מס' נבחן:_______________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' סמסטר אביב	ד"ר סיגל אורן, פרופ' מתיא כץ, פרופ' עופר נימן, ד"ר נתן רובין, ד"ר יעל שטיין
26.7.2019 09:00	ג'ורדן איתן, יאיר אשלגי, גיל מלניק, נדב ברק, מני סדיגורסקי, נתי פטר, ארנולד פילצר, אור קירלי
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **<u>עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק</u>**. משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה</u>.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

אי-שוויון מרקוב: $\Pr(X \geq \lambda E[X]) \leq \frac{1}{\lambda}$, ל-X אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב: $\Pr(|X - E[X]| \geq C) \leq \frac{V[X]}{C^2}$

בהצלחה !

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8
ציון								

<u>סה"כ</u>	

מס' נבחן:________________

<u>חלק א – ענו על 3 מבין השאלות 1-4</u>

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו באופן קומבינטורי כי לכל n,k טבעיים, $k \le n$, מתקיים $\sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} \cdot \binom{n}{l} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2^{n-k}$

הבעיה: מתוך קבוצה של n אנשים יש לבחור ועד בגודל של לפחות k, ומתוך הועד לפחות k אנשים שיעמדו בראש k ועדות שונות (כל אדם יכול להיות ראש של ועדה אחת לכל היותר).

<u>אגף שמאל</u>: מתוך קבוצה של n אנשים בוחרים ועד בגודל של לפחות k אנשים, מתוך הועד לאחר מכן צריך לבחור ראשי ועדות ל k ועדות שונות.
הסבר לביטוי מתמטי: מעבר על כל גדלי הועד האפשריים $\sum_{l=k}^{n}$, בחירה של האנשים לועד $\binom{n}{l}$ (בחירה ללא חשיבות לסדר), בחירת ראשי הועדות מתוך הועד $\frac{l!}{(l-k)!}$ (בחירת k אנשים מתוך l עם חשיבות לסדר הבחירה ללא חזרות).

<u>אגף ימין</u>: בוחרים תחילה k אנשים שיעמדו בראש הועדות (וגם יהיו חברי ועד בעצמם) ולאחר מכן לכל אדם אחר מחליטים האם הוא יהיה חבר ועד או לא.
הסבר לביטוי מתמטי: בחירת k האנשים שיעמדו בראש ועדות $\frac{n!}{(n-k)!}$ (בחירה עם חשיבות לסדר ללא חזרות), עבור כל אחד מ n-k האנשים שנותרו בוחרים האם הוא יהיה חבר ועד או לא 2^{n-k}.

מס' נבחן: ______________

<u>שאלה 2</u>

מהו מספר הסדרות מאורך n מעל $\{0,1,2\}$ שאינן מכילות את הרצף 00? מצאו ביטוי מפורש.

נסמן 3 נוסחאות:

a_n- סדרות באורך n שאינן מכילות את הרצף 00

b_n- סדרות באורך n שאינן מכילות את הרצף 00 ומסתיימות ב 0

c_n- סדרות באורך n שאינן מכילות את הרצף 00 ומסתיימות ב 1 או ב 2

ע"פ הגדרות הללו נרצה למצוא נוסחא ל a_n שכן נוסחא זו תייצג את הפתרון שלנו. נחשב תחילה את כלל הנוסחאות כתלות בשאר הסדרות: $c_n = 2 \cdot a_{n-1}$, $b_n = c_{n-1}$, $a_n = b_n + c_n$ נציב בנוסחאה המקורית ונקבל את נוסחת הנסיגה הבאה :

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} , a_0 = 1, a_1 = 3$$

זוהי נוסחה לינארית והומוגנית וניתן לפתור אותה כמו שלמדנו בכיתה:

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \to x \in \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$$

כלומר הנוסחה הכללית היא מהצורה :

$$a_n = A * \left(1-\sqrt{3}\right)^n + B * \left(1+\sqrt{3}\right)^n$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל ש :

$$a_n = \frac{1}{6}\left((3 - 2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^n + (3 + 2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n\right)$$

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 3</u>
הוכיחו כי לכל $n \geq 2$, קיים גרף G עם n קודקודים, כך שקיימים בו $n-1$ קודקודים שדרגותיהם שונות זו מזו.

