

## אוניברסיטת בן-גוריון המחלקה למדעי המחשב

ד"ר סיגל אורן, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, ד"ר נתן רובין, גבי יעל שטיין	<b>בוחן במבנים בדידים וקומבינטוריקה</b> 202-1-1061
יאיר אשלגי, גלי בר-און, גיל מלניק, רחל סבן, מני סדיגורסקי, נתי פטר, ארנולד פילצר	4.5.2018
<b>אסור</b>	חומר עזר
שעתיים וחצי	משך הבחינה

### הנחיות חשובות:

- ענו על 8 מתוך 10 השאלות הבאות.
- משקל כל שאלה הוא 13 נקודות, כך שניתן לצבור לכל היותר 104 נקודות.
- בכל שאלה בדיוק אחת מבין ארבעת האפשרויות היא נכונה.
- רשמו את תשובותיכם בטבלה למטה בכתב ברור ובעט.
- במידה ותענו על יותר מ- 8 שאלות, רק 8 השאלות הראשונות עליהן עניתם תיבדקנה.
- בדיקת הבוחן לא תתחשב בחישובים ו/או הסברים על גבי טופס המבחן ובמחברת הטיוטה.

**בהצלחה !**

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
										תשובה

	<u>ציון</u>
--	-------------

1. נתונה נוסחת הנסיגה  $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$  ונתונים תנאי ההתחלה  $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 9$ . מהו  $a_{30}$ ?

- א.  $61 + 2^{30}$
- ב.  $1 + 2^{30} + 30 \cdot 2^{30}$
- ג. 32
- ד.  $2^{30} + 3^{30}$

2. כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש לאי-השוויון:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 31$ : עבורם מתקