תרגול 2- עקרון הסכום והכפל ושובך היונים

עקרון הסכום:

אם A ו – B קבוצות זרות מעוצמה סופית, אז $|A \cup B| = |A| + |B|$.

אם $A_1, \dots, A_n$ זרות בזוגות בעלי עוצמה סופית, אז $|\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i|$.

עקרון הכפל: (לקבוצות מעוצמה סופית)

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

תרגיל 1:

א. בכמה דרכים ניתן לבחור נציג יחיד לועדת קישוט מבין כיתות ה'1 ו – ה'2, אם ב – ה'1 ישנם 20 תלמידים וב – ה'2 ישנם 30 תלמידים?

ב. בכמה דרכים ניתן לבחור שני נציגים – אחד מ – ה'1 ואחד מ – ה'2?

פתרון:

א. ע"פ עקרון הסכום, ישנן $20 + 30 = 50$ דרכים לבחור נציג משתי הכיתות.

ב. ע"פ עקרון הכפל, ישנן $20 \cdot 30 = 600$ דרכים לבחור נציג אחד מ – ה'1 ונציג אחד מ – ה'2.

תרגיל 2:

בכיתה ח'3 ישנם 15 ספורטאים ו – 13 אמנים. בכמה דרכים ניתן לבחור נציג שהוא ספורטאי או אמן?

פתרון (שגוי):

ע"פ עקרון הסכום ישנן $15 + 13 = 28$ דרכים לבחור נציג שהוא ספורטאי או אמן.

הטעות כאן היא שיכולה להיות "כפילות בספירה" אם ספרנו את אותו האדם פעמיים – פעם בתור ספורטאי ופעם בתור אמן. **חסר לנו פה מידע:** האם קבוצת הספורטאים וקבוצת האמנים הן זרות? אם כן, אזי עקרון הסכום תקף והפתרון הנ"ל נכון. אחרת, אנו צריכים לדעת את גודל החיתוך בין הקבוצות. נטפל בשאלות מסוג זה בהמשך.

כדוגמת קיצון, נניח כי ישנם 15 אנשים סה"כ בכיתה ח'3. אזי ברור כי כולם ספורטאים ו – 13 מהם גם אמנים, כלומר קבוצת הספורטאים מכילה את קבוצת האמנים, וישנן 15 דרכים לבחור נציג כנדרש.

תרגיל 3:

א. כמה מספרים 4-ספרתיים ניתן להרכיב מהספרות 2,3,4,5?

ב. כמה מספרים כאלה המכילים את הספרה 3 ניתן להרכיב?

פתרון:

א. קבוצת הספרות שיכולות להיות ספרת האלפים היא $A = \{2,3,4,5\}$. ברור כי זו גם קבוצת הספרות שיכולות להיות ספרת המאות. כנ"ל לגבי העשרות והאחדות. ע"פ עקרון הכפל נקבל כי ניתן להרכיב $4^4 = 256$ מספרים כנדרש.

ב. ראשית, פתרון שגוי:

אם הספרה 3 מופיעה כספרת האלפים, אזי ע"פ עקרון הכפל ישנן $4^3 = 64$ דרכים לבחור את שאר הספרות. אם הספרה 3 מופיעה כספרת המאות נקבל אותה תוצאה. כנ"ל לגבי 3 כספרת העשרות או האחדות.

כעת, ע"פ עקרון הסכום ישנן $64 + 64 + 64 + 64 = 256$ דרכים להרכיב את המספר כנדרש. נשים לב כי כבר אינטואיטיבית זה לא מסתדר, מפני שעם חופש בחירה מלא יכולנו להרכיב 256 מספרים. לכן נצפה שעם האילוץ החדש, קרי הספרה 3 חייבת להופיע, נוכל להרכיב פחות מספרים.

מה שגוי כאן? שוב יש לנו כפילות בספירה: למשל את המספר 1383 ספרנו פעמיים: פעם בקבוצה בה הספרה 3 היא ספרת המאות ופעם בקבוצה בה הספרה 3 היא ספרת האחדות. במילים אחרות, הקבוצות הנ"ל אינן זרות. לכן קיבלנו מספר אפשרויות גדול משמעותית מהמספר שאכן קיים.

<u>כעת, פתרון נכון:</u>

ראשית אבחנה:

$$\{numbers\ made\ of\ A\} =$$
$$\{numbers\ made\ of\ A\ where\ 3\ appears\ at\ least\ once\} \cup$$
$$\{numbers\ made\ of\ A\ where\ 3\ does\ not\ appear\}$$

כיוון שהקבוצות באגף הימני של המשוואה הן זרות, ניתן להחיל עליהן את עקרון הסכום. אזי:

מספר האפשרויות להרכיב מספרים 4-ספרתיים מהספרות 2,4,5 הוא (ע"פ עקרון הכפל): $3^4 = 81$

חישבנו בתחילת התרגיל שסך כל האפשרויות להרכיב מספרים 4-ספרתיים מהספרות 2,3,4,5 הוא 256.

