<u>תרגול 4 – משולש פסקל, מקדמים מולטינומים ומספרי קטלן</u>

מקדם בינומי: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$.

הבינום של ניוטון: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot a^i\cdot b^{n-i}$.

נוסחת פסקל: $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$.

1) מהו $\sum_{k=2}^{30}\binom{30}{k}\cdot 5^k$?

<u>פתרון:</u>

$$\sum_{k=2}^{30}\binom{30}{k}\cdot 5^k = \sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}\cdot 5^k - \binom{30}{1}5^1 - \binom{30}{0}5^0 =$$

$$\sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}\cdot 5^k\cdot 1^{30-k} - 30\cdot 5 - 1\cdot 1 = (5+1)^{30} - 150 - 1 = 6^{30} - 151$$

משולש פסקל

2) הראו שאם מתחילים מהאיבר - $\binom{0}{0}$ במשולש פסקל, ובכל שלב ניתן לרדת ימינה או שמאלה, מספר הדרכים השונות להגיע ל- $\binom{n}{k}$ עבור $0\le k\le n$ הוא $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}$$

<u>פתרון:</u> הוכחה באינדוקציה על n $(0\le k\le n)$.

בסיס: n=0 - אז מתחייב ש - k=0, ומספר הדרכים להגיע מ - $\binom{0}{0}$ ל - $\binom{0}{0}$ היא 1.

נניח נכונות עבור n-1 ונוכיח עבור n.

צעד: ראשית נבחין כי ישנה דרך יחידה להגיע לאיברים $\binom{n}{0}$ ו-$\binom{n}{n}$ שהיא ללכת על שוקי המשולש ואכן $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$. על מנת להגיע ל - $\binom{n}{k}$ עבור $0<k<n$, הצעד האחרון בסדרת הצעדים הוא ימינה מ - $\binom{n-1}{k-1}$ או שמאלה מ - $\binom{n-1}{k}$. מהנחת האינדוקציה, מספר הדרכים להגיע ל - $\binom{n-1}{k-1}$ הוא $\binom{n-1}{k-1}$ ומספר הדרכים להגיע ל - $\binom{n-1}{k}$ הוא $\binom{n-1}{k}$.

לכן סך כל מספר הדרכים להגיע ל - $\binom{n}{k}$ היא $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

מזהות פסקל $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$. מש"ל.

3) הוכיחו את הזהות $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i}{i}=\binom{2n}{n-1}$ בעזרת זהות פסקל.
ויזואלית: האיברים הנסכמים באגף שמאל הם איברי אלכסון במשולש פסקל שפינתו העליונה השמאלית בשוק המשולש ופינתו התחתונה הימנית באמצע השורה ה- $2n-1$. האיבר באגף ימין נמצא בשורה מתחת ומשמאל לאיבר האלכסון התחתון.

פתרון:
מזהות פסקל $\binom{2n}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n-2}$, וכן $\binom{2n-1}{n-2}=\binom{2n-2}{n-2}+\binom{2n-2}{n-3}$.
נציב ונקבל: $\binom{2n}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-2}{n-2}+\binom{2n-2}{n-3}$
באותו אופן ניתן להמשיך: $\binom{2n-2}{n-3}=\binom{2n-3}{n-3}+\binom{2n-3}{n-4}$, וכך הלאה,
ובאופן כללי: $\binom{2n-i}{n-i-1}=\binom{2n-i-1}{n-i-1}+\binom{2n-i-1}{n-i-2}$ לכל 0≤i≤(n-2).
ע"י הצבת כל הביטויים האלה נקבל:
$\binom{2n}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-2}{n-2}+\binom{2n-3}{n-3}+\cdots+\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{0}$.
לבסוף נציב את השוויון: $\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}$ ונקבל את הזהות.
הערה- הנוסחה הזאת הינה מקרה פרטי של הזהות הקומבינטורית ב' מתרגיל 3 בתרגול 3.

4) א. יש למצוא את מספר הפתרונות במספרים שלמים למשוואה $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$, כאשר:
1) $n_i\geq 0$ לכל i.
2) $n_i>0$ לכל i.
ב. נגדיר את S_r להיות אוסף הפתרונות לסעיף א'.1 עבור $1\leq r\leq n$. חשבו את $\sum_{r=1}^{n}|S_r|$.

פתרון:
א. 1) כמו שראינו בשיעור, מספר הפתרונות למשוואה הינו: $\binom{n+r-1}{r-1}$.
2) נגדיר עבור כל n_i משתנה מתאים: $y_i+1=n_i$.
כעת אנו נדרשים לפתור את המשוואה $\sum_{i=1}^{r}(y_i+1)=n$, כלומר: $\sum_{i=1}^{r}y_i=n-r$
תחת האילוץ $y_i\geq 0$.
באופן דומה לסעיף א', מספר הפתרונות למשוואה זו: $\binom{n-1}{r-1}=\binom{(n-r)+r-1}{r-1}$.
ב. עלינו לפתור עבור כל r אפשרי ולסכום. עבור r מסוים, כפי שראינו בסעיף א' יש $\binom{n+r-1}{r-1}$ פתרונות אפשריים. נסכום עבור כל r: $\sum_{r=1}^{n}\binom{n+r-1}{r-1}$. זהו בעצם סכום אלכסון במשולש פסקל:
$$\sum_{r=1}^{n}\binom{n+r-1}{r-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i}{i}=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{2n-1}{n-1}$$
סכום השווה ל - $\binom{2n}{n-1}$, לפי שאלה 3.

מקדמים מולטינומיים

נוסחת המולטינום: נתונים n_1 איברים מסוג 1, n_2 איברים מסוג 2, ... , n_k איברים מסוג k.
אזי מספר הסידורים שלהם בשורה הוא $\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}=\binom{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.

משפט המולטינום:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots n_k=n}\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}\cdot {x_1}^{n_1}\cdot {x_2}^{n_2}\cdots {x_k}^{n_k}$$

5) נתונים 5 כדורים כחולים, 7 כדורים אדומים, ו - 20 כדורים שחורים.
בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה? פתרו תחילה ללא שימוש בנוסחת המולטינום.

<u>פתרון:</u>
נשים לב שיש 5+7+20=32 מקומות בשורה.
נבחר מבין 32 המקומות, מקומות לכדורים השחורים: $\binom{32}{20}$.
נבחר מבין 12 המקומות הנותרים, מקומות לכדורים האדומים: $\binom{12}{7}$.
במקומות הנותרים נמקם את הכדורים הכחולים.
סה"כ ישנן $\binom{32}{20,7,5}=\frac{32!}{20!7!5!}=\frac{32!}{20!12!}\cdot\frac{12!}{7!5!}=\binom{32}{20}\cdot\binom{12}{7}$ אפשרויות.

6) כמה מילים ניתן להרכיב ע"י שינוי סדר האותיות במילים הבאות (כולל המילה המקורית)?
א. המילה Mississippi.
ב. המילה "מיסיסיפי".
ג. המילים מסעיפים א' ו-ב' כאשר לא מרשים שתי i ברצף (באנגלית) או שתי י' ברצף (בעברית).

<u>פתרון:</u>
א. בעצם השאלה היא כמה מילים בנות 11 אותיות ניתן לרשום מהאותיות {m,i,s,p}, כך ש - m מופיעה בדיוק פעם אחת, i מופיעה 4 פעמים, s מופיעה 4 פעמים ו - p פעמיים. נציב בנוסחת המולטינום: $\binom{11}{1,4,4,2}$.
ב. לפי אותו עיקרון נקבל: $\binom{8}{1,4,2,1}$.
ג. אם לא מרשים שתי i ברצף: נסדר תחילה את שאר האותיות: $\binom{7}{1,4,2}$, כעת ניתן להסתכל על כל אות כמחיצה ועל כל רווח בין אותיות סמוכות ובקצוות כתא, ועלינו למקם את 4 ה-i-ים ב - 8 תאים, כך שיש לכל היותר i אחד בתא; כלומר, לבחור 4 תאים מתוך ה-8 ללא חזרות. מספר האפשרויות לכך הוא: $\binom{8}{4}$, ולכן בסה"כ יש $\binom{7}{1,4,2}\cdot\binom{8}{4}$ מילים.
בעברית באותה צורה: $\binom{4}{1,2,1}\cdot\binom{5}{4}$ מילים.

