילות E על V ע"י uEv אם"ם יש מסלול בגרף בין u ו – v (<u>תרגיל</u>: יש לוודא שזהו אכן יחס שקילות). כל מחלקת שקילות תחת היחס נקראת <u>רכיב קשירות</u>.

<u>היכרות עם גרפים ומשפט הדרגות:</u>

<u>תרגיל 1</u>

הוכיחו כי בכל גרף לא-מכוון יש שני קודקודים עם אותה הדרגה.

<u>פתרון:</u>

נבנה תאים שמגדירים את הדרגה של כל קודקוד. דרגה אפשרית לכל קודקוד הוא בין 0 ל – $n-1$:

$n-1$	....	1	0

נבחין בין שתי אפשרויות:

1) ישנו קדקוד עם $n-1$ שכנים. אזי הוא שכן של כולם, ולכן אין קודקוד עם דרגה 0. לכן אנו למעשה מחלקים n הקדקודים בין $n-1$ תאים ועפ"י עקרון שובך היונים יהיו שני קדקודים באותו התא, כלומר שני קדקודים עם אותה דרגה.
2) אין קדקוד עם דרגה $n-1$. שוב אנו מחלקים n קדקודים בין $n-1$ תאים ועפ"י עקרון שובך היונים יהיו שני קדקודים באותו התא, כלומר עם אותה דרגה.

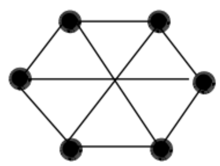
<u>תרגיל 2</u>

האם קיים גרף בעל סדרת הדרגות הבאה:

א. 3,3,3,3,3,3
ב. 3,3,3,3,3
ג. 1,1,2,3,4,5

<u>פתרון:</u>

א. כן, למשל:



ב. לא ייתכן גרף כדרוש בסעיף זה, וזאת כי סכום דרגות הקדקודים הוא אי-זוגי, בסתירה למשפט הדרגות.
ג. לא. הקדקוד מדרגה 5 צריך להיות שכן של כל הקודקודים האחרים, אבל אז לקודקוד מדרגה 4 אין מספיק שכנים (שני הקודקודים בעלי הדרגה 1 כבר נתפסו, ונותרו רק שני קדקודים עם דרגות "פנויות").

<u>תרגיל 3</u>

נסמן ב – $\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית בגרף G: $\Delta(G) = max\{deg(v): v \in V\}$

וב – $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית : $\delta(G) = min\{deg(v): v \in V\}$

הוכיחו כי $\Delta(G) \geq 2 \cdot \frac{|E|}{|V|} \geq \delta(G)$.

<u>פתרון:</u>

ממשפט הדרגות מתקיים $\frac{\sum_{v \in V} deg(v)}{|V|} = 2 \cdot \frac{|E|}{|V|}$. בנוסף, סכום הדרגות חלקי מספר הקדקודים הוא הדרגה הממוצעת בגרף. דרגה ממוצעת בהכרח קטנה או שווה מדרגה מקסימלית וגדולה או שווה מדרגה מינימלית .

<u>דרך נוספת:</u> נשים לב ש - $|V| \cdot \Delta(G) \geq \sum_{v \in V} deg\ (v) \geq |V| \cdot \delta(G)$. ניתן להשתמש במשפט הדרגות ולחלק ב - V |, ונקבל את הדרוש.

<u>תרגיל 4</u>

האם ייתכן שבגרף $G=(V,E)$ בו דרגת כל קדקוד היא 3, יהיו 100 צלעות?

<u>פתרון:</u>

לא. מכיוון שצריך להתקיים $3|V|=2|E|=200$, אך זה לא ייתכן מכיוון ש – 3 לא מחלק את 200 ומספר הוקדקודים בגרף חייב להיות מספר שלם.

<u>קשירות, גרפים משלימים וקוטר:</u>

<u>תרגיל 5</u>

במדינה מסוימת יש n ערים וחברת תעופה אחת. נתון כי מעיר הבירה יוצאים 21 קווי תעופה, מעיר נתונה נוספת L יוצא קו תעופה יחיד ומכל עיר אחרת יוצאים 20 קווי תעופה. הוכיחו כי ניתן להגיע מעיר הבירה לעיר L ע"י טיסות.

