תרגול 12 – מבוא להסתברות בדידה

הגדרות:

מרחב הסתברות בדיד:

מרחב הסתברות בדיד $(\Omega, \Pr)$ מורכב מ-

קבוצה סופית Ω המכונה מרחב המדגם, כשלכל אחד מאיבריה, $x \in \Omega$ מיוחס משקל אי שלילי $\Pr(x) \geq 0$ הנקרא ההסתברות של x, ומתקיים $\sum_{x\in\Omega} \Pr(x) = 1$.

מאורע:

יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד, תת קבוצה $A \subseteq \Omega$ נקראת מאורע.

מאורע A הכולל בדיוק איבר אחד של Ω נקרא מאורע בסיסי.

הסתברות מאורע A מוגדרת ע"י הנוסחה: $\Pr(A) = \sum_{x\in A} \Pr(x)$.

מאורע משלים:

יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהי $A \subseteq \Omega$ מאורע,

המאורע המשלים של A הוא המאורע $\bar{A} = \Omega \backslash A$. מתקיים כי $\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A)$

מאורעות זרים:

יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד, שני מאורעות $A, B \subseteq \Omega$ נקראים זרים אם $A \cap B = \emptyset$.

התפלגות אחידה:

יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד, אם כל ההסתברויות $\Pr(x)$ זהות, כלומר $Pr(x) = \frac{1}{|\Omega|}$ לכל $x \in \Omega$, אזי Pr היא *התפלגות אחידה* על מרחב המדגם Ω. עבור התפלגות אחידה ומאורע $A \subseteq \Omega$ מתקיים $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

משפט: לכל שני מאורעות זרים A, B מתקיים כי $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.

משפט: יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהיו $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ מאורעות זרים בזוגות אז $\Pr(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$.

משפט (חסם האיחוד – The union bound): יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהיו $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ מאורעות בו, אז $\Pr(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$.

משפט (עקרון ההכלה וההדחה למאורעות): יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהיו $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ מאורעות בו, ההסתברות של מאורע האיחוד היא:

$$\Pr(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i) - \sum_{1\leq i<j<n} \Pr(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

שאלה 1:
נתונה קבוצה אקראית של n אנשים,
א. מהו ערכו המינימלי של n שעבורו בוודאות לשניים יהיה יום הולדת משותף?
ב. מה ההסתברות שלא יהיו שניים בעלי אותו יום הולדת?

פתרון:
א. לפי עקרון שובך היונים בקבוצה של 366 אנשים ישנם בהכרח 2 עם אותו יום ההולדת. לעומת זאת, עבור קבוצה של 365 אנשים, ייתכן כל אחד נולד ביום אחר.
ב. מרחב המדגם: $\{1,2,\dots,365\}^n$ וגודלו $|\Omega| = 365^n$. נניח כי ההתפלגות היא אחידה.
נגדיר A- המאורע שאין שני ילדים עם אותו יום ההולדת, אזי
מספר האפשרויות בהן אין שניים עם יום הולדת זהה- $|A| = 365 * 364 * \dots * (365 - n + 1)$.
לכן, $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{365*364*\dots*(365-n+1)}{365^n}$.
עבור $n \geq 23$ ישנה הסתברות של פחות מ0.5.

שאלה 2:
מטילים קובייה 100 פעמים. מהי ההסתברות שיצא בדיוק 70 פעם אותו ערך?

פתרון:
מרחב המדגם מכיל את כל סדרות ההטלות האפשריות. לכל הטלה 6 אפשרויות, סה"כ במרחב המדגם 6^{100} סדרות.
ההתפלגות אחידה ולכן ההסתברות היא $\frac{6\cdot\binom{100}{70}\cdot 5^{30}}{6^{100}}$.

שאלה 3:
מטילים זוג קוביות מובחנות, נגדיר:
O - המאורע שבו סכום התוצאות בשתי הקוביות אי זוגי,
S - המאורע שבו לפחות בקובייה אחת התקבלה התוצאה 6,
חשבו את הסתברות המאורעות הבאים:
א. $O \cup S$.
ב. $\overline{O \cup S}$.
ג. $O \cup \bar{S}$.
ד. $\bar{O} \cup S$.

