תרגול 11

מספרי רמזי

הגדרה: $R = R(s,t)$ הוא המספר הטבעי הקטן ביותר כך שבכל צביעה של **צלעות** הגרף K_R בשני צבעים (אדום וכחול), קיים תת-גרף שלם K_s שצבוע בכחול או שקיים תת-גרף שלם K_t שצבוע באדום.

הגדרה שקולה: עבור גרף עם לפחות $R = R(s,t)$ קדקדים מתקיים אחד מהבאים:

1. בגרף יש קליקה בגודל s.
2. בגרף המשלים יש קליקה בגודל t (בגרף המקורי יש אנטי קליקה בגודל t) .

משפט (ארדש, סקרש): $R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$

שאלה 1

יהי G גרף לא-מכוון ללא משולשים על n קדקדים, כאשר $n \ge 55$. הראו שקיימת צביעה חוקית של G, שצובעת 10 **קדקדים** באותו הצבע.

פתרון:

- ממשפט ארדש-סקרש: $R(3,\ 10) \le \binom{3+10-2}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$.
- נתון ש - $n \ge 55$, לכן בכל צביעה של צלעות K_n בכחול ואדום חייב להיות משולש כחול או K_{10} אדום.
- כיוון ש-$G \subseteq K_n$ אז בפרט, זה המקרה אם נצבע את צלעות G בכחול ואת הצלעות של $\bar{G}$ באדום. (כלומר זאת צביעה על K_n).
- כיוון שאין משולשים ב- G (כלומר אין בו קליקה בגודל 3), ממשפט ארדש-סקרש יש אנטי קליקה בגרף בגודל 10 (כלומר ב- $\bar{G}$ יש תת-גרף שבו משוכן K_{10}).
- כיוון שזאת אנטי-קליקה בגרף G, הקדקדים של תת-הגרף הזה מהווים קבוצה בלתי-תלויה בגרף G, כלומר אין שניים מהם שמחוברים ע"י צלע.
- לכן אפשר לצבוע את כל העשרה באותו צבע באופן חוקי.

שאלה 2

הוכיחו כי $R(4,3) = 9$.

פתרון:

נראה את שני הדברים הבאים:

1. בכל צביעה של קשתות K_9 בכחול ואדום, יש או K_4 צבוע כחול או K_3 צבוע אדום.
2. קיימת צביעה של K_8 כך שאין K_4 כחול ולא K_3 אדום.

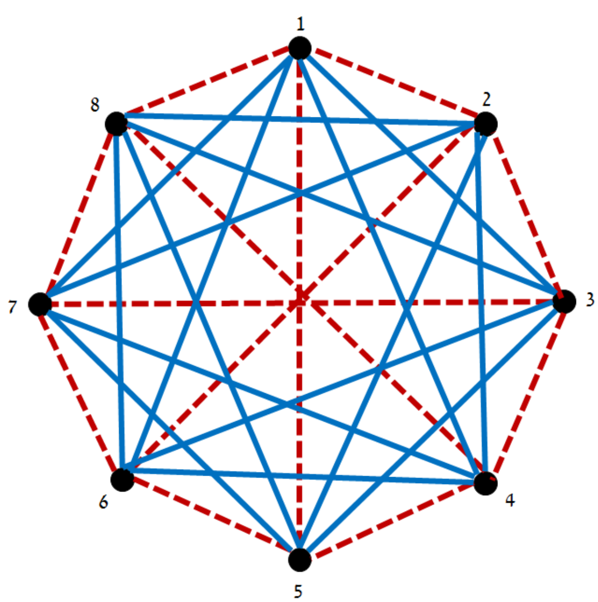
נתחיל מהוכחת החלק הראשון:

- תהי צביעה כלשהי של צלעות K_9 בשני צבעים.
- נראה כי לא ייתכן כי בכל קדקד חלות בדיוק 5 צלעות כחולות:
  - אם כן - תת הגרף המושרה ע"י הצלעות הכחולות הינו גרף עם 9 קדקדים שבו דרגת כל קדקד היא 5.
  - ממשפט הדרגות סכום דרגות הקדקדים בו הינו $5 \cdot 9 = 45$, בסתירה למשפט הדרגות.
  - לכן בהכרח קיים קדקד $v \in V$ שחלות בו לפחות 6 צלעות כחולות או לכל היותר 4 צלעות כחולות, ולכן לפחות 4 צלעות אדומות.
- נתבונן ב-v שמצאנו.