<u>נמיר את הבעיה שלפנינו לגרף ונוכיח את הטענה הכללית:</u> אם בגרף יש בדיוק שני קדקודים עם דרגה אי-זוגית, אז יש מסלול ביניהם.

<u>פתרון:</u>

נחלק את כלל הקודקודים בגרף לרכיבי קשירות זרים. נשים לב שניתן להסתכל על כל רכיב קשירות כגרף נפרד ולכן ממשפט הדרגות סכום הדרגות בכל רכיב קשירות צריך להיות זוגי. כיוון שדרגת כלל הקודקודים זוגית מלבד 2 הקודקודים המייצגים את עיר הבירה ועיר L, שני קודקודים אלה צריכים להיות באותו רכיב קשירות ומכאן שיש מסלול בינהם.

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף. <u>הגרף המשלים</u> של G הוא הגרף $\overline{G}=\left(V,\overline{E}\right)$, כאשר קבוצת הקודקודים של $\overline{G}$ זהה לזו של G, ואילו שני קודקודים u,v יהיו שכנים ב - $\overline{G}$ אמ"מ אינם שכנים ב – G: $\overline{E}=\{V\times V\setminus E\}$

<u>תרגיל 6:</u>

יהי גרף $G=(V,E)$ כלשהו. הוכיחו כי אם G לא קשיר אז $\overline{G}$ קשיר.

<u>פתרון:</u>

G אינו קשיר ולכן מכיל לפחות 2 רכיבי קשירות זרים. נבחר אחד מרכיבי הקשירות ונסמן את קודקודיו $v_1,v_2,\dots,v_k$. כעת מהגדרת $\overline{G}$ לכל $v\in V$ שאינו ברכיב קשירות זה $<v,v_1>,\dots,<v,v_k>\in\overline{E}$ ולכן בפרט ב$\overline{G}$ מתקיים כי $v_1,v_2,\dots,v_k$ מקושרים אחד לשני וכן מקושרים לכל $v\in V$ שאינו ברכיב קשירות אינם.

<u>תרגיל 7:</u>

נניח כי $G=(V,E)$ גרף המקיים $|V|=n$ ו - $|E|>\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. הוכיחו כי G קשיר.

<u>פתרון 1:</u>

נניח בשלילה כי G אינו קשיר, מטענה קודמת זה גורר את קשירות $\overline{G}$. כעת, אם

$|E|>\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ אזי $\left|\overline{E}\right|<\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{2(n-1)}{2}=n-1$

(המספר המקסימלי האפשרי של צלעות בגרף על n קדקודים הוא $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$).

כפי שנלמד בהרצאה, גרף קשיר מינימלי על n קדקודים מכיל $n-1$ צלעות. מכאן שלא ייתכן כי $\overline{G}$ קשיר וכן מכיל פחות מ- $n-1$ צלעות, סתירה. לכן בהכרח G קשיר.

<u>פתרון 2</u>:

נניח בשלילה כי G אינו קשיר, אז ל $G -$ לפחות שני רכיבי קשירות.

נסמן ב $G_1 = (V_1, E_1)$ את תת הגרף שמהווה את אחד מרכיבי הקשירות,

וב- $G_2 = (V_2 = V \backslash V_1, E_2 = E \backslash E_1)$ את תת הגרף המכיל את יתר הקדקודים והצלעות שביניהם.

נסמן $|V_1| = k$, $1 \leq k \leq n-1$. לכן $|V_2| = n-k$. מכאן ש - $|E_1| \leq \binom{k}{2}$ וגם $|E_2| \leq \binom{n-k}{2}$, ולכן

$$|E| = |E_1| + |E_2| \leq \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{k^2-k+n^2-nk-nk+k^2-n+k}{2} =$$

$$k^2 - nk + \frac{n^2-n}{2}$$

זוהי פונקציה פולינומית ריבועית עם משתנה k המקבלת ערך מקסימאלי בקצוות התחום,

כלומר ב – $k = 1$ ו – $k = n-1$.

