תרגול 3 – בעיות מניה בסיסיות

בחירת k מתוך n איברים:

סדר / חזרות	אין חזרות	יש חזרות
יש חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$

תרגיל 1:

בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו – n כדורים צבעוניים בצבעים שונים ל – 2n תאים מובחנים כך שבכל תא:

א) לכל היותר כדור אחד.

ב) לכל היותר כדור לבן אחד.

ג) לכל היותר כדור צבעוני אחד.

ד) מספר שווה של כדורים לבנים וצבעוניים.

פתרון:

א) התנאי מחייב שיהיה כדור אחד בכל תא. נחלק את הכדורים הצבעוניים ל- n תאים ובכל השאר נשים כדורים הלבנים. חלוקת n הצבעוניים ל – 2n התאים כך שלכל היותר כדור אחד בכל תא זו בדיוק בחירת n מתוך 2n תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרות ולכן יש $\frac{(2n)!}{n!}$ דרכים לסידור הכדורים.

ב) אין הגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בתא, לכן זו בחירת n מתוך 2n תאים עם חשיבות לסדר ועם חזרות, כלומר $(2n)^n$. עבור הלבנים יש לבחור בדיוק n מתוך 2n תאים כך שבכל תא יהיה כדור לבן אחד, כלומר $\binom{2n}{n}$ ולכן יש $\binom{2n}{n}\cdot(2n)^n$ דרכים לסידור הכדורים.

ג) חלוקת n הצבעוניים ל – 2n התאים כך שלכל היותר כדור אחד בכל תא זו בדיוק בחירת n מתוך 2n תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרות, כלומר $\frac{(2n)!}{n!}$. עבור הלבנים הסדר של חלוקתם לתאים לא משנה (כי צבעם זהה), ואין מגבלה לגבי חזרות, כלומר $\binom{n+2n-1}{2n-1}$.
לכן יש $\binom{n+2n-1}{2n-1}\cdot\frac{(2n)!}{n!}$ דרכים לסידור הכדורים.

ד) נצמיד לכל כדור צבעוני כדור לבן ונחלק את הצמדים. מכיוון שיש הבדלים בין הצמדים, יש חשיבות לסדר ומכיוון שאין הגבלה על כמות יש חזרות ולכן יש $(2n)^n$ דרכים שונות לסידור הכדורים.

תרגיל 2:

סעיף א': בכמה דרכים ניתן לחלק 300 כדורים זהים ל – 3 תאים מובחנים כך שבכל תא יהיו לא יותר מ – 180 כדורים?

סעיף ב': בכמה דרכים ניתן לחלק 300 כדורים זהים ל – 3 תאים מובחנים כך שבכל תא יהיו לא יותר מ – 120 כדורים?

פתרון:

סעיף א':

ננסה להחסיר מסך כל אפשרויות החלוקה את האפשרויות ה"גרועות":

סך כל האפשרויות: הכדורים זהים ויש חזרות ולכן סך כל הדרכים לחלוקת הכדורים לתאים הוא: $\binom{300+3-1}{3-1}$.

אפשרויות גרועות: מכיוון שיש רק 300 כדורים, הדרך היחידה להפר את התנאי היא ע"י כך שנשים בתא אחד יותר מ – 180 כדורים (אין מספיק בשביל 180 ב- 2 תאים). יש 3 דרכים לבחירת תא שיסתור את התנאי בו נשים 181 כדורים ואת השאר נחלק ללא הגבלה, לכן מספר האפשרויות הפסולות הוא: $3\cdot\binom{(300-181)+3-1}{3-1}$.

סה"כ נקבל כי התשובה היא: $\binom{300+3-1}{3-1} - 3\cdot\binom{(300-181)+3-1}{3-1}$.

סעיף ב':

כעת ישנה אפשרות של חריגה ביותר מתא אחד (בהמשך נראה כיצד פותרים זאת ע"י עקרון ההכלה וההדחה) ולכן ננסה לקחת גישה שונה: נניח שבכל תא יש מראש 120 כדורים. בכמה דרכים ניתן להוציא מהם 60 כדורים (כך נישאר עם 300 כדורים סה"כ)? שאלה זו שקולה לחלוקה של 60 כדורים ל – 3 תאים, לכן נקבל: $\binom{60+3-1}{3-1}$.