- <u>מקרה א':</u> נניח שחלות ב – v 6 צלעות כחולות.
  - נתבונן בתת הגרף המושרה ע"י קבוצת הקדקדים בקצוות של צלעות אלה שאינן v, שנסמנה N (אז $|N| = 6$).
  - נתבונן בצביעה בשני צבעים רק של הצלעות של 6 הקדקדים ב-N.
  - מהכיתה, $R(3,3) = 6$ ולכן בצביעה המושרית על תת הגרף המושרה ע"י N קיים K_3 אדום, המהווה K_3 אדום ב – G, או שקיים K_3 כחול שיחד עם v, מהווה K_4 כחול ב – G.
- <u>מקרה ב':</u> נניח שחלות ב – v 4 צלעות אדומות.
  - נתבונן שוב בקבוצת הקדקדים בקצוות של צלעות אלה שאינן v.
  - אם בין כל קדקדי הקבוצה צלעות כחולות, קיבלנו K_4 כחול.
  - אחרת קיימת ביניהם צלע אדומה $\{u, w\}$, ואז הקדקדים v, u, w יוצרים משולש אדום כנדרש.

<u>נראה כעת את החלק השני:</u>

- נסמן את קדקדי K_8 ב - $1,2, \ldots, 8$. נצבע את הקשת $\{i, j\}$ באדום, אם $j - i \in \{1,4,7\}$ (כאשר $j > i$), ואחרת נצבע בכחול (כלומר כאשר ההפרש הוא מבין 2,3,5,6).
- נניח בשלילה כי בגרף יש משולש אדום.
- יהי i הקדקד הקטן ביותר במשולש. בנוסף ל - i במשולש יהיו חייבים להופיע שניים מהקדקדים הבאים: $i + 1, i + 4, i + 7$, אך בין כל שני קדקדים כאלה צלע כחולה (ההפרש אינו מבין 1,4,7).
- נניח בשלילה כי בגרף יש K_4 כחול.
- יהי i הקדקד הקטן ביותר במרובע. בנוסף ל- i במרובע יהיו חייבים להופיע שלושה מהקדקדים הבאים: $i + 2, i + 3, i + 5, i + 6$.
- נשים לב כי לא משנה איך נבחר שלושה קדקדים, נהיה חייבים לבחור או את הזוג $i + 2, i + 3$ או את הזוג $i + 5, i + 6$ ולכן נקבל צלע אדומה (הפרש 1).



<u>משפט Mantel (מקרה פרטי של משפט Turan):</u> יהי G גרף בעל n קדקדים וללא משולשים. אז ב – G יש לכל היותר $\lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor$ צלעות.

<u>שאלה 3:</u>

נתונות 2n נקודות שונות במרחב התלת מימדי $(n > 1)$ $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$, כך ששום שלוש מהן אינן נמצאות על אותו הישר. נסמן ב – M אוסף כלשהו של $n^2 + 1$ קטעים עם הקצוות בנקודות הנתונות.

1. הוכיחו כי קיים משולש שקדקדיו הם מבין הנקודות הנתונות וכל צלעותיו שייכות ל – M.
2. הוכיחו כי המסקנה אינה נכונה בהכרח עבור n^2 קטעים. (כלומר קיים אוסף של n^2 קטעים שאין בו משולשים).

<u>פתרון:</u>

1. נתבונן בגרף שקדקדיו ייצגו את הנקודות במרחב. נוסיף צלע בין שני הקדקדים אם בין שתי הנקודות שתואמות לקדקדים יש קטע ב – M. עלינו להראות כי בגרף זה בהכרח קיימת קליקה בגודל 3 (משולש).
   - ממשפט מאנטל, אם בגרף עם n קדקדים אין משולשים, אזי יש בו לכל היותר $\lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor$ צלעות.
   - מכאן שאם בגרף שהגדרנו לעיל אין משולשים, אזי ייתכנו בו לכל היותר $\lfloor\frac{(2n)^2}{4}\rfloor = n^2$ צלעות.
   - בגרף שלנו $n^2 + 1$ צלעות, לכן הוא בהכרח מכיל משולש.
2. נחלק את הנקודות לשתי קבוצות זרות בגודל n.
   - נבנה את הגרף הדו-חלקי המלא $K_{n,n}$.
   - בגרף זה יש $n \cdot n = n^2$ צלעות.
   - כיוון שהגרף הוא דו-חלקי, אין בו מעגלים מדרגה אי-זוגית, ובפרט אין בו משלושים.