לכן מתקיים $|E| \leq \max_{1 \leq k \leq n-1} \left\{ \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} \right\} = \binom{n-1}{2}$, ולכן

$|E| \leq \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, בסתירה לנתון.

<u>תרגיל 8</u>:

יהי G גרף, ונסמן ב – $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית בגרף.

נניח כי $\delta(G) > 1$.

א. הוכיחו כי יש ב – G מסלול פשוט באורך $\delta(G)$ לפחות.

ב. הוכיחו כי יש ב – G מעגל פשוט באורך $\delta(G)+1$ לפחות.

<u>פתרון</u>:

א. יהי $u_0, u_1, \ldots, u_k$ מסלול פשוט ארוך ביותר ב – G. נניח בשלילה כי $k < \delta(G)$, אזי יש שכן v של u_k שאינו במסלול. מכאן ש $u_0, u_1, \ldots, u_k, v$ מסלול פשוט ארוך יותר, בסתירה למקסימליות המסלול המקורי. לכן, $k \geq \delta(G)$ כנדרש.

ב. בדומה לסעיף א', יהי $u_0, u_1, \ldots, u_k$מסלול פשוט ארוך ביותר ב - G. נסמן ב $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}$את שכניו של u_kבמסלול כאשר $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k$. מכיוון שזהו מסלול ארוך ביותר, בהכרח כל שכניו ש u_kנמצאים במסלול (אחרת נקבל סתירה למקסימליות המסלול), כלומר $r \geq \delta(G)$. לכן

$u_{i1}, u_{i1+1}, u_{i1+2}, \ldots, u_k$ הינו תת מסלול של המסלול המקורי באורך לפחות $r \geq \delta(G)$ ומכאן נקבל ש

$u_k, u_{i1}, u_{i1+1}, u_{i1+2}, \ldots, u_k$ הינו מעגל פשוט בגרף באורך לפחות $r+1 \geq \delta(G)+1$.

הגדרה: קוטר הוא המרחק המקסימלי בגרף בין זוג קודקודים כלשהם.

תרגיל 9:

יהי G גרף לא מכוון עם n קדקודים, שבו דרגת כל קדקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. הוכיחו כי G קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2 (לכל 2 קודקודים בגרף, או שהם מחוברים בצלע, או שקיים קודקוד בגרף ששניהם מחוברים אליו).

פתרון 1:

נניח בשלילה כי קוטר הגרף הוא 3 או יותר, ויהיו u, v קודקודים שהמרחק בניהם הוא לפחות 3.

נסמן את שכני u ב – $N(u)$ ואת שכני v ב – $N(v)$. נשים לב כי $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, כי אחרת המרחק בין u ל – v היה לכל היותר 2. מהנתון בשאלה $|N(u)| \geq \frac{n-1}{2}$ וכן $|N(v)| \geq \frac{n-1}{2}$, לכן

$n + 1 = 2 \cdot \frac{n-1}{2} + 2 \leq |N(u)| + |N(v)| + |\{u, v\}| \leq |V|$. סתירה לכך ש- $|V| = n$.

פתרון 2: עקרון שובך היונים.

נראה כי המרחק בין כל שני קדקודים הוא לכל היותר 2.

נתבונן בשני קדקודים כלשהם בגרף, u, v. אם יש בניהם צלע, סיימנו.

אחרת, נתייחס לצלעות הגרף שחלות ב- u או v כיונים, ולשאר קדקודי הגרף, מלבד u, v, כשבכים.

יונה תוכנס לשובך המיוצג ע"י נקודת הקצה השנייה של הצלע, שאינה u או v.

ישנן לפחות $\frac{n-1}{2} \cdot 2 = n - 1$ יונים ו- $n - 2$ שבכים ולכן קיים שובך אליו הוכנסו לפחות שתי יונים.

מכאן, יש מסלול באורך 2 בין u ל-v, העובר דרך הקודקוד המיוצג על ידי אותו השובך, כנדרש.