פתרון:
גודל מרחב המדגם הוא $6^2 = 36$. ההתפלגות אחידה.
א. נדרש שבקובייה אחת יתקבל 6 או שהסכום של שתי הקוביות יהיה אי זוגי. נספור כמה אפשרויות כאלה יש.
מספר האפשרויות לכך שבאחת הקוביות לפחות התקבל 6 הוא $36 - 5^2 = 11$. נותר לספור את מספר האפשרויות שבאף קובייה לא התקבל 6, אך הסכום המתקבל הוא אי-זוגי.
לכל קובייה ישנן 5 אפשרויות- 3 אי זוגיות ו2 זוגיות. כדי לקבל סכום אי זוגי רוצים שבאחת הקוביות יתקבל מספר זוגי ובאחרת אי זוגי. סה"כ: $3 * 2 * 2$.
לכן, $|O \cup S| = 11 + 2 * 2 * 3$ וההסתברות הינה $\frac{23}{36} = \frac{11+2*2*3}{6^2}$.

ב. ההסתברות למאורע המשלים של המאורע מסעיף א הינה- $\frac{13}{36} = 1 - \frac{23}{36}$.

ג. המשלים של S הינו המאורע שבו באף קובייה לא התקבל 6 ולכך יש 5^2 אפשרויות. נותר לספור את מספר האפשרויות שלפחות באחת הקוביות התקבל 6, אך הסכום המתקבל הוא אי-זוגי.
אם התקבל 6 בקובייה הראשונה, יש 3 אפשרויות עבור השנייה על מנת שהסכום יהיה אי-זוגי (ו-6 לא ביניהן).
באופן זהה יש 3 אפשרויות אם 6 התקבל בקובייה השנייה.
סה"כ- $\frac{31}{36} = \frac{5^2+3*2}{6^2}$.

ד. כפי שראינו יש 11 אפשרויות לכך שבאחת הקוביות לפחות התקבל 6, ואם לא- הסכום צריך להיות זוגי. ישנן שתי אופציות בהנחה שלא התקבל 6 באף אחת משתי הקוביות-
1. בשתיהן התקבל זוגי- 2*2 אפשרויות.
2. בשתיהן אי זוגי- 3*3 אפשרויות.
לכן ההסתברות לכך- $\frac{24}{36} = \frac{2*2+3*3+11}{6^2}$.

<u>שאלה 4:</u>

מטילים קובייה מוטה שבה ההסתברות לכך שהקובייה תראה מספר מסוים היא ביחס ישר לערך המספר.
למשל ההסתברות לקבל 6 גבוהה פי 2 מההסתברות לקבל 3.

א. מה ההסתברות לקבל 2?
ב. מה ההסתברות לקבלת תוצאה זוגית?

<u>פתרון:</u>

א. נסמן ב-x את ההסתברות לקבל 1, אזי ההסתברות ל-2 הינה $2x$, ל-3 הינה $3x$ וכך הלאה. כיוון שסכום ההסתברויות האפשריות צריך להיות 1 נקבל ש- $1 = \frac{(1+6)*6}{2}x$ כלומר $\frac{1}{21} = x$ ולכן ההסתברות ל-2 הינה $\frac{2}{21}$.
ב. נסכום את הסתברויות המאורעות הבסיסיים ונקבל $\frac{12}{21} = 2x + 4x + 6x$.

<u>אי-תלות:</u>

A, B נקראים מאורעות בלתי-תלויים (ב"ת) אם $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$.
(שימו לב לשוני בין זרות לאי-תלות. האם מאורעות זרים הם גם ב"ת?)

<u>שאלה 5:</u>

מטילים שתי קוביות כחולה ואדומה.
נסמן את תוצאת הכחולה ב – a ותוצאת האדומה ב – b.

א. מה ההסתברות ש- a אי-זוגית ו- b גדולה מ – 2?
ב. האם המאורעות הללו בלתי-תלויים?

<u>פתרון:</u>

א. נחשב: $|\Omega| = 36$, ההתפלגות אחידה. נסמן מאורע A - a אי-זוגית, מאורע B - b גדולה מ – 2 .
כעת בחישוב ישיר של החיתוך: $\Pr(A \cap B) =$
$\frac{|\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

ב. $\Pr(A) = \frac{3}{6}$, $\Pr(B) = \frac{4}{6}$. לכן: $\Pr(A) \cdot \Pr(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$.
קיבלנו כי $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$, כלומר A, B ב"ת.

נציין כי במקרה זה, באופן אינטואיטיבי, יכולנו לצפות מראש כי יתקבל שהמאורעות הנ"ל ב"ת, משום שהאחד מוגדר רק לפי תוצאת הקובייה הכחולה והשני מוגדר רק לפי תוצאת הקובייה האדומה. לא תמיד יהיה הסבר אינטואיטיבי פשוט לתלות/אי-תלות של מאורעות, ולפעמים אף האינטואיציה תטעה אותנו, כך שעלינו להיזהר.