<u>שאלה 4</u>

יהי G גרף ללא קבוצה ב"ת בגודל 3 (כלומר בין כל 3 קדקדים יש לפחות צלע אחת). הוכיחו שקיים מספר שלם חיובי n כך שאם מספר הקדקדים של G גדול או שווה ל - n אז G אינו מישורי. יש למצוא את הערך המינימלי של n, נסמנו n_0, שמקיים את התנאי.

<u>פתרון:</u>

במקום לקפוץ ישר לפתרון האופטימלי, נשתמש בכלים שונים כדי לגלות אינפורמציה על n_0.

(א) נתחיל במספרי רמזי. נשים לב שמהנתונים אפשר להסיק שאין משולש בגרף המשלים של G, $\bar{G}$. לכן אם נקח $n \geq R(5,\ 3)$, מכך שאין ב- $\bar{G}$ כתת-גרף את K_3, הרי שיש ב- G כתת-גרף את K_5 (ההוכחה דומה לפתרון של שאלה 1), ולכן G אינו מישורי.

ממשפט ארדש-סקרש: $R(5,\ 3) \leq \binom{5+3-2}{5-1} = \binom{6}{4} = 15$, לכן $n_0 \leq 15$.

<u>הערה:</u> מטבלת מספרי רמזי $R(5,\ 3) = 14$, ולכן $n_0 \leq 14$.

(ב) נעבור למשפט Mantel. ראינו שאין ב – $\bar{G}$ משולש, לכן אם יש n קדקדים ב – $\bar{G}$ (וגם ב - G כמובן) אז מספר הצלעות ב – $\bar{G}$ הוא לכל היותר $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$. אז מספר הצלעות ב - G הוא לפחות $\binom{n}{2} - \lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor$.

אם n זוגי, אז $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor = \frac{n^2}{4}$, ובמקרה זה:

$\binom{n}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{2n^2-2n}{4} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2-2n}{4}$.

מהכיתה, אם $|E(G)| > 3|V(G)| - 6$ אז G אינו מישורי. אי-השוויון הזה מתקיים (עבור n זוגי) כאשר $\frac{n^2-2n}{4} > 3n - 6$, והמספר הזוגי הראשון שמקיים את אי-השוויון הוא $n = 14$.

$$(n^2 - 2n > 12n - 24 \iff n^2 - 14n + 24 > 0 \Rightarrow$$
$$n_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{196-96}}{2} = \frac{14 \pm 10}{2} = 7 \pm 5\ )$$

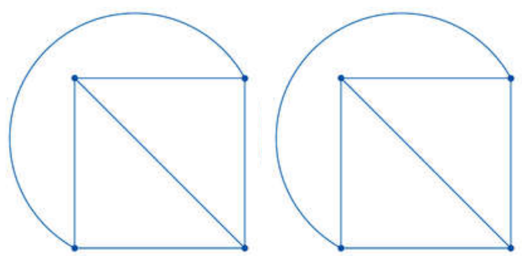
כלומר n חייב להיות זוגי ולקיים את המשוואה $(n-12)(n-2) > 0$. ה-n הקטן ביותר המקיים זאת חייב להיות $n = 14$.

אם n אי-זוגי אז $\lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor = \frac{n^2-1}{4}$, לכן אי- השוויון הגורר ש- G אינו מישורי הוא $\frac{n^2-2n+1}{4} > 3n - 6$, ומתקיים עבור n אי-זוגי כאשר $n \geq 13$.

לפיכך, ממשפט Mantel אפשר להסיק ש - $n_0 \leq 13$.

(ג) הדרך השלישית משתמשת בתוצאות על צביעת **הקדקדים** של גרף. יהי $k = \chi(G)$, המספר הכרומטי של G. עבור k-צביעה של G, ניתן להסיק מהנתונים שאין יותר משני קדקדים של G הצבועים באותו הצבע. מכאן נובע ש - $k \geq \lceil\frac{n}{2}\rceil$, כאשר n הוא מספר הקדקדים של G. אם $n \geq 11$ אז $k \geq 6$; ממשפט Heawood (משפט חמשת הצבעים) נובע ש G – אינו מישורי. מכיוון שקיים משפט חזק יותר, משפט ארבעת הצבעים, ניתן להסיק שאם $n \geq 9$ אז G אינו מישורי. אם כן, הגענו לתוצאה $n_0 \leq 9$.

