מס' נבחן:________________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א' סמסטר אביב	ד"ר סיגל אורן, פרופ' מתיא כץ, פרופ' עופר נימן, ד"ר נתן רובין, ד"ר יעל שטיין
7.7.2019 13:30	ג'ורדן איתן, יאיר אשלגי, גיל מלניק, נדב ברק, מני סדיגורסקי, נתי פטר, ארנולד פילצר, אור קירלי
חומר עזר	אסור
משך הבחינה	שלוש שעות

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק. משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה.
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.

אי-שוויון מרקוב: $Pr\,(X\ \geq \lambda E[X])\ \leq \frac{1}{\lambda}$, ל-X אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב: $Pr(|X-E[X]| \geq C) \leq \frac{V[X]}{C^2}$

בהצלחה !

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8
ציון								

סה"כ	

חלק א – ענו על 3 מבין השאלות 1-4

שאלה 1

יהי G גרף עם $n \geq 3$ קדקודים ו- m צלעות.

הוכיחו: אם $m > \frac{n^2-3n+4}{2}$, אז יש ב- G מעגל המילטון

נוכיח שתנאי Ore מתקיים. כלומר, נוכיח שלכל שני קדקודים שאינם שכנים מתקיים שסכום הדרגות שלהם גדול או שווה ל- n.
יהיו u, v שני קדקודים כך ש- $\{u, v\}$ לא ב- E, ונניח בשלילה ש- $deg(u) + deg(v) < n$, כלומר נניח בשלילה ש- $deg(u) + deg(v) \leq n - 1$. נחסום מלמעלה את m (מספר הצלעות ב- G), ונראה שהחסם הנ"ל קטן מהנחתנו לגבי m, כלומר סתירה. ואמנם,

$$m \leq \binom{n-2}{2} + (n-1) = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

מפני שאגף ימין סופר את מספר הצלעות בקליקה בגודל $|V| - |\{u, v\}| = n - 2$, ועוד מספר הצלעות שמחברות בין u ו- v ובין שאר קדקודי הגרף.

<u>טעויות נפוצות:</u>

- שימוש במשפט Ore או Dirac והסתמכות על כך שהדרגה הממוצעת גדולה (במקום לבחון את הדרגה המינימלית כנדרש במשפטים אלו)
- שגיאות חישוב שהובילו לכך שניתן היה להשתמש במשפט Dirac
- הוכחות באינדוקציה באופן שגוי
    - הנחת האינדוקציה לא מתקיימת בהכרח.
    - לאחר "החזרת" הקדקוד שהוסר לא בהכרח ניתן לשלבו במעגל שקיים מההנחה.

מס' נבחן:________________

שאלה 2

ביום מסוים מקבלת רשות השידור חמישה תשדירים שונים של תעמולת בחירות. שניים מהתשדירים באורך דקה אחת, ושלושה מהם באורך שתי דקות. על העורכים להרכיב מהתשדירים תוכנית רצופה שאורכה 35 דקות, ללא הגבלה על מספר השידורים של כל תשדיר. כמה תוכניות שונות אפשריות?
(הדרכה: כתבו נוסחת נסיגה המתארת את מספר האפשרויות, ופתרו אותה.)

נסמן ב a_n תוכנית באורך n דקות . נפריד למקרים:

1) אם מתחילים את התוכנית בתשדיר באורך דקה אז נותרת תוכנית באורך n-1 דקות וכן יש שני תשדירים מסוג זה. סך הכול: $2a_{n-1}$ אפשריות.
2) אם מתחילים את התוכנית בתשדיר באורך שתי דקות אז נותרת תוכנית באורך n-2 דקות וכן יש שלושה תשדירים מסוג זה. סך הכול: $3a_{n-2}$ אפשריות.

לכן סך הכול קיבלנו ש לכל $n \geq 2$ מתקיים ש:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

כמן כן , ניתן לראות שעבור תוכנית באורך 0 דקות יש רק אפשרות יחידה (התוכנית הריקה) ועבור תוכנית באורך דקה אחת יש שתי אפשריות (התשדירים באורך דקה). כלומר:

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

כעת נפתור את נוסחת הנסיגה , לשם כך נמצא את הפולינום האופייני שלה ונשווה לאפס:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x \in \{-1,3\}$$

לכן לפי משפט שלמדנו בכיתה על נוסחאות נסיגה , נקבל שהפתרון הכללי של נוסחת הנסיגה הוא:

$$a_n = A3^n + B(-1)^n$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה על מנת למצוא את המקדמים :

$$A + B = 1\ , 3A - B = 2 \rightarrow 3A - 1 + A = 2 \rightarrow 4A = 3 \rightarrow A = \frac{3}{4}$$

ולכן:

$$A = \frac{3}{4} \rightarrow B = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

כלומר:

$$a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4} \cdot (-1)^n$$

כעת אנו מחפשים את a_{35} , לכן כמות התוכניות השונות באורך 35 דקות הן:

$$a_{35} = \frac{3^{36} - 1}{4}$$

שאלה 3

יהי G גרף מישורי דו״צ 3-רגולרי. הוכיחו כי יש בגרף לפחות 6 פאות מרובעות.

