תרגול 1 – תרגול חזרה

מושגים

תורת הקבוצות:

קבוצה היא אוסף של איברים שונים זה מזה. אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה.

שייכות לקבוצה: לכל עצם x ולכל קבוצה A בעולם, x שייך ל – A $(x \in A)$ או x לא שייך ל – A $(x \notin A)$.

שוויון קבוצות: שתי קבוצות A ו – B תקראנה שוות (נסמן $A = B$) אם ורק אם יש להן בדיוק אותם איברים.
על מנת להוכיח שוויון של קבוצות עלינו להראות כי A מוכלת ב – B $(A \subseteq B)$ **וגם** B מוכלת ב – A $(B \subseteq A)$.
במילים אחרות, עלינו להראות כי עבור כל איבר x, אם $x \in A$ אז $x \in B$ **וגם** אם $x \in B$ אזי $x \in A$.

קבוצות חשובות:

- $\mathbb{N}$ - קבוצת המספרים הטבעיים $\{1,2,3,4...\}$
- $\mathbb{Z}$ - קבוצת המספרים השלמים $\{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$
- $\mathbb{Q}$ - קבוצת המספרים הרציונליים $\{\mathbb{Z} \cup$ שברים$\}$ (שניתן לייצגם כשבר)
- $\mathbb{R}$ - קבוצת המספרים הממשיים, כל המספרים הרציונליים והאי-רציונליים (מספרים שלא ניתן להציג כמנה של שלמים לדוגמא: π)
- $\emptyset$ - הקבוצה הריקה $\{\}$

קבוצת החזקה: נניח כי נתונה קבוצה A, נסמן את קבוצת החזקה של A כ – $P(A)$. קבוצת החזקה של A תכיל את כל התת קבוצות של A, ז"א $P(A) = \{A' | A' \subseteq A\}$.

פעולות על קבוצות: בהינתן שתי קבוצות A ו – B:

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ וגם } x \in B\}$

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ או } x \in B\}$

$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ וגם } x \notin B\}$

זוגות סדורים ומכפלה קרטזית:

זוג סדור זו רשימה (a, b) של שני איברים כשיש חשיבות לסדר (בשונה מקבוצות).

המכפלה הקרטזית של שתי קבוצות A ו – B היא הקבוצה של כל הזוגות הסדורים של איבר מ – A ואיבר מ – B:
$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.
המכפלה הקרטזית של n קבוצות $A_1, A_2, \dots, A_n$ היא הקבוצה:
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$.

יחסים:

יחס הוא קבוצה שכל איבריה הם זוגות סדורים.
בהינתן קבוצות A ו – B, תת-קבוצה $R \subseteq A \times B$ נקראת יחס מ – A ל – B.

נתבונן ביחס $R \subseteq A \times A$:

R יקרא רפלקסיבי אם לכל $a \in A$, מתקיים כי $(a, a) \in R$.

R יקרא סימטרי אם לכל $a, b \in A$, מתקיים כי אם $(a, b) \in R$ אזי $(b, a) \in R$.

R יקרא טרנזיטיבי אם לכל $a, b, c \in A$, מתקיים כי אם $(a, b) \in R$ וגם $(b, c) \in R$ אזי $(a, c) \in R$.

נאמר כי R הוא יחס שקילות אם R הוא רפלקסיבי, סמטרי וטרנזיטיבי.

עבור $a \in A$, מחלקת השקילות של a ב- R היא קבוצת כל איברי A שעומדים ביחס R עם a:
$[a]_R = {}^{a}/_{R} = \{b \in A | (a, b) \in R\}$

קבוצת כל מחלקות השקילות של יחס שקילות R נקראת החלוקה המושרית ע"י R:
${}^{A}/_{R} = \{{}^{a}/_{R} | a \in A\}$

לכל <u>חלוקה</u> של A מתקיים כי:

- $\emptyset \notin {}^{A}/_{R}$
- מחלקות השקילות השונות הן זרות.
- איחוד כל המחלקות השקילות הוא A.