(ד) כאן נוכיח ש - $n_0 = 9$. לאור אי-השוויון מהסעיף הקודם, מספיק למצוא גרף מישורי G עם 8 קדקדים, שמקיים את הנתונים בשאלה. יהי G גרף עם שני רכיבי קשירות שכל אחד מהם איזומורפי ל - K_4. אז G מישורי, ועבור כל קבוצה של 3 קדקדים, יש לפחות 2 מהם ששייכים לאותו רכיב קשירות K_4, ולכן הם שכנים.



זיווגים בגרפים

<u>הגדרה:</u> יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. זיווג ב-G הוא אוסף M של צלעות כך שלכל שתיים מהן אין קדקד משותף. הזיווג M נקרא מושלם אם כל קדקדי הגרף משתתפים בזיווג. עבור 2 קדקדים $\{u, v\} \in M$, נאמר שהם מזווגים על ידי הזיווג M.

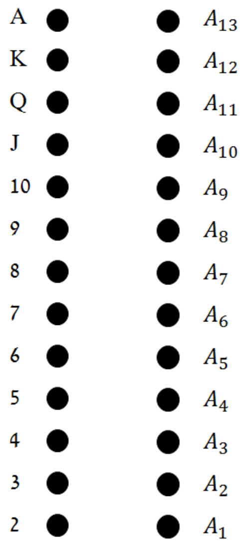
עבור $S \subseteq V$ נסמן $\Gamma(S)$ את קבוצת השכנים של הקדקדים ב-S.

<u>משפט **Hall**:</u> בגרף דו צדדי $G = (V_1, V_2, E)$, בו מתקיים $|V_1| = |V_2|$, יש זיווג מושלם אם ורק אם לכל קבוצה $S \subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$.

<u>שאלה 5:</u>

מחלקים חפיסת קלפים רגילה ל-13 קבוצות בנות 4 קלפים כל אחת. הוכח שניתן לבחור קלף בודד מכל קבוצה כך שנבחרו כל סוגי הקלפים האפשריים (2,3,...,נסיך, מלכה, מלך ואס).

<u>הוכחה:</u>



- נקרא ל-13 הקבוצות שנבנו $A_1, A_2, \dots, A_{13}$. לצורך הנוחות נקרא לכל אחד מסוגי הקלפים במספר בין 1 ל-13.
- נגדיר גרף G בעל 26 קדקדים, כאשר לכל סוג קלף מתאים קדקד וכן לכל אחת מ-13 הקבוצות מתאים קדקד.
- נעביר צלע בין הקדקד שמתאים לA_i לקדקד שמתאים לקלף ה-j אם הקלף j נמצא בקבוצה A_i.
- קיבלנו כי G גרף דו צדדי.
- תהי קבוצה $S \subseteq \{A_1, A_2, \dots, A_{13}\}$, נניח שב-S יש k קבוצות (קדקדים), ולכן יש בה 4k קלפים.
- לכן, יש בה לפחות $4k/4 = k$ סוגי קלפים.
- בפרט מספר השכנים של S בגרף שהגדרנו הוא לפחות k.
- לכן, ממשפט Hall בגרף יש זיווג מושלם.
- מהקבוצה A_i נבחר את הקלף שמתאים לקדקד שזווג לה בזיווג המושלם. מכך שקיימת ביניהם צלע, קלף זה אכן שייך ל A_i. מכיוון שכל קלף מזווג, נקבל שכל הקלפים נבחרו כנדרש.

<u>שאלה 6</u>

יהי $G = (V, E)$ גרף דו חלקי כאשר $V = X \uplus Y$. הוכיחו כי קיים ב-G זיווג מושלם אם"ם לכל קבוצה $A \subseteq V$ מתקיים ש$|A| \leq |\Gamma(A)|$ (שימו לב כי $A \subseteq V$ ולאו דווקא $A \subseteq X$).

<u>הוכחה:</u>

$\Leftarrow$: נניח כי קיים בגרף זיווג מושלם, ונניח בשלילה כי קיימת $A \subseteq V$ כך ש $|A| > |\Gamma(A)|$.

- מכך שקיים זיווג מושלם בגרף הדו-צדדי נוכל להסיק כי $|X| = |Y|$.
- נתבונן בחלקי A שבשני צדי הגרף ונקבל
  $$|A \cap X| + |A \cap Y| = |A| > |\Gamma(A)| = |\Gamma(A \cap X)| + |\Gamma(A \cap Y)|$$
- ולכן $|A \cap X| > |\Gamma(A \cap X)|$ או ש $|A \cap Y| > |\Gamma(A \cap Y)|$.
- לפי משפט Hall, אין בגרף זיווג מושלם, בסתירה.