7) מהו המקדם של x^5 בפולינום $(x^5+7x^3+4x^2+1)^3$?

<u>פתרון:</u>
נרשום תחילה את הפולינום כמכפלת הפולינום שבסוגריים בעצמו 3 פעמים, ונחשב את כל האפשרויות השונות:
על מנת לקבל חזקה 5, אפשרות אחת היא לבחור באחד מהפולינומים במכפלה ב- x^5 ובשניים האחרים ב – 1, ומספר האפשרויות לכך הוא $3=\binom{3}{1,2}=\binom{3}{1,0,0,2}$. כל מחובר כזה תורם $1=1\cdot1^2$ למקדם, ובסה"כ: 3.

אפשרות שניה היא לבחור פעם אחת ב - $7x^3$ פעם אחת ב - $4x^2$ ופעם אחת ב - 1, ומספר האפשרויות לכך הוא $6 = \binom{3}{1,1,1} = \binom{3}{0,1,1,1}$. כל מחובר כזה תורם $7 \cdot 4 \cdot 1 = 28$ למקדם, ובסה"כ:
$28 \cdot 6 = 168$.
לכן בסה"כ יהיה המקדם: $3 + 168 = 171$.

מספרי קטלן

<u>הגדרה:</u> סדרת n אפסים ו – n אחדות נקראת מאוזנת, אם בכל רישא שלה מספר האפסים הוא לפחות כמספר האחדות.

<u>משפט:</u> מספר הסדרות המאוזנות שכוללות n אפסים ו - n אחדות הוא $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. זהו מספר קטלן ה – n.

<u>הוכחה גיאומטרית למשפט:</u>

נתבונן בסדרת אפסים ואחדות כסדרת מהלכים סריגיים מהראשית על המישור: כל 0 הוא צעד ימינה, וכל 1 הוא צעד למעלה.
לדוגמא: הסדרה (0,1,1,0,1) היא סדרת המהלכים: ימינה, למעלה, למעלה, ימינה, למעלה.
בתום סדרת מהלכים זו נגיע לנקודה (2,3).
כעת נוכל לתרגם את הבעיה של מניית מספר הסדרות המאוזנות ב-n אפסים ו-n אחדות, לבעיה הבאה:
מהו מספר סדרות המהלכים הסריגיים מהנקודה (0,0) לנקודה (n,n) ברביע הראשון שאינן עוברות בחצי המישור $y > x$, כלומר, אינן חוצות את הישר x=y כלפי מעלה?
נשים לב שמותר מצב בו x=y.
נפשט את ההוכחה ע"י הזזת המהלכים מקום אחד ימינה. כלומר אנו מתבוננים במסלולים הסריגיים היוצאים מהנקודה (1,0) ומסתיימים בנקודה (n+1,n), ושוהים כל הזמן בחצי המישור $y < x$ (כלומר לא נרשה x=y).

כעת נגדיר את הקבוצות הבאות:
S = קבוצת כל סדרות המהלכים הסריגיים מ - (1,0) אל (n+1,n), שאינן נוגעות בישר x=y.
A = קבוצת **כל** סדרות המהלכים הסריגיים מ - (1,0) אל (n+1,n).
B = קבוצת כל סדרות המהלכים הסריגיים מ - (1,0) אל (n+1,n), אשר נוגעות בישר x=y (או חוצות אותו).
ברור שנרצה לחשב את |S|, וכן ש- |S|=|A|-|B|.
בנוסף נגדיר:
C = קבוצת כל סדרות המהלכים הסריגיים מ - (0,1) אל (n+1,n).