<u>שאלה 6:</u>
מטילים 3 תמניונים (פאונים עם 8 פאות) א' ב' ו – ג'. ראשית מטילים את א' ואחר-כך את ב' ו – ג' עד שבכל אחת מהן מתקבלת תוצאה שונה מזו שיצאה ב-א'.
א. מה ההסתברות שתוצאת א' זוגית, וגם תוצאת ב' שווה לתוצאת ג' ? האם שני המאורעות הנ"ל ב"ת?
ב. מה ההסתברות שתוצאת א' זוגית, וגם סכום תוצאות ב' ו – ג' שווה ל- 13 ? האם שני המאורעות הנ"ל ב"ת?
ג. מה ההסתברות שתוצאת א' זוגית, וגם סכום תוצאות ב' ו – ג' שווה ל- 14 ? האם שני המאורעות הנ"ל ב"ת?

<u>פתרון:</u>

א. נסמן: A – המאורע שתוצאת א' זוגית. B – המאורע שתוצאת ב' שווה לתוצאת ג'.

$$Pr(A \cap B) = \frac{4 \cdot 7}{8 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

$\Pr(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\Pr(B) = \frac{7}{49}$ לכן $\Pr(A) \cdot \Pr(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{49} = \frac{1}{14}$.

כיוון שתוצאות ב' ו – ג' מושפעות מתוצאת א' היינו עלולים לצפות ש –A,ו- B תלויים, אך למעשה הם ב"ת, כיוון של - ב' ול – ג' יש 7 תוצאות אפשרויות, כלומר, גודל מרחב מדגם זהה לאחר הטלת א', ללא קשר לתוצאת הטלת א'.

ב. נסמן: A = תוצאת א' זוגית. B = סכום תוצאות ב' ו – ג' שווה ל- 13 ונחשב את $Pr(A \cap B)$.
נחלק למאורעות זרים:
א' = 2 או 4. אז ל – ב', ג' האפשרויות הן: (7,6), (6,7), (8,5), (5,8). ההסתברות היא: $\frac{1}{49} = \frac{2 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 7}$.
א' = 6. אז ל – ב', ג' האפשרויות הן: (8,5), (5,8). ההסתברות היא: $\frac{1}{196} = \frac{2}{8 \cdot 7 \cdot 7}$.
א' = 8. אז ל – ב', ג' האפשרויות הן: (7,6), (6,7). ההסתברות היא: $\frac{1}{196} = \frac{2}{8 \cdot 7 \cdot 7}$.
סה"כ ההסתברות למאורע $A \cap B$ שווה לסכום המאורעות הזרים הנ"ל, דהיינו: $\frac{3}{98} = \frac{1}{49} + 2 \cdot \frac{1}{196}$.
$\Pr(A) = \frac{1}{2}$, $\Pr(B) = \frac{4 \cdot 6}{8 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{3}{49}$ לכן $\Pr(A) \cdot \Pr(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{49} = \frac{3}{98}$.

מכאן שהמאורעות ב"ת.

ג. נסמן: A = תוצאת א' זוגית. B = סכום תוצאות ב' ו – ג' שווה ל- 14. נפריד למאורעות זרים שאיחודם הוא $A \cap B$:

א' = 2 או 4. אז ל – ב', ג' האפשרויות הן (7,7), (8,6), (6,8). ההסתברות היא: $\frac{3}{196} = \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 7}$.

א' = 6 או 8. אז ל – ב', ג' האפשרויות הן: (7,7). ההסתברות היא: $\frac{1}{196} = \frac{2}{8 \cdot 7 \cdot 7}$.

סה"כ ההסתברות למאורע $A \cap B$ שווה לסכום המאורעות הזרים הנ"ל, דהיינו: $\frac{1}{49} = \frac{4}{196}$.

$\Pr(A) = \frac{1}{2}$, $\Pr(B) = \frac{2 \cdot 6 + 7}{8 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{19}{196}$ לכן $\Pr(A) \cdot \Pr(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{196} = \frac{19}{392}$.

מכאן שהמאורעות תלויים.

<u>הסתברות מותנית:</u>

הסתברות מותנית היא ההסתברות שמאורע Y כלשהו יקרה בהנחה שמאורע אחר X קורה. היא מסומנת ע"י $\Pr(Y|X)$ ומוגדרת רק אם $\Pr(X) \neq 0$ ע"י $\Pr(Y|X) = \frac{\Pr(X \cap Y)}{\Pr(X)}$.

<u>משפט</u>: יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהיו $X, Y \subseteq \Omega$ מאורעות בעלי הסתברות חיובית. אז התנאים הבאים שקולים:

א. X, Y ב"ת.