תרגיל 3:

הוכיחו את הזהויות הבאות בדרך אלגברית ובדרך קומבינטורית:

א) $(n+1)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n+1}{r+1}$

ב) $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$

פתרון:

א) ההוכחה האלגברית:

$$(n+1)\binom{n}{r} = (n+1)\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{r+1}{r+1}\cdot\frac{(n+1)!}{r!\,(n-r)!} = (r+1)\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!}$$
$$= (r+1)\binom{n+1}{r+1}$$

הוכחה קומבינטורית: כיצד ניתן לבחור קבוצה של $r+1$ אנשים וביניהם מנהיג מתוך $n+1$ אנשים?
באגף שמאל נבחר את המנהיג ואח"כ את האנשים בקבוצה (שאינם המנהיג).
בצד ימין נבחר את אנשי הקבוצה ומתוכם את המנהיג.

ב) הוכחה אלגברית: נתון מספר טבעי m, נוכיח את הזהות באינדוקציה על n. כאשר $n=0$ נקבל את המשוואה $\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0}$, והיא נכונה כי הביטויים בשני האגפים שווים ל- 1.
נניח כעת שהזהות מתקיימת עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1} + \binom{m+n+1}{n}$$
$$= \binom{m+n+2}{n+1}$$

כאן השתמשנו בהנחת האינדוקציה ואחר כך בזהות פסקל. זה מסיים את האינדוקציה.

הוכחה קומבינטורית: נניח שיש לנו m+1 אפסים ו – n אחדות לסדר בשורה. אגף ימין זו הנוסחה הישירה לחישוב זה. נבחן את אגף שמאל: נבודד ספרת 0 אחת שתהיה הסמן הימני, כלומר בכל בחירה נסתכל על ה – 0 הימני ביותר. ישנן n+1 אפשרויות למספר האחדות שמשמאל לסמן הימני הזה. מ – 0 ועד n (זו הסכימה באגף שמאל). למשל בדוגמא: 1 1 1 1 0 1 0 0 1 יש 2 אחדות משמאל לסמן הימני מסך 6 האחדות. ברגע שקבענו כמה אחדות משמאל לסמן הימני, נאמר k, נותר לקבוע את מיקומן – לקבוע סידור של k אחדות ו – m אפסים בשורה, כלומר $\binom{m+k}{k}$. מכאן שהנוסחה באגף שמאל מחשבת את אותו מספר הסידורים.

הוכחה קומבינטורית אלטרנטיבית:
כמה פתרונות (בשלמים חיוביים) יש לאי שוויון $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} \leq n$?
צד ימין: מספר הפתרונות בשאלה זהה למספר הפתרונות של $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} + x_{m+2} = n$.
זה זהה למספר הדרכים לחלק n כדורים זהים ל$m+2$ תאים, שזה בדיוק צד ימין.
צד שמאל: מספר הפתרונות שווה למספר הפתרונות של $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = k$ עבור $0 \leq k \leq n$. עבור k ספציפי זה בדיוק $\binom{m+k}{k}$ פתרונות. מקבלים את צד שמאל כאשר סוכמים על כל הk האפשריים.

תרגיל 4:

כמה מלים בנות 9 אותיות ניתן לרשום ע"י $\{a, a, a, b, b, b, c, d, e\}$ ובכמה מהן האותיות c, d סמוכות?

פתרון:

אם נתייחס לכל 9 האותיות כשונות, ישנן !9 מלים.
נשים לב שכל סידור כלשהו של מופעי a נספר 6 פעמים בצורה זו ולכן צריך לחלק ב – 6.
באותו אופן צריך לחלק ב – 6 עבור b.
נקבל סה"כ: $\frac{9!}{6\cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 10080$.

כעת, אם c, d סמוכות, לסידור ביניהן יש שתי אפשרויות. נתייחס אליהן כספרה אחת ונקבל בעיה חדשה: כמה מלים בנות 8 אותיות ניתן לרשום ע"י $\{a, a, a, b, b, b, x, e\}$? (כאשר x מסמל את c, d הסמוכות)

בחישוב דומה נקבל כאן $\frac{8!}{6\cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$ ובסה"כ יש $2 \cdot 1120 = 2240$ (ה-2 הוא מספר הסידורים הפנימיים האפשריים לx) מלים כנדרש.

תרגיל 5:

נתונה קבוצה של 2n עצמים, כאשר n מתוכם זהים והשאר שונים זה מזה.

א) מהו מספר הדרכים השונות לבחור n מהעצמים כאשר הסדר אינו חשוב (קבוצת עצמים) ?
ב) מהו מספר הדרכים השונות לבחור n מהעצמים כאשר הסדר כן חשוב (n-יה סדורה) ?

פתרון:

א) אם בחרנו k מהעצמים השונים אז שאר ה – $(n-k)$ עצמים הם מהעצמים הזהים. לכן נקבל:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

דרך אלטרנטיבית לראות זאת: נבחר תת קבוצה כלשהי של העצמים השונים (2^n אפשרויות). לאחר מכן, יש רק דרך אחת להשלים את הקבוצה לn עצמים. סה"כ קיבלנו 2^n אפשרויות.