$\Rightarrow$: נניח כי לכל קבוצה $A \subseteq V$ מתקיים ש $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

- בפרט עבור $A = X$ מתקיים $|X| \leq |\Gamma(X)| \leq |Y|$ וגם עבור $A = Y$ מתקיים: $|Y| \leq |\Gamma(Y)| \leq |X|$.
- לכן $|X| = |Y|$.
- בנוסף, מההנחה, בפרט לכל קבוצה $A \subseteq X$ מתקיים ש $|A| \leq |\Gamma(A)|$.
- לכן לפי משפט Hall יש בגרף זיווג מושלם.

עצים מתוייגים

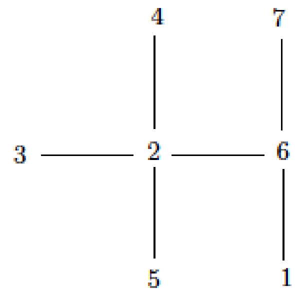
משפט (Cayley): מספר העצים המתוייגים מעל n הקדקדים $\{1,2, \dots, n\}$ הוא n^{n-2}.

דרך אחרת: מספר העצים הפורשים של הגרף השלם המתוייג K_n הוא n^{n-2}.

קוד פרופר (Prufer): התאמה בין קבוצת העצים המתוייגים מעל n קדקדים לבין אוסף הווקטורים באורך $n - 2$ המורכבים ממספרים טבעיים בין 1 לבין n, באופן שמהווה מעין קידוד של המידע הדרוש כדי ליצור את הגרף.

<u>שאלה 8:</u>

א. מהו קוד Prufer שמתאים לעץ המתויג הבא:

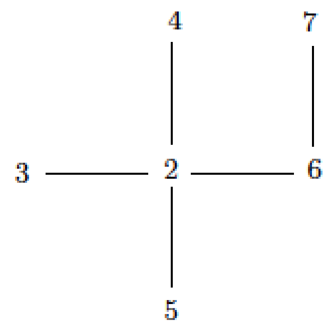


ב. שחזרו את העץ המתויג מקוד Prufer הבא: (5,5,5,1,1)

<u>פתרון:</u>

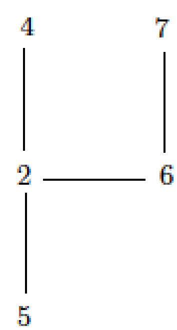
א. נתאר את שלבי בניית הקוד, כשבכל פעם נסיר את העלה בעל הערך המינימלי ונוסיף את שכנו בעץ לסדרה.

1:



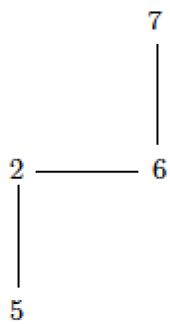
(6,__,__,__,_)

2:



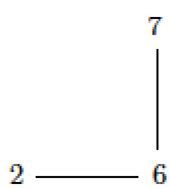
(6,2,__,__,_)

3:



(6,2,2,__,_)

4:



(6,2,2,2,_)

5:

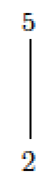
(6,2,2,2,6)

ב. נשחזר את העץ מהקוד הנתון. נתחזק קבוצת קדקדים A שתייצג את הקדקדים שטרם טופלו, וסדרת קדקדים B שתייצג את הקוד. בכל שלב נוסיף צלע בין הקדקד בעל הערך המינימלי מ- A שאינו מופיע ב- B והקדקד הראשון ב- B, ונסיר את שני הקדקדים מ- A ו- B בהתאמה.