טענה: ישנה התאמה חח"ע ועל בין חלוקות של A ויחסי השקילות על A.

R הוא <u>אנטי-סימטרי</u> אם לכל $a, b \in A$, מתקיים כי אם $(a,b) \in R$ וגם $(b,a) \in R$ אזי $a = b$.

נאמר כי R הוא <u>יחס סדר חלקי</u> אם הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

פונקציות:

תהיינה A, B שתי קבוצות. יחס $f \subseteq A \times B$ נקרא <u>פונקציה</u> מ – A ל – B, אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ אחד ויחיד כך ש – $(a,b) \in f$.

$f: A \to A$ נקראת <u>תמורה</u> אם f היא חח"ע ועל.

דוגמה:

תהי $f: A \to B$ פונקציה. נגדיר $range(f) = \{b | (a,b) \in f, a \in A\}$.

תהיינה A, B קבוצות ויהי F אוסף כל הפונקציות מהקבוצה A לקבוצה B (נסמן $F = B^A$).
נגדיר יחס $R \subseteq F \times F$ כך ששתי פונקציות $f, g \in F$ מקיימות $(f,g) \in R$ אם ורק אם $range(f) = range(g)$.

הראו כי היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

אינדוקציה:

אינדוקציה היא כלי להוכחת טענות הקשורות במספרים הטבעיים.

<u>אינדוקציה רגילה</u>:

- מוכיחים את הטענה עבור הבסיס.
- הנחת האינדוקציה: מניחים שהטענה נכונה עבור $n \in \mathbb{N}$.
- צעד: מוכיחים את הטענה עבור $n + 1$, בהסתמך על ההנחה.

<u>אינדוקציה שלמה</u>:

- (מוכיחים את טענה עבור הבסיס).
- הנחת האינדוקציה: מניחים שהטענה נכונה **לכל** מספר **קטן ממש** מ – n.
- צעד: מוכיחים את הטענה עבור n, בהסתמך על ההנחה.

תרגילים

תרגיל 1:

הראו כי כל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים.

פתרון:

נוכיח את הטענה באינדוקציה שלמה על n.

<u>בסיס</u>: $n = 2$, 2 הוא ראשוני, ולכן מהווה מכפלה של מספרים ראשוניים.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח שהטענה נכונה עבור כל $m < n$ ונוכיח עבור n.

<u>צעד האינדוקציה</u>: אם n ראשוני – סיימנו. אחרת, קיימים שני מספרים $s, t \in \mathbb{N}$ כך ש – $n = s \cdot t$ ו – $1 < s, t < n$. אולם אז לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לרשום את s ו- t כמכפלה של גורמים ראשוניים, ויחד נקבל מכפלה של מספרים ראשוניים שערכה n.

תרגיל 2:

נתון הקוד הבא:

$countNodes\ (Node\ n)$

$\{$

$\quad if\ (n\ is\ null)$

$\qquad return\ 0$

$\quad return\ 1\ +\ countNodes(\ n.getLeftSon())\ +\ countNodes(\ n.getRightSon())$

$\}$

קוראים לפונקציה לעיל עם שורש העץ. הוכיחו שהערך שיוחזר הוא מספר הקדקודים בעץ.

פתרון:

נשתמש באינדוקציה שלמה על גודל העץ.

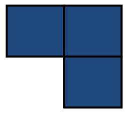
<u>בסיס</u>: עץ ריק. הפונקציה תחזיר אפס היות ותנאי העצירה יתקיים.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח שהטענה נכונה עבור כל עץ עם מספר קדקודים שקטן מ n.