לכן (ע"פ עקרון הסכום) מספר האפשרויות להרכיב מספרים 4-ספרתיים בהם מופיעה הספרה 3 הוא: $256 - 81 = 175$.

<u>תרגיל 4:</u>

בכמה דרכים ניתן לחלק 6 אנשים ל – 3 קבוצות, כך שרינה נמצאת עם רוני באותה קבוצה וגלי לא נמצאת עם גיל באותה קבוצה.

<u>פתרון:</u>

ראשית, את רינה ורוני ניתן לספור ביחד כבן-אדם אחד, כך שפישטנו את הבעיה לנוסח הבא:

בכמה דרכים ניתן לחלק 5 אנשים ל – 3 קבוצות, כך שגלי לא נמצאת עם גיל באותה קבוצה?

כעת שוב ניתן להשתמש בעקרון הסכום: נחשב את סך כל האפשרויות ללא האילוץ, את סך האפשרויות לחלוקה כאשר גלי וגיל יחד באותה הקבוצה, ונחסר את הסכום השני מהראשון כדי לקבל את הנדרש.

<u>האפשרויות ללא האילוץ:</u>

נשים לב כי קיימות רק 2 חלוקות אפשריות:

חלוקה א': 1 1 3.

חלוקה ב': 1 2 2.

נחשב:

<u>חלוקה א':</u>

ראשית נבחין כי לבחור 3 אנשים מתוך 5 זה כמו לבחור את השניים הנותרים.

ניתן לבחור בצורה הבאה: ישנן 5 אפשרויות לבחור את הבן-אדם הראשון, ו – 4 את השני.

אך חישוב זה מתייחס לסדר שלהם (למשל, בחירת גיל ואז גלי נספרת כבחירה שונה מבחירת גלי ואז גיל).

מכיוון שהסדר לא משנה אלא רק העובדה שנבחרה קבוצה בעלת איבר אחד נחלק את מספר האפשרויות שחישבנו ב – 2, כי זה מספר האפשרויות לבחור סדר ביניהם.

נסיק כי ישנן $10 = \frac{5\cdot4}{2}$ אפשרויות לבחור 3 אנשים מתוך 5.

<u>חלוקה ב':</u>

חישבנו כבר כי יש 10 אפשרויות לבחור 2 אנשים מתוך 5. זה מגדיר זוג אחד.
כעת נשאר לבחור את הזוג השני,או באופן שקול ניתן לבחור את היחידון הנותר, כלומר 3 אפשרויות.
נותר לחלק ב – 2 כיוון שלא משנה סדר בחירת הזוגות. (אם גיל ורינה+רונה נבחרו כזוג הראשון וגלי ומשה נבחרו כזוג השני זו לא בחירה שונה מהמצב בו הסדר היה הפוך).
נקבל $\frac{10\cdot 3}{2} = 15$ אפשרויות לחלוקה זו.

מעקרון החיבור, סך כל האפשרויות לחלוקה ללא האילוץ הוא $10 + 15 = 25$.

בצורה דומה נחשב את סך האפשרויות לחלוקה כאשר גלי וגיל יחד באותה הקבוצה.
שזה למעשה סך האפשרויות לחלוקת 4 אנשים ל-3 קבוצות, כלומר 6.

נחסר את כמות האפשרויות הסותרות את האילוץ מסך כל האפשרויות ונקבל את כל האפשרויות המקיימות את האילוץ: $25 - 6 = 19$.

<u>פתרון נוסף:</u>

נספור את רינה ורונה כאדם אחד
נחלק את גלי וגיל לשתי קבוצות שונות ואז נחלק את השאר לקבוצות הנותורות ונחסיר את המצבים בהם יש קבוצה ריקה $3^3 - 2^3 = 19$

<u>עקרון שובך היונים:</u>

אם $|A| > |B|$ אז לא קיימת פונקציה חח"ע $f: A \to B$.

<u>אינטואיציה:</u> אם נחלק 101 יונים ל – 100 שובכים, יהיה לפחות שובך אחד שיכיל שתי יונים או יותר.

<u>שובך יונים מוכלל:</u> אם נחלק x יונים ל – y שובכים, אז יהיה לפחות שובך אחד שיכיל $\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$ יונים או יותר.