ב) נסמן ב- k את מספר העצמים השונים בn-יה שלנו.
יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור ב- k המקומות עבור העצמים האלה (ונשים עצמים זהים בשאר המקומות).
כעת עבור כל מקום שבחרנו נבחר איבר מתוך קבוצת השונים שישב בו – למקום הראשון יש אפשרויות n אפשרויות, למקום השני יש n-1 אפשרויות וכו'.
לכן עבור כל ערך נתון של k, מספר הסדרות שבהן יש k עצמים מקבוצת העצמים השונים הוא

$$\binom{n}{k} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots (n-k+1) = \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

לכן התשובה היא

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>תרגיל 6:</u>

א) מה מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל? (שני סידורים זהים אם ניתן להגיע ע"י סיבוב מהאחד לשני)
ב) מה מספר הדרכים לסדר n זוגות במעגל כך שכל זוג ישב יחד?

<u>פתרון:</u>

א) שתי דרכים לפתרון:
1. נבחר אדם כלשהו שישמש ציר (הוא לא נחשב לספירה – הספירה מתחילה ממי שנבחר להיות משמאל לו). כעת נתחיל לסדר את האנשים משמאל לו, עד שנבחר את האדם האחרון שיסגור את המעגל ויהיה מימין לציר. נקבל סה"כ: $(n-1)!$ סידורים.
2. יש $n!$ אפשרויות לסדר n אנשים בשורה. אך אם נסגור את השורה למעגל, נקבל שעד-כדי סיבובים יש לכל מעגל n שורות מקור שיוצרות אותו, ולכן נחלק ב – n. נקבל סה"כ: $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ סידורים.

ב) לכל זוג יש 2 סידורים פנימיים אפשריים ((אדם א', אדם ב') או (אדם ב', אדם א')), לכן מסעיף א' נקבל: $2^n\cdot(n-1)!$ סידורים.

<u>תרגיל 7:</u>

בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה m כדורים לבנים ו – n כדורים שחורים, כך שלא יהיו שני כדורים שחורים סמוכים?

<u>פתרון:</u>

<u>דרך א':</u> ראשית, מעקרון שובך היונים ניתן לראות כי אם $n>m+1$ הסידור בלתי אפשרי (יונים = כדורים שחורים, שובכים = רווחים בין כדורים לבנים כולל לפני הראשון ואחרי האחרון).

כעת נגדיר את הרווחים בין הכדורים השחורים כתאים: $n-1$ תאים. אנו צריכים לפזר את m הכדורים הלבנים בין התאים כך שלא יהיו תאים ריקים, פרט (אולי) לתא הראשון והאחרון. ראשית נפזר כדור לבן אחד לכל אחד מהתאים פרט לקיצוניים ונישאר עם $m-(n-1)$ כדורים. כעת אין מגבלה על פיזור שאר הכדורים כיוון שסיפקנו את האילוץ הנתון. אז נותרנו עם הבעיה: כמה פתרונות טבעיים למשוואה:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}=m-(n-1)\ ?$$

אנו כבר יודעים לפתור זאת (נוסחת "אין חשיבות לסדר, יש חזרות"). נקבל:

$\binom{(n+1)+(m-(n-1))-1}{(n+1)-1}=\binom{m+1}{n}$. כמספר האפשרויות להכניס $m-(n-1)$ כדורים ל - $n+1$ תאים.

<u>דרך ב':</u> הפעם מגדיר את הרווחים בין הכדורים <u>הלבנים</u> כתאים: $m+1$ התאים. אנחנו צריכים לפזר את n הכדורים השחורים בין התאים כך שלא יהיה יותר מכדור שחור אחד בכל תא. זאת אומרת שיש לבחור ב- n תאים מתוך $m+1$ התאים שבהם יהיה כדור שחור, ומספר הדרכים לעשות זאת הוא $\binom{m+1}{n}$.

<u>תרגיל 8:</u>

שיכור מטייל על ציר המספרים כאשר בכל שלב הוא עובר מנקודה k לאחת משתי הנקודות $k+1$ או $k-1$.

א) מהו מספר המסלולים האפשריים ב – n שלבים?
ב) כמה מתוכם יחזירו אותו לנקודת ההתחלה?
ג) חזרו על שני הסעיפים הקודמים כאשר השיכור מטייל על המישור, ובכל שלב עובר לאחת מארבעת הנקודות הסמוכות.