בשלב ההתחלתי:

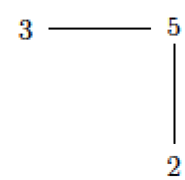
$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,
$B = (5,5,5,1,1)$,

1:



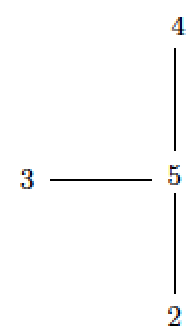
$A = \{1,3,4,5,6,7\}$,
$B = (5,5,1,1)$

2:



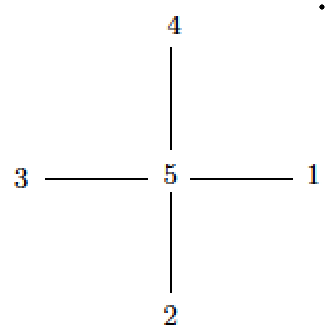
$A = \{1,4,5,6,7\}$,
$B = (5,1,1)$

3:



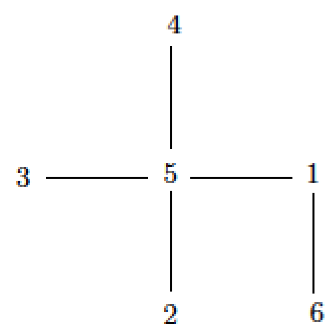
$A = \{1,5,6,7\}$,
$B = (1,1)$

4:



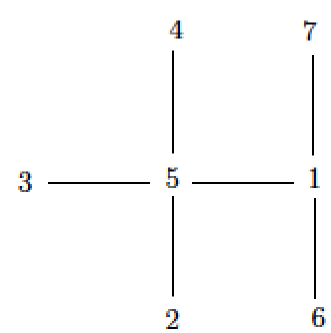
$A = \{1,6,7\}$,
$B = (1)$

5:



$A = \{1,7\}$,
$B = ()$

6:



<u>הערה</u>: נבחין כי העצים בסעיפים א' ו- ב' אינם זהים, אולם הם איזומורפיים.

<u>שאלה 9:</u>
מהו מספר העצים המתוייגים מעל n הקדקדים $\{1,2,\dots,n\}$ אשר מכילים את הצלע $e=\{1,2\}$?

<u>פתרון:</u>
נסמן ב – X את כמות העצים המתויגים שמכילים את הצלע הנתונה e. נבחין כי מספר העצים שמכילים את הצלע e שווה למספר העצים שמכילים צלע מסוימת אחרת כלשהי e'.

נספור את כמות העצים שמכילים צלע מסוימת כלשהי, על פני כל הצלעות האפשריות:

כלומר נספור את כמות הזוגות הסדורים (T,e) כאשר T עץ, ו- $e\in T$ (e צלע בעץ T).

- מספר האפשרויות לבחור צלע מסוימת הוא $\binom{n}{2}$, ומספר העצים שמכילים צלע מסוימת הוא X, לכן בסה"כ כמות העצים שמכילים צלע נתונה כלשהי היא $\binom{n}{2}\cdot X$.
- ידוע לנו ממשפט Cayley שמספר העצים המתויגים הוא n^{n-2}, ובכל עץ כזה יש בדיוק $n-1$ צלעות, לכן בסה"כ כמות העצים שמכילים צלע נתונה כלשהי היא $(n-1)\cdot n^{n-2}$.

קיבלנו את השוויון $\binom{n}{2}\cdot X=(n-1)\cdot n^{n-2}$, כלומר $X=2\cdot n^{n-3}$.

<u>שאלה 10:</u>
כמה עצים מתוייגים יש מעל הקדקדים $\{1\dots n\}$ בהם קבוצת הקדקדים הפנימיים היא בדיוק $\{1,\dots,k\}$?

<u>פתרון:</u>
נניח בשלילה ש- $k=n-1$, אז מתוך n קדקדים, רק אחד עלה. סתירה.
נשים לב כי בהכרח $k<n-1$ כי בעץ יש לפחות שני עלים.
אבחנה: קדקד הוא פנימי (לא עלה) בעץ אם ורק אם הוא מופיע בקוד פרופר של העץ.
לכן נספור כמה קודי פרופר שונים ישנם (מאורך $n-2$) מעל $\{1,\dots,k\}$, המכילים לפחות פעם אחת כל אחד מהמספרים $1,\dots,k$.
נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה:
נגדיר: S - קבוצת כל הסדרות מאורך $n-2$ מעל $\{1,\dots,k\}$.
לכל $1\le i\le k$ נגדיר: A_i - קבוצת כל הסדרות מאורך $n-2$ מעל $\{1,\dots,k\}$ שלא מכילות את המספר i.
קל לראות ש-$|S|=k^{n-2}$, ולכל i מתקיים $|A_i|=(k-1)^{n-2}$ וכן גודל חיתוך של j קבוצות כלשהן הוא $(k-j)^{n-2}$. לכן התשובה היא

$$\left|S\ \setminus\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^{n-2}$$