<u>ניסוח שקול:</u> אם הממוצע של n מספרים הוא x, אז לפחות אחד המספרים שווה ל-x או גדול ממנו.

<u>תרגיל 5:</u>

הוכיחו כי בין כל שישה מספרים שלמים תמיד נוכל למצוא שני מספרים שההפרש ביניהם יתחלק ב – 5 ללא שארית. האם הטענה תישאר נכונה עבור סכום?

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי הפרש בין 2 מספרים יתחלק ב – n אם"ם הם בעלי אותה שארית חלוקה ב-n בעצמם.
נסמן כתאים את השאריות האפשריות בחלוקת מספר ב – 5:

4	3	2	1	0

אם נחלק את ששת המספרים בין התאים, אזי ע"פ עקרון שובך היונים קיים תא אליו נשייך 2 מספרים לפחות, כלומר שארית החלוקה שלהם ב – 5 זהה. מכאן שההפרש ביניהם מתחלק ב – 5 ללא שארית.

הטענה לא נכונה עבור סכום של שני מספרים! למשל, אם שארית החלוקה של כל אחד מששת המספרים ב – 5 היא 1 אזי שארית החלוקה של סכום כל שניים מהם ב – 5 היא 2.

<u>תרגיל 6:</u>

הוכיחו שקיים מספר שלם חיובי (גדול מ-0), שניתן לרשום רק ע"י הספרות 7 ו - 0, שמתחלק בלי שארית ב-359.

<u>פתרון:</u>

נסתכל על המספרים: 7, 77, 777, ..., $\overbrace{77\ldots\ldots\ldots\ldots77}^{360 \text{ ספרות}}$. ע"פ הוכחה דומה לתרגיל 5, אנו יודעים כי ישנם שניים מן המספרים הנ"ל שהפרשם מתחלק ב – 359 ללא שארית. מכיוון שההפרש הזה הינו מספר המורכב רק מהספרות 7 ו – 0, מצאנו מספר העונה על התנאי הנדרש.

<u>תרגיל 7:</u>

הוכיחו כי בכל סידור של המספרים 1 עד 20 קיים רצף של 4 מספרים שסכומם לפחות 42 .

<u>פתרון:</u>

עבור סידור כלשהו של המספרים, נחלק את סדרת המספרים לחמישה רצפים זרים.
נסתכל על הסכומים של הקבוצות $S_1 \ldots S_5$:
ממוצע הסכומים האלו הוא $\frac{(S_1+\cdots S_5)}{5} = \frac{1}{5}\cdot\Sigma_1^{20} i = \frac{1}{5}\cdot\frac{(1+20)\cdot 20}{2} = 42$
ולכן עפ"י עקרון שובך היונים המוכלל קיים סכום אחד לפחות שערכו לפחות 42.

<u>תרגיל 8:</u>

הוכיחו כי בכל בחירה של n+1 מספרים שונים מבין 1,2,…,2n ישנם בהכרח שני מספרים הזרים זה לזה.

<u>פתרון:</u>

נגדיר בעזרת זוגות מספרים n תאים בצורה הבאה:

2n-1,2n	....	3,4	1,2

כיוון שבוחרים n+1 מספרים שונים , ע"פ עקרון שובך היונים קיים תא עבורו נבחרו שני המספרים.
זוג מספרים באותו תא הינם מספרים עוקבים, ולכן זרים (כלומר המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1 - הסבר בהמשך).

נשים לב שקיים פה אילוץ בבחירת n+1 המספרים: בכל תא ייבחרו לכל היותר שני מספרים, אך זה לא "מפריע" לעקרון שובך היונים.

בניסוח אחר: כל פונקציה מ – $\{1,2,\ldots,n+1\}$ ל - $\{1,2,\ldots,n\}$ אינה חח"ע.

נוכיח כי שני מספרים עוקבים הם זרים:
נסתכל על $t, t+1$ ונניח בשלילה ש – $d \neq 1$ מחלק משותף שלהם (כלומר אינם זרים). אזי קיימים a, b שלמים כך ש – $t = da$ ו - $t+1 = db$.
מחיסור המשוואות נקבל כי $1 = d(b-a)$, וכיוון ש – d, a, b שלמים, בהכרח $d = 1$ בסתירה להנחה.

<u>תרגיל 9:</u>

נתון מחומש ABCDE במישור שקודקודיו הם נקודות סריג (קואורדינאטות בעלות ערך שלם). הוכיחו כי קיימות שתי נקודות של המחומש שנקודת האמצע ביניהן גם היא נקודת סריג.