<u>פתרון:</u>

א) בכל שלב יש שתי אפשרויות, לכן יש 2^n מסלולים.
ב) n בהכרח זוגי, ויש $\frac{n}{2}$ שלבים מכל סוג. נשאר לקבוע את מיקומי המעברים מסוג אחד בסדרת n השלבים, כלומר $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות.
ג) בסעיף א' נקבל 4^n מסלולים.

עבור סעיף ב': כל צעד מזרחה מחייב צעד חזרה מערבה (במקום כלשהו בסדרת הצעדים), וכל צעד צפונה מחייב צעד חזרה דרומה. נבחר ראשית את מספר הצעדים מזרחה: בין 0 ל - $\frac{n}{2}$. אם מספר הצעדים מזרחה נבחר להיות x, אז נשארו n-2x עבור צעדים צפונה ודרומה. כמו-כן צריך לקבוע את מיקום הצעדים מארבעת הסוגים. לכן נקבל:

$$\sum_{i=0}^{n/2}\binom{n}{i}\binom{n-i}{i}\binom{n-2i}{(n-2i)/2}$$

<u>הסבר:</u>
לאחר שבחרנו כמה צעדים יש מזרחה – i – נבחר את מיקומם: $\binom{n}{i}$.
מתוך המקומות הנותרים נבחר את מיקום i הצעדים המשלימים מערבה: $\binom{n-i}{i}$.
מתוך המקומות הנותרים נבחר את מיקום (n-2i)/2 הצעדים צפונה: $\binom{n-2i}{(n-2i)/2}$.
המקומות הנותרים הם בהכרח מיקומי הצעדים המשלימים דרומה.

<u>פתרון נוסף לסעיף זה (עבור חלק ב'):</u>
כמובן n בהכרח זוגי כמו בטיולים בציר שחוזרים לנקודת ההתחלה. תהי A קבוצת הצעדים שבהם השיכור זז צפונה או מזרחה. אז $|A| = n/2$ ולכן יש $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות עבור הקבוצה A (כקבוצה של n/2 מיקומים בסדרה באורך n). עכשיו תהי B קבוצת הצעדים שבהם השיכור זז צפונה או מערבה. אז גם $|B| = n/2$ ולכן יש $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות עבור הקבוצה B. נבחר את A ו- B באופן בלתי-תלוי לחלוטין, כך יש $\binom{n}{n/2}^2$ דרכים לבחור בשתי הקבוצות. אבל A ו- B ביחד קובעות את המסלול: השיכור זז צפונה במיקומים $A \cap B$, מזרחה במיקומים $A\setminus B$, מערבה במיקומים $B\setminus A$, ודרומה בשאר המיקומים. לכן התשובה היא $\binom{n}{n/2}^2$.

<u>תרגיל 9:</u>
יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי בעל q איברים.

א) כמה פולינומים בעלי דרגה n יש מעל $\mathbb{F}$?
ב) כמה פולינומים בעלי דרגה n המתאפסים בנקודה $x = 2$ יש מעל $\mathbb{F}$?

<u>פתרון:</u>

א) יש n+1 חזקות של x בפולינום: $a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$. לכל a_i יש q אפשרויות (איברי השדה) פרט ל - a_n עבורו יש q-1 אפשרויות – 0 אינו אפשרות כי הפולינום מדרגה n. נקבל $q^n \cdot (q-1)$ פולינומים אפשריים.
ב) פולינום מהצורה הנ"ל מתאפס בנקודה x=2 אם"ם ניתן להציגו בצורה: $(x-2)(b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})$ כאשר $b_{n-1} \neq 0$. לכן נקבל $q^{n-1} \cdot (q-1)$ פולינומים אפשריים כנדרש.

תרגילים נוספים:

תרגיל 1:

בכמה דרכים ניתן לבחור 8 קלפים מחבילת קלפים רגילה (52 קלפים) כך ש:

א) בחרנו ארבעה נסיכים?
ב) בחרנו ארבעה נסיכים ולפחות שני אסים?
ג) בחרנו בדיוק נסיך אחד, מלכה אחת, מלך אחד ואס אחד?

פתרון:

א) נשאר לבחור 4 קלפים מתוך 48, כלומר: $\binom{48}{4}$.
ב) נחלק למקרים:
1. בחרנו בדיוק 2 אסים: $\binom{4}{2}\binom{44}{2}$.
2. בחרנו בדיוק 3 אסים: $\binom{4}{3}\binom{44}{1}$.
3. בחרנו 4 אסים: אפשרות 1 (בחרנו כבר 8 קלפים).