נוכיח תחילה את הטענה עבור גרפים קשירים:

מכיוון שהגרף הינו 3-רגולרי, נקבל ממשפט הדרגות:

$$3n = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$$

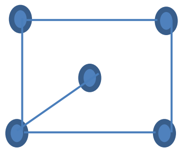
מכיוון שהגרף קשיר ומישורי, נוכל להשתמש בנוסחת אוילר עבור גרפים קשירים:

$$n + f - e = 2$$

נציב את השוויון הנ״ל בנוסחה ונקבל:

$$(1)\ f = 2 + \frac{n}{2}$$

ניזכר כי גרף הינו דו צדדי אם ורק אם לא קיימים בו מעגלים מאורך אי זוגי. לכן, מכיוון שכל פאה בגרף מוקפת במעגל, מספר הצלעות המינימלי שחל בפאה הינו 4. יתר על כן, אין בגרף פאות מגודל 5 היות והפאות היחידות האפשריות מגודל 5 הן מעגל מאורך 5 (לא מתאפשר מכיוון שאין מעגלים מאורך אי זוגי) או פאה מהסוג הבא שאיננה 3 רגולרית:



לכן, כל פאות הגרף הינן מגודל 4 (מרובעות) או מגודל 6 ומעלה. נסמן ב-x את מספר הפאות המרובעות בגרף. נסכום את מספר הצלעות על כל פאות הגרף. כל צלע מופיעה לכל היותר בשתי פאות שונות בגרף ולכן:

$$4x + 6(f - x) \le \sum_{f_i \in F} |E_{f_i}| \le 2e$$

נציב את נוסחה (1) בתוך אי השוויון:

$$4x + 6\left(2 + \frac{n}{2} - x\right) \le 2e = 3n$$

$$-2x + 12 + 3n \le 3n$$

$$x \ge 6$$

כלומר, בגרף קשיר, דו צדדי, מישורי ו3-רגולרי ישנן לפחות 6 פאות מרובעות.

היות והטענה נכונה עבור גרפים קשירים, נסיק כי לכל גרף קשיר ישנם לפחות 5 פאות פנימיות מרובעות (ייתכן כי אחת מהן היא הפאה האינסופית). מכיוון שכל רכיב קשירות בגרף הינו גרף מישורי דו״צ 3-רגולרי בפני עצמו, נקבל כי בגרף עם $k \ge 2$ רכיבי קשירות יש לפחות $5k \ge 10$ פאות פנימיות מרובעות.

שאלה 4

בליגת העל יש 18 קבוצות, בכל סיבוב כל אחת מהקבוצות משחקת מול קבוצה אחרת (שלא שיחקה מולה עד כה). הוכיחו כי לאחר 8 סיבובים בהכרח קיימות 3 קבוצות שעדיין לא שיחקו זו מול זו.

פתרון:

נגדיר גרף כך: כל קבוצה מהקבוצות שמשחקות תהיה קדקוד. נחבר צלע בין 2 קדקודים אם הקבוצות שהם מייצגים התחרו זו בזו. אז נקבל גרף $G = (V, E)$ כאשר $|V| = 18$. כיוון שהיו 8 סיבובים, ובכל סיבוב **כל קבוצה** השתתפה, אז דרגת כל קדקוד היא 8. בגרף השלם דרגת כל קדקוד היא 17, לכן לכל קדקוד יש 9 קדקודים שאינם שכנים שלו.

יהי $u \in V$. נסמן את קבוצת השכנים שלו $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$, ואת קבוצת הקדקדים שאינם שכנים שלו $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$.

נרצה למצוא 2 קדקודים ב-B שאינם שכנים.

נניח בשלילה שאין כאלה, כלומר B היא קליקה K_9, שמכילה 9 קדקודים ודרגת כל קדקוד היא 8, לכן אין צלעות יוצאות מ-B אל A.

דבר זה לא יתכן: בכל סיבוב כל הקבוצות משחקות, ואם 9 קבוצות יכולות לשחק רק בינן לבין עצמן, אז בהכרח בכל סיבוב תהיה קבוצה שלא תשחק כלל, וזה סותר את תנאי השאלה.

לכן בהכרח קיימים 2 קדקודים $b_i, b_j \in B$ שאינם שכנים, ואז $\{u, b_i, b_j\}$ מהווים קבוצה בלתי תלויה בגודל 3.