נוכיח באינדוקציה על n.
מקרה הבסיס n=2, אזי לגרף עם 2 קודקודים וצלע אחת קיים קודקוד אחד המקיים את התנאי (באופן ריק).
צעד: נניח שקיים גרף G' עם n קודקודים המכיל n-1 קודקודים מדרגות שונות זו מזו.
<u>אבחנה</u>: לא יתכן כי יש ב-G' קודקוד מדרגה 0 וגם קודקוד מדרגה n-1 (המחובר לכולם).
נבנה גרף G עם n+1 קודקודים, ע"י הוספת קודקוד אחד x לגרף G', ונחבר צלעות ממנו לפי חלוקה למקרים.
<u>מקרה א'</u>: יש ב-G' קודקוד מדרגה 0. אזי נחבר את x לכל קודקודי G'. דרגת כולם עלתה ב-1, לכן נותרו שם n-1 קודקודים מדרגות שונות זו מזו. מהאבחנה, אין ב-G' קודקוד מדרגה n-1, לכן לא יווצר אף קודקוד של G' מדרגה n, שהיא דרגת x. כלומר יחד עם x יהיו n קודקודים מדרגות שונות זו מזו.
<u>מקרה ב'</u>: אין ב-G' קודקוד מדרגה 0. אזי x יהיה קודקוד מבודד. יחד עם n-1 הקודקודים מדרגות שונות של G', נקבל שוב n קודקודים מדרגות שונות.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו כי בכל גרף מישורי שאינו מכיל קבוצה ב"ת בגודל 4 יש לכל היותר 12 קודקודים. (זכרו כי קבוצת קודקודים נקראת ב"ת אם היא לא מכילה צלעות.)

ממשפט ארבעת הצבעים הגרף הוא 4-צביע. נזכור כי כל הקודקודים באותו הצבע הם קבוצה ב"ת (כי לכל צלע יש צבעים שונים לקודקודיה), לכן מהנתון, כל אחד מארבעת הצבעים יכול לשמש לצביעת 3 קודקודים לכל היותר. נקבל כי יש ב-G לכל היותר $3 \cdot 4 = 12$ קודקודים.

<u>פתרונות חלופיים (לחסם גדול יותר מ-12):</u>

1) בגרף המשלים $\bar{G}$ אין קליקה מגודל 4, לכן ממשפט טוראן יש בו לכל היותר $\frac{n^2}{3}$ צלעות. ממשפט שנלמד בכיתה בגרף מישורי יש לכל היותר 3n-6 צלעות, נקבל כי m, מספר הצלעות ב-G, מקיים

$$\binom{n}{2} - \frac{n^2}{3} \leq m \leq 3n - 6$$

לאחר פישוט נקבל $n^2 - 21n + 36 \leq 0$, לכן $n \leq 19$.

2) בגרף מישורי G אין K_5 כתת-גרף, ומהנתון בגרף המשלים אין K_4 כתת-גרף. לכן ממשפט ארדוש-סקרס, מספר הקודקודים ב-G קטן ממש מ R(5,4)=35 .

3) בגרף G יש $\binom{n}{4}$ רביעיות קודקודים, כל רביעייה כזו מכילה צלע אחת לפחות. מצד שני, כל צלע שייכת ללכל היותר $\binom{n-2}{2}$ רביעיות שונות. לכן מספר הצלעות m מקיים

$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n-2}{2}} \leq m \leq 3n - 6$. נפשט ונקבל $n^2 - 37n + 72 \leq 0$ כלומר שוב n<35.

מס' נבחן:_______________

חלק ב – ענו על 3 מבין השאלות 5-8

שאלה 5

הוכיחו את משפט Erdős-Szekeres: $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$ לכל s,t טבעיים חיוביים.

הוכח בכיתה.

<u>שאלה 6</u>

יהיו $G_1 = (V_1, E_1)$ ו $G_2 = (V_2, E_2)$ גרפים כל אחד עם n קודקודים. נגדיר את גרף המכפלה $G_x = (V_x, E_x)$ באופן הבא : $V_x = \{(u, v): \ u \in V_1 \ \wedge v \in V_2\}$

$E_x = \{\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}: \ \{u_1, u_2\} \in E_1 \vee \{v_1, v_2\} \in E_2\}$

הוכיחו או הפריכו: אם בשני הגרפים G_1, G_2 יש מעגל אוילר, אז בהכרח ב G_x יש מעגל אוילר.

נוכיח כי הטענה נכונה, אם בשני הגרפים G_1, G_2 יש מעגל אוילר, אזי גם ב- G_x יש מעגל אוילר.

(i) נראה תחילה כי ב- G_x קיים לכל היותר רכיב קשירות אחד המכיל קשתות:
יהי $(u, v) \in V_x$ קודקוד כלשהו של G_x . אם $\deg_{G_1}(u) = 0$ וגם $\deg_{G_2}(v) = 0$ אזי לפי הגדרת E_x נקבל כי $\deg_{G_x}(u, v) = 0$ וזהו קודקוד מבודד.
נביט בזוג קודקודים שאינם מבודדים $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V_x$. בה"כ $\deg_{G_1}(u_1) > 0$, כלומר קיימת צלע $\{u, u_1\} \in E_1$ לאיזה $u \in V_1$. אם $\deg_{G_2}(v_2) > 0$ אזי קיימת צלע $\{v, v_2\} \in E_2$ לאיזה $v \in V_2$, ולכן קיים המסלול $((u_1, v_1), (u, v), (u_2, v_2))$. אחרת, כיוון ש (u_2, v_2) קודקוד לא מבודד, בהכרח $\deg_{G_1}(u_2) > 0$. מאחר שב-G_1 יש מעגל אוילר, יש מסלול בין כל זוג קודקודים מדרגה חיובית, בפרט קיים מסלול $(u_1 = z_0, z_1, \dots, z_t = u_2)$. מכאן שקיים ב-$G_x$ המסלול: $((u_1, v_1), (z_1, v_2), \dots, (u_2, v_2))$, כלומר הקודקודים הללו באותו רכיב קשירות.