סה"כ נקבל: $\binom{4}{2}\binom{44}{2}+\binom{4}{3}\binom{44}{1}+1$ דרכים.

ג) יש 4 אפשרויות לבחור נסיך אחד, 4 עבור מלכה אחת, 4 עבור מלך אחד ו – 4 עבור אס אחד. נשאר לנו לבחור 4 קלפים מתוך 36 (כל הקלפים בטווח [2,10] כאשר יש 4 קלפים מכל דרגה): $4^4\cdot\binom{36}{4}$.

תרגיל 2:

בכמה מהמספרים בעלי 7 ספרות, כל ספרה במספר מופיעה לפחות 3 פעמים?

פתרון:

נבחין בין שני סוגי מספרים העונים על הדרישה:

סוג א': מספר המורכב מספרה אחת. ישנם 9 מספרים כאלה.

סוג ב': מספר המורכב משתי ספרות:

1. מספר המורכב משתי ספרות שאינן 0. ראשית נבחר את שתי הספרות: $\binom{9}{2}$. כעת יש שתי אפשרויות למספר המופעים של ספרה: 3 או 4, כיוון ששתיהן חייבות להופיע לפחות 3 פעמים. יש 2 אפשרויות לספרה ה"דומיננטית" (זו שמופיעה 4 פעמים), וכל סידור של מופעיה קובע את מופעי הספרה האחרת. למשל ב – 4433344 לספרה 4 ארבעה מופעים ולספרה 3 שלושה מופעים. ברור כי ישנן $\binom{7}{4}$ אפשרויות לקבוע את מיקום הספרות.
2. מספר המורכב משתי ספרות כשאחת מהן היא 0. אז יש 9 אפשרויות לבחור את הספרה השנייה. כעת, הספרה השמאלית ביותר לא יכולה להיות 0. נותר לקבוע את מיקומה בין שש המקומות הנותרים: אם 0 מופיעה 3 פעמים נקבל $\binom{6}{3}$, ואם 0 מופיעה 4 פעמים נקבל $\binom{6}{4}$.

נקבל סה"כ $\binom{9}{2}\cdot 2\cdot\binom{7}{4}+9\cdot\left(\binom{6}{3}+\binom{6}{4}\right)$ דרכים לבניית מספרים מסוג ב'.

בסה"כ קיבלנו: $9+\binom{9}{2}\cdot 2\cdot\binom{7}{4}+9\cdot\left(\binom{6}{3}+\binom{6}{4}\right)$ מספרים העונים על הדרישה.

תרגיל 3:

א) חשבו את מספר המחלקים של 980,000.

ב) חשבו את מספר המחלקים המשותפים של 15^5 ו – 360,000.

<u>פתרון:</u>

א) נפרק את המספר לגורמים ראשוניים ונקבל את המולטי-קבוצה: $\{2,2,2,2,2,5,5,5,5,7,7\}$. כל מחלק אפשרי הוא איזושהי כפולה של איברים מהקבוצה לכן אם נסמן מספר $x = 2^{a_2} \cdot 5^{a_5} \cdot 7^{a_7}$ עבור

$$0 \le a_2 \le 5 \quad , \quad 0 \le a_5 \le 4 \quad , \quad 0 \le a_7 \le 2$$

נקבל כי x הוא מחלק אפשרי של 980000.
לבחירת a_2 יש 6 אופציות, לבחירת a_5 יש 5 אופציות ולבחירת a_7 יש 3 אופציות.
ולכן יש $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ מחלקים אפשריים.

ב) הגורמים הראשוניים של 15^5 : $\{3,3,3,3,3,5,5,5,5,5\}$. הגורמים הראשוניים של 360,000 : $\{2,2,2,2,2,2,3,3,5,5,5,5\}$.
החיתוך בין המולטי-קבוצות הוא: $\{3,3,5,5,5,5\}$ ובחישוב דומה ל-א' נקבל $3 \cdot 5 = 15$ מחלקים משותפים.

<u>תרגיל 4:</u>
בכמה דרכים ניתן להגיע מראשית הצירים לנקודה (m, n) ברביע הראשון, כאשר בכל שלב ניתן להתקדם צעד אחד מזרחה או צעד אחד צפונה?

<u>פתרון:</u>
כל דרך כזו כוללת בהכרח בדיוק m צעדים מזרחה ו – n צעדים צפונה. לכן נותר לקבוע את מיקומי m הצעדים מזרחה בסדרת $m + n$ הצעדים. מכאן נקבל: $\binom{m+n}{m}$ דרכים אפשריות.

<u>הערה</u>: באופן שקול, ניתן לקבוע את מיקומי n הצעדים צפונה, ולקבל $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.