נראה כעת <u>התאמה בין סדרות B לסדרות C:</u>
בהינתן b∈B, נמצא את המקום הראשון בו b נוגע בישר x=y (מקום כזה קיים בהכרח מכך ש - b∈B), ונשקף את קטע המסלול עד לנקודה זו ביחס לישר x=y.
התאמה זו מחליפה סדרת מהלכים מ - (1,0) אל (n+1,n), בסדרת מהלכים מ - (0,1) אל (n+1,n), כלומר בסדרת מהלכים מ - C.
נוכל להגדיר את ההתאמה ההפוכה: בהינתן c∈C, נמצא את המקום הראשון שבו c נוגע בישר x=y (קיים כזה כי c חותך את הישר), ונשקף את קטע המסלול עד לנקודה זו ביחס לישר x=y. נקבל סדרת מהלכים מ - (1,0) אל (n+1,n) הנוגעת בישר x=y, ולכן זוהי סדרת מהלכים מ - B.

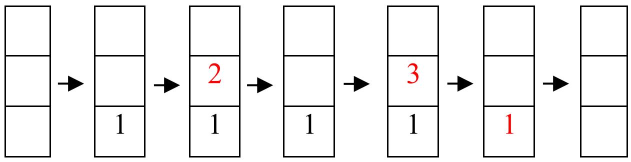
קל לוודא שאלו שתי פונקציות הופכיות, ולכן הינן חח"ע ועל. מכך נובע ש - |B|=|C|.
מספר סדרות המהלכים הסריגיים מנקודה (a,b) לנקודה (c,d) הוא $\binom{c-a+d-b}{c-a}$.
לכן $|A| = \binom{2n}{n}$ וכן $|C| = \binom{2n}{n+1}$.
כיוון ש - |B|=|C| מקבלים ש - $|B| = \binom{2n}{n+1}$, ולכן:

$$|S| = |A| - |B| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

מש"ל.

8) נתונה תכנית מחשב המקבלת כקלט את סדרת המספרים 1,2,3,4…,n בסדר זה.
עבור כל איבר בקלט, מתבצעת בשלב כלשהו בתכנית פעולת push למחסנית וכן פעולת pop מהמחסנית (המתפקדת בצורת LIFO).
סדר פעולות ה-push מתבצע ע"פ סדר קבלת הקלט.
פלט התכנית הוא איברי הקלט בסדר בו נשלפו מהמחסנית ע"י פעולת pop.

לדוגמא, עבור קלט של 1,2,3 סדרת פעולות לגיטימית תהא למשל:
push, push, pop, push, pop, pop



במקרה כזה הפלט הוא: 2,3,1.

כמה סדרות פלט אפשריות עבור קלט של 1,2,3,4…,n ?

<u>פתרון</u>:

כיוון שהדרישה היא ש- pop יבוצע רק לאחר פעולת push, וכיוון שניתן לבצע pop רק לאיבר הנמצא בראש המחסנית, ניתן להתייחס לפעולת push ופעולת pop כזוג סוגריים כאשר push הוא הפותח ו-pop הוא הסוגר. כלומר, סדרת push ו-pop חוקית של התכנית היא סדרה מאוזנת.

נראה כי הפונקציה המתאימה בין סדרות ה- push ו-pop החוקיות לבין סדרות הפלט המתאימות היא חח"ע ועל:

<u>על</u>: מהגדרה, לכל סדרת פלט אפשרית יש סדרת push, pop שיוצרת אותה.
<u>חח"ע</u>: יהיו שתי סדרות פקודות push, pop שונות, נראה כי סדרות הפלט המתאימות הינן שונות. נביט במקום הראשון בו סדרות הפקודות שונות. במקום זה באחת מתבצעת פעולת push ובשנייה – pop. נסמן ב – h את המספר שנמצא בראש המחסנית וב – i את המספר הבא להיכנס. בסדרה שבה בוצע pop, בהכרח h יופיע בסדרת הפלט לפני i, ואילו בסדרה השנייה בהכרח i יופיע לפני h.

אם כן, קיבלנו פונקציה חח"ע ועל בין סדרות ה - push, pop לסדרות הפלט.

לכן, הערך המבוקש הוא מספר סדרות הסוגריים המאוזנות, כלומר מספר קטלן ה-n-י: $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.