ב. $\Pr(Y|X) = \Pr(Y)$.

ג. $\Pr(X|Y) = \Pr(X)$.

<u>שאלה 7</u>:

מטילים שתי קוביות, כחולה ואדומה. נתון שלפחות תוצאת אחת ההטלות היא זוגית. מה ההסתברות שתוצאת שתי ההטלות זוגית?

<u>פתרון:</u>

אנו עלולים לחשוב אינטואיטיבית כי ההסתברות היא $\frac{1}{2}$. נתון כי תוצאת אחת ההטלות היא זוגית, לשנייה יש הסתברות שווה להיות זוגית או אי זוגית, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{2}$. (זה היה נכון לו היה נתון כי תוצאת קובייה ספציפית, הכחולה/האדומה זוגית).

נגדיר את הבעיה: מרחב המדגם הוא $\Omega = \{\mathrm{EE}, \mathrm{EO}, \mathrm{OE}, \mathrm{OO}\}$.

לדוגמא,EO,פירושו שהתוצאה הראשונה היא זוגית והשנייה היא אי זוגית.

ההסתברויות לכל אחד מהמאורעות הבסיסיים הן $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

נגדיר מאורעות: X = לפחות אחת תוצאות ההטלה היא זוגית, Y = שתי התוצאות זוגיות.

אזי $X = \{EE, EO, OE\}$, $Y = \{EE\}$.

אנו מחפשים את ההסתברות ל –Y בתנאי X. נחשב: $\Pr(Y|X) = \frac{\Pr(Y \cap X)}{\Pr(X)} = \frac{\Pr(Y)}{\Pr(X)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

שאלה 8:

בסלסלה יש 2 תפוחים, 3 אגסים ו – 4 בננות, כשכל הפירות מסומנים, כלומר שונים אחד מהשני. משה וחנה שולפים, כל אחד בתורו שני פירות באקראי. מה ההסתברות שחנה תשלוף שני תפוחים, אם נתון שמשה שלף ראשון והוא לא שלף בננות?

פתרון:

נסמן: A = חנה שלפה שני תפוחים.

B = משה לא שלף בננות.

אזי:

$\Pr(A \cap B) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}}$ – אם משה לא מוציא בננות וחנה מוציאה תפוחים, אזי למשה יש אפשרות להוציא רק מתוך 3 האגסים השונים.

$\Pr(B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}$ - אם משה לא הוציא בננות, אזי יש לו אפשרות בחירה רק מתוך 5 פירות שונים.

לכן: $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{2}} = \frac{1}{70}$.

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן מאורע A ומאורעות $B_1, \dots, B_k$ זרים בזוגות כך ש- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$, מתקיים

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{k} \Pr(A|B_i)\Pr(B_i).$$

חוק בייס:

בהנתן מאורעות A, B, מתקיים

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B)\Pr(B)}{\Pr(A)}$$

שאלה 9:

בכובע 6 פתקים, על אחד כתוב "מטבע", על שניים כתוב "קובייה", ועל שלושה כתוב "חפיסת קלפים".
בנוסף ישנם מטבע שבצדו האחד מופיע 1 ובצדו השני 2, קובייה וחפיסת קלפים שאינה מכילה אס, נסיך, מלך ומלכה.
קוסם שולף פתק מהכובע, ומטיל מטבע/קובייה או בוחר קלף מתוך החפיסה לפי מה שמורה לו הפתק.

א. מה ההסתברות שהערך שהתקבל בהטלה/בחירת הקלף הוא 2?
ב. בהינתן שהערך שהתקבל הוא 2, מה ההסתברות שעל הפתק שהוציא הקוסם היה כתוב "מטבע".

<u>פתרון:</u>

נסמן:

A- המאורע כי הערך שהתקבל הוא 2,

B_1 - המאורע כי הפתק שהוצא מהכובע הוא "מטבע",

B_2 - המאורע כי הפתק שהוצא מהכובע הוא "קובייה",

B_3 - המאורע כי הפתק שהוצא מהכובע הוא "חפיסת קלפים".

א. נחשב את ההסתברות המבוקשת בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$\Pr(A) = \Pr(A|B_1)\Pr(B_1) + \Pr(A|B_2)\Pr(B_2) + \Pr(A|B_3)\Pr(B_3)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{7}{36}$$

ב. נחשב את ההסתברות המבוקשת בעזרת נוסחת בייס:

$$\Pr(B_1|A) = \frac{\Pr(A|B_1)\Pr(B_1)}{\Pr(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{7}{36}} = \frac{3}{7}$$