<u>פתרון:</u>

נשים לב שעל מנת לקבל נקודת אמצע על הסריג, ההפרש עבור כל קואורדינטה בנפרד צריך להיות זוגי.
נסווג את קודקודי המחומש ע"פ זוגיות הקואורדינאטות שלהם. נייצג זאת ע"י הזוגות הסדורים הבאים:

(זוגי, זוגי), (זוגי, אי-זוגי), (אי-זוגי, זוגי), (אי-זוגי, אי-זוגי).

ע"פ עקרון שובך היונים, ישנן שתי נקודות של המחומש עם אותו הסיווג. לכן ההפרש בין קואורדינאטות ה-x וה-y המתאימות יהיה זוגי, ולכן נקודת האמצע תהיה בעלת קואורדינאטות שלמות.

<u>תרגיל 10:</u>

לפוליטיקאי נותרו 50 ימים לנאום עד הבחירות. עליו לנאום כל יום לפחות נאום אחד, אך לא יותר מ – 75 נאומים סה"כ.
הוכיחו כי ישנה סדרת ימים רצופים בהם הוא נואם בדיוק 24 נאומים.

<u>פתרון:</u>

נסמן ב - x_i את מספר הנאומים שנאם הפוליטיקאי עד היום ה – i כולל. מתקיים כי:

$$1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_{50} \le 75$$

אם נמצא $1 \le i < j \le 50$ כך ש - $x_j - x_i = 24$ או בצורה אחרת $x_j = x_i + 24$ אזי נוכל לטעון שבין היום ה-$i+1$ ליום ה-j נאמו בדיוק 24 נאומים.

נתבונן בקבוצות המספרים:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{50}\},\ \{x_1 + 24, x_2 + 24, \ldots, x_{50} + 24\}$$

נשים לב למספר דברים:

1. בתוך כל קבוצה אין 2 מספרים שווים
2. כל המספרים בין 1 ל- 99
3. יש בסה"כ 100 איברים ב-2 הקבוצות

ולכן אם נסתכל על הערכים בין 1 ל- 99 כתאים ונחלק את כל האיברים לתאים אלו, עפ"י שובך היונים נקבל שיש שני איברים באותו תא, כלומר בעלי ערך זהה.
מהאבחנה הראשונה שלנו ניתן להסיק כי כל אחד מהאיברים הללו מצוי בקבוצה אחרת ולכן אנו יכולים להגיד ששני האיברים באותו התא הינם מהצורה x_j , $x_i + 24$.

לכן מהיום ה-$i+1$ ליום ה-j נאמו בדיוק 24 נאומים.

<u>תרגיל 11: (טענה מתורת המספרים)</u>

בהינתן p, q טבעיים זרים זה לזה ו – a שלם כלשהו, הראו כי הקבוצה:

$$\{a, a+q, a+2q, \ldots, a+(p-1)q\}$$

היא מערכת שאריות שלמה מודולו p, כלומר, קבוצת השאריות של חלוקת מספרים אלה ב – p תניב את קבוצת כל השאריות האפשריות בחלוקה ב – p.

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי הקבוצה מכילה p איברים ומערכת השאריות מודולו p מכילה גם היא p איברים.
לכן קשה להשתמש בשובך היונים בצורה ישירה.
אם הקבוצה לא הייתה מייצגת את כל האיברים במודולו p (כלומר בהכרח פחות) היינו יכולים להשתמש בשובך היונים.

לכן נניח בשלילה כי הקבוצה הנ"ל אינה מערכת שאריות שלמה מודולו p.
אזי ע"פ עקרון שובך היונים קיימים בקבוצה שני איברים $a+kq, a+lq$ בה"כ $0 \le k < l < p$, כך שלשני איברים אלה אותה שארית בחלוקה ב–p.
אבל אז להפרשם $(a+lq)-(a+kq) = (l-k)q$ יש שארית חלוקה 0 ב-p, כלומר הפרשם מתחלק ב-p.
מכיוון ש– p, q זרים, בהכרח האיבר בחלוקה המתחלק ב p הוא $(l-k)$. מכיוון ש $0 < (l-k) < p$,
קיבלנו סתירה ולכן הקבוצה מכילה את כל השאריות מודולו p.

<u>אבחנה (משפט השאריות הסיני)</u>

בהינתן p, q טבעיים זרים זה לזה ו– a, b שלמים כלשהם, קיים x שלם כך שמתקיים:

$$x \equiv a \ (mod\ q) \quad , \quad x \equiv b \ (mod\ p)$$

הוכחה: ע"פ מה שהוכחנו בתרגיל 11, קיים $0 \leq k < p$ המקיים: $a + kq \equiv b \ (mod\ p)$, וברור כי $a + kq \equiv a \ (mod\ q)$ ולכן $x = a + kq$ מקיים את האבחנה.