טעיות נפוצות:

1. חוסר הבנה של השאלה – היו סטודנטים שחשבו שבכל סיבוב מתרחש רק משחק אחד.
2. שימוש לא נכון בשובך היונים.
3. ציטוט שגוי של משפט ארדש-סקרש שהוביל להוכחה שנראית כביכול נכונה.
4. ספירת דרגות במקום צלעות.
5. הנחה שהגרף שמגדירים הוא דו צדדי. אין שום סיבה להניח שניתן לחלק את הקבוצות כך.
6. שימוש במספר רמזי כמספר הצלעות בגרף ולא מספר הקדקודים.
7. הסבר שגוי או חסר מדוע לא יכולות להיות 2 קליקות K_9 בגרף.
8. שימוש במשפט מנטל: הרבה סטודנטים ניסו להוכיח שקיים משולש בגרף המשלים. בגרף כפי שהוגדר בפתרון הנ"ל יש 72 צלעות, ולכן במשלים יש 81 צלעות (סה"כ יכולות להיות $\binom{18}{2} = 153$ צלעות). ממשפט מנטל אנו יודעים שהגרף המקסימלי על n קדקודים שאינו מכיל משולשים מכיל לכל היותר $\frac{n^2}{4}$ צלעות. במקרה זה $\frac{n^2}{4} = \frac{18^2}{4} = 81$, שזה בדיוק מספר הצלעות בגרף המשלים. לכן משפט מנטל לא אומר דבר, שכן יכול להתקיים גרף עם כמות כזאת של צלעות ללא משולשים, אך עם עוד צלע אחת בהכרח יש משולש.
9. חלק מהסטודנטים חשבו שאם אין קבוצה ב"ת בגודל 3 בגרף, אז כמות הצלעות בגרף צריכה להיות ככמות המשולשים. טענה זו כמובן אינה נכונה שכן כל צלע בגרף יכולה להשתתף ב-16 משולשים שונים.

חלק ב – ענו על 3 מבין השאלות 5-8

שאלה 5

הוכיחו את משפט מנטל : יהי G גרף בעל n קודקודים וללא משולשים. אזי ב –G יש לכל היותר $\frac{n^2}{4}$ צלעות.
(ניתן להניח כי n זוגי).

הוכח בכיתה.

שאלה 6

עבור גרף $G = (V, E)$, נגדיר את $G^2 = (V, E')$ להיות הגרף בו $\{u, v\} \in E'$ אם"ם יש ל u,v שכן משותף ב-G. הוכיחו או הפריכו:

1. (7 נק') G קשיר ← G^2 קשיר

הטענה אינה נכונה. הגרף $G = (V, E)$, כאשר $V = \{u, v\}, E = \{\{u, v\}\}$, הוא קשיר, אבל בגרף $G^2 = (V, E')$ מתקיים כי $E' = \emptyset$, כלומר G^2 אינו קשיר.

2. (10 נק') G^2 קשיר ← G קשיר

הטענה נכונה. נניח כי G^2 קשיר ונוכיח כי G קשיר, כלומר לכל שני קודקודים $u, v \in V$ מתקיים כי קיים טיול ביניהם בגרף G.
יהיו $u, v \in V$. מפני ש- G^2 קשיר קיים מסלול $(u = v_1, \dots, v_k = v)$ בין u ל- v בגרף G^2.
מהגדרת G^2, לכל $1 \leq i \leq k - 1$, לקודקודים v_i, v_{i+1} קיים שכן משותף, נסמנו u_i, בגרף G.
מכך נקבל כי קיים טיול $(u = v_1, u_1, v_2, u_2, \dots, v_{k-1}, u_{k-1}, v_k = v)$ בין u ל- v בגרף G.

שאלה 7

מועמד מתקבל לעבודה אם הוא עובר בהצלחה סדרה של שלושה ראיונות. הוא ממשיך לראיון הבא רק אם עבר בהצלחה את הקודם. ההסתברות להצלחה בראיון הראשון היא 0.4, ההסתברות להצלחה בראיון השני היא 0.2, וההסתברות להצלחה בראיון השלישי היא 0.5. אם ידוע כי מועמד מסוים לא התקבל לעבודה, מה ההסתברות שהוא נשר עקב כשלון בריאיון השני?

לכל $i \in \{1,2,3\}$ נגדיר את המאורע A_i = "המועמד השתתף בראיון i ועבר אותו בהצלחה"
על פי הנתון, $Prob(A_1) = 0.4$ ועל מנת להשתתף בראיונות השני והשלישי צריך לעבור בהצלחה את כל הראיונות הקודמים. על כן מתקיים $A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$ וגם $Prob(A_2|A_1) = 0.2$
$Prob(A_3|A_2) = 0.5$.