(ii) כעת נראה שכל הדרגות בגרף G_x זוגיות, וזה יראה שקיים בו מעגל אוילר. יהי $(u, v) \in V_x$ קודקוד כלשהו.
נסמן $A = \{(x, y) : x \in N(u), y \in V_2\}$, $B = \{(x, y) : x \in V_1, y \in N(v)\}$
מהגדרת גרף המכפלה שכני הקודקוד (u, v) הם $A \cup B$, אלו הם כל הזוגות שמכילים שכן של u או של v בגרף המתאים. מעקרון הסכום:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= \deg_{G_1}(u) \cdot n + \deg_{G_2}(v) \cdot n - \deg_{G_1}(u) \cdot \deg_{G_2}(v)$$

כיוון ששני הגרפים G_1, G_2 מכילים מעגל אוילר, כל הדרגות בהם זוגיות, לכן גם $|A \cup B|$ זוגי.

- התקבלו פתרונות בהם הונח כי G_1, G_2 קשירים

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 7</u>

שלשה בתמורה של {1,…,n} היא קטע באורך 3 של התמורה שבו המספר הראשון קטן באחד מהשני והשני קטן באחד מהשלישי. למשל, בתמורה (7,8,9,6,2,3,4,5,1) יש 3 שלשות. חשבו את תוחלת מספר השלשות בתמורה של {1,…,n} המוגרלת באופן אחיד מאוסף כל התמורות.

נגדיר מ"מ $f:\Omega \to \mathbb{R}$, המתאים לכל תמורה את מס' השלשות בה.

נגדיר בנוסף עוד n-2 מ"מ מציינים: לכל $1 \le i \le n-2$ המ"מ $f_i:\Omega \to \mathbb{R}$ יתאים לכל תמורה 1 אם"ם השלשה $(i, i+1, i+2)$ מוכלת בתמורה (ו-0 אחרת).

נשים לב שכיוון שחייב להתקיים ש $i+2 \le n$ אכן הגדרנו רק n-2 מ"מ כנ"ל.

אז מתקיים $f = \sum_{i=1}^{n-2} f_i$.

נרצה לחשב את $E(f)$.

נגדיר את המאורע A_i המתאים למ"מ המציין f_i, לכל i:

אוסף התמורות המכילות את השלשה $A_i = (i, i+1, i+2)$

אז $|A_i| = (n-2)!$ כיוון שניתן להתייחס אל השלשה הנ"ל כאבר אחד ויש עוד *n-3* אברים, ואת כל הנ"ל צריך לסדר בשורה.

לכן $E(f_i) = \Pr(f_i = 1) = \Pr(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$.

כעת, מלינאריות התוחלת נקבל:

$E(f) = E(\sum_{i=1}^{n-2} f_i) = \sum_{i=1}^{n-2} E(f_i) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n(n-1)}$.

<u>שאלה 8</u>

יהי X משתנה מקרי המקיים E[X]=2 וגם Pr[-1<X<5]=1/3.

א. (7 נק') הוכיחו כי השונות של X היא לפחות 6.

$\frac{1}{3} = \Pr[-1 < X < 5] = \Pr[-3 < X - 2 < 3] = \Pr[|X - E(X)| < 3] = 1 - \Pr[|X - E(X)| \geq 3]$.

לכן: $\Pr[|X - E(X)| \geq 3] = \frac{2}{3}$.

מאי שיוויון צ'בישב נסיק: $\Pr[|X - E(X)| \geq 3] \leq \frac{Var(X)}{3^2}$.

משתי המשוואות הנ"ל נקבל: $\frac{2}{3} \leq \frac{Var(X)}{9}$ כלומר $Var(X) \geq 6$. כנדרש.

ב. (10 נק') נניח כעת כי השונות של X היא בדיוק 6. יהי Y משתנה מקרי המוגדר ע"י Y=3X-2. חשבו את התוחלת והשונות של Y.

ראשית, מלינאריות התוחלת: $E(Y) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$

כלומר $E(Y) = 4$.

נזכור שעבור c קבוע $Var(c) = 0$ ו- $Var(c \cdot X) = c^2 \cdot Var(X)$.

לכן, כיוון שמ"מ X וקבוע הם בת"ל, נוכל להסיק:

$Var(Y) = Var(3X - 2) = 3^2 Var(X) - Var(2) = 3^2 \cdot 6 - 0 = 54$.

כלומר $Var(Y) = 54$.

בהצלחה !