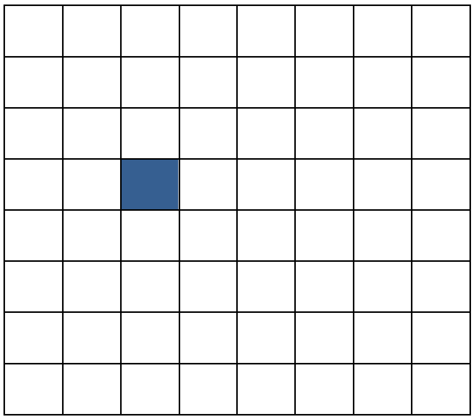
<u>צעד האינדוקציה</u>: עבור עץ בגודל n ידוע שתתי העץ הימניים והשמאליים גודלם קטן ממש מ - n. לכן בהרצת הפונקציה על עץ בגודל n , ע"פ הנחת האינדוקציה הקריאות הרקורסיביות $countNodes(\ n.getLeftSon())$ ו-$countNodes(\ n.getRightSon())$ יחזירו את מספר הקדקודים בתת העץ השמאלה והימני בהתאמה. מכאן שבהוספת 1 לסכומם נקבל n כדרוש.

תרגיל 3:

נתון לוח משבצות בגודל $m \times m$ שמשבצת אחת שלו צבועה בשחור.
בנוסף יש מרצפת מיוחדת שנראית כמו לוח 2×2 שפינתה האחת חסרה, כבתרשים להלן.
הראו כי עבור m שהוא חזקה של 2, ניתן לכסות את הלוח כולו (פרט למשבצת השחורה) בעזרת המרצפת המיוחדת, כאשר ניתן לסובב אותה בכיוון הרצוי.



המרצפת המיוחדת



הלוח

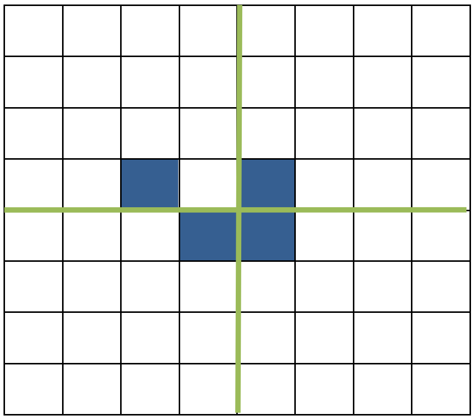
פתרון:

מכיוון ש – m הוא חזקה של 2, אפשר להניח ש – $m = 2^n$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

<u>בסיס</u>: $n = 0$. במקרה זה $m = 2^0 = 1$, כלומר, מדובר בלוח 1×1 בעל משבצת אחת. בהכרח המשבצת הזו היא המשבצת השחורה ולכן כבר מכוסה.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח כי הטענה נכונה עבור n, ז"א לוחות בגודל $2^n \times 2^n$ ניתן לכסות ע"י המרצפות המיוחדות.

<u>צעד האינדוקציה</u>: נתבונן בלוח $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ונחלק אותו ל – 4 לוחות שווים, כ"א בגודל $2^n \times 2^n$. המשבצת השחורה נמצאת באחד מארבעת הלוחות הללו. ניקח מרצפת מיוחדת אחת ונמקם אותה במרכז הלוח, כאשר פינתה החסרה נמצאת בלוח שמכיל את המשבצת השחורה. כעת קיבלנו את ארבעת הלוחות, כאשר בכ"א מהם משבצת אחת שחורה ולכן לפי הנחת האינדוקציה ניתן לכסות אותם. כל הכיסויים הללו יחד מהווים כיסוי של הלוח כולו.



<u>שימושים לא נכונים באינדוקציה:</u>

תרגיל 4:

הגובה של עץ בינארי בעל n קדקודים הוא $n-1$.

פתרון:

נוכיח באינדוקציה על n – מספר הקדקודים בעץ.

<u>בסיס</u>: $n=1$. עץ עם קדקוד אחד הינו בהכרח בעל גובה 0.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח שעץ עם n קודקודים הוא בגובה $n-1$.
<u>צעד האינדוקציה</u>: אם נוסיף לעץ קדקוד אחד כך שיהיה הבן של הבן הנמוך ביותר בעץ, גובה העץ יגדל גם הוא באחד. לכן, גובה העץ הוא n.

<u>היכן הטעות?</u>: לא ניתן "לבנות" את העץ בעל $n+1$ הקודקודים מעץ בגודל n עליו מניחים כי טענת האינדוקציה מתקיימת. יש להראות **שכל עץ** בעל $n+1$ קדקודים ניתן להקטין לעץ בינארי בגודל n, עליו אפשר להפעיל את הנחת האינדוקציה, ולבסוף להראות שבצירוף הקדקוד שהוסר הטענה עדיין מתקיימת (עבור $n+1$).

לו בצעד האינדוקציה היינו מתחילים עם עץ בעל $n+1$ קדקודים, מסירים עלה, מפעילים את הנחת האינדוקציה ואז מוסיפים אותו חזרה, הוספתו לא בהכרח הייתה מגדילה את גובה העץ (כבר עבור המקרה בו $n=3$).

תרגיל 5:

ישנה קבוצת איים עבורם המעבר בין איים בקבוצה מתאפשר רק באמצעות גשרים המחברים בין זוגות של איים. הראו שאם לא קיימים איים מבודדים ניתן להגיע מכל אי לכל אי.

פתרון:

נוכיח באינדוקציה על n – מספר האיים.

<u>בסיס</u>: $n=2$.אם קיימים 2 איים, היות ואף אחד לא מבודד אז הם בהכרח מחוברים אחד לשני.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח שאם ישנם n איים ואף אי מבודד ניתן יהיה להגיע לכל אי מכל אי.
<u>צעד האינדוקציה</u>: נוסיף אי נוסף ל-n האיים שמחוברים. היות ואין איים מבודדים האי הנוסף יהיה מחובר לאי כלשהו. כעת ניתן להגיע מכל אי לאי שאליו חובר האי הנוסף ע"פ הנחת האינדוקציה. לכן ניתן להגיע מכל אי לכל אי.

<u>היכן הטעות?</u>: לא ניתן "לבנות" את קבוצת $n+1$ האיים מקבוצה בגודל n עליה מניחים כי טענת האינדוקציה מתקיימת. יש להראות **שכל קבוצת איים** בגודל $n+1$ ניתן להקטין לקבוצה בגודל n שעומדת בתנאים (אין בה איים מבודדים), עליה אפשר להפעיל את הנחת האינדוקציה ולבסוף להראות שבצירוף האי שהוסר הטענה עדיין מתקיימת (עבור $n+1$).

לו בצעד האינדוקציה היינו מתחילים עם קבוצה של $n+1$ איים, לא בהכרח הייתה דרך להסיר אי (עם הגשרים המחברים אותו לאיים אחרים) ולקבל קבוצה של n איים ללא איים מבודדים (לדוגמה – שני זוגות של איים מחוברים כאשר כל זוג מחובר בגשר).

תרגיל 6:

הוכיחו שכל הסוסים בעולם הינם באותו הצבע.

פתרון:

נוכיח באינדוקציה על n - כמות הסוסים בעולם.

<u>בסיס</u>: $n = 1$. סוס בודד הוא תמיד בצבע אחד.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח שעבור קבוצת סוסים שגודלה קטן ממש מ- n, כל הסוסים באותו צבע.

<u>צעד האינדוקציה</u>: נוכיח את הטענה לקבוצה בגודל n, $\mathrm{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. נגדיר 2 קבוצות בגודל $n - 1$ הנבדלות באיבר אחד, $\mathrm{H}_1 = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$ ו- $\mathrm{H}_2 = \{h_2, h_3, \dots, h_n\}$.

ע"פ הנחת האינדוקציה לכל הסוסים ב-H_1 אותו הצבע וכן לכל הסוסים ב-H_2 אותו הצבע. אולם הסוס h_2 נמצא בשתי הקבוצות ולכן כל הסוסים בשתי הקבוצות באותו הצבע והוא צבעו של h_2.

<u>היכן הטעות?</u>: הכישלון הוא במעבר מ - $n = 1$ ל - $n = 2$. לא ניתן ליישם את צעד האינדוקציה כפי שנכתב עבור $n = 2$ שכן הקבוצות H_1 ו- H_2 יכילו כל אחת איבר אחד, ולא יחלקו איבר משותף.