מאורע ההצלחה הכוללת בשדרת הראיונות הינו $S = A_3$ בעל הסתברות

$$Prob(S) = Prob(A_3) = Prob(A_3|A_2) * Prob(A_2)$$
$$= Prob(A_3|A_2) * Prob(A_2|A_1) * Prob(A_1) = 0.4 * 0.2 * 0.5$$
$$= 0.04$$

אז מאורע $F = \overline{A_3}$ "הכישלון הכולל בראיונות" (כלומר, הכישלון הסופי להתקבל למשרה) הינו המשלים של $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_3$ והוא בעל הסתברות $Prob(F) = 1 - Prob(S) = 0.96$.

אנחנו מעוניינים בהסתברות המותנית $Prob(A_1 \cap \overline{A_2}|F)$.
אכן לפי הגדרת ההסתברות המותנית

$$Prob(A_1 \cap \overline{A_2}|F) = \frac{Prob(A_1 \cap \overline{A_2} \cap F)}{Prob(F)} = \frac{Prob(A_1 \cap \overline{A_2})}{Prob(F)}$$

נותר לחשב את

$$Prob(A_1 \cap \overline{A_2}) = Prob(\overline{A_2}|A_1) * Prob(A_1) = \left(1 - Prob(A_2|A_1)\right) * Prob(A_1)$$
$$= 0.8 * 0.4 = 0.32$$

על כן מקבלים

$$Prob(A_1 \cap \overline{A_2}|F) = \frac{0.32}{0.96} = 1/3$$

הערה: ניתן גם להיעזר בנוסחת בייס. תשובה שלמה תכלול בהכרח נימוק נכון שמתבסס על חוקים של הסתברות מותנה (בפרט, תוך הגדרה נכונה של המאורעות בשאלה). תשובות שמגיעות לחישוב הנכון תוך שימוש בנימוקים שגויים, או משמיטות פרטים קריטיים, יזכו בחלק מהניקוד.

שאלה 8

יוסי קנה 10^4 כרטיסים להגרלה בה עלות כל כרטיס היא 11 וכל כרטיס מוכרז ככרטיס זוכה בהסתברות $\frac{1}{10}$ (באופן בלתי תלוי בכרטיסים אחרים). כל כרטיס זוכה מזכה את מחזיקו ב-100 .

1. (10 נק') מהן התוחלת והשונות של הסכום בו יזכה (לאחר ניכוי עלויות הכרטיסים)?

נגדיר משתנה מקרי f = רווח. מהגדרת התוחלת נקבל

$$E[f] = 10^4\left(\frac{1}{10}100 - 11\right) = -10^4$$

נשים לב כי הרווח הוא סכום הזכיה מינוס עלות הכרטיסים. מכיוון שעלות הכרטיסים קבועה, נחשב את השונות של שני המשתנים הללו בנפרד. נסמן ב-X_i את סכום הזכיה בכרטיס ה-i. מתקיים

$Var(f) = \sum_{i=1}^{10^4} Var(X_i)$, כיוון שהשונות של משתנה מקרי קבוע (עלות הכרטיסים) היא 0.

$$E[X_i^2] = 10^4 * 10^{-1} = 10^3, \qquad E[X_i]^2 = 10^2$$

ולכן נקבל מהגדרת השונות

$$Var(X_i) = E[{X_i}^2] - E[X_i]^2 = 10^3 - 10^2 = 900$$

כיוון שהזכיות בכרטיסים שונים הן בלתי תלויות,

$$Var(f) = 10^4 Var(X_i) = 10^4(10^3 - 10^2) = 10^7 - 10^6$$

טעויות נפוצות:

- לא נלקח בחשבון מחיר הכרטיס במקרה של זכיה.
- הגדרה לא עקבית של המשתנה המקרי שהובילה לשגיאה, לרוב בחישוב השונות.

ב. (7 נק') הוכיחו כי הסיכוי שיוסי ירויח (כלומר הסכום בו יזכה בניכוי עלויות הוא חיובי) קטן מ-$\frac{1}{10}$.

יוסי ירוויח אם $f > 0$. נשתמש באי-שיוויון צ'בישב כדי לחסום מלמעלה את ההסתברות למאורע זה

$$\Pr(f > 0) \le \Pr(f > 0 \vee f < 2\mathbf{E}[f])$$
$$= \Pr(|f - \mathbf{E}[f]| > \mathbf{E}[f]) \le \frac{Var(f)}{\mathbf{E}[f]^2} = \frac{10^7 - 10^6}{10^8} < 0.1$$

טעויות נפוצות:

- מעבר מהביטוי הראשון ישירות לביטוי השלישי (כאן) ללא הסבר.
- שימוש באי-שיוויון מרקוב (שלא עובד עבור משתנה מקרי שאיננו אי-שלילי).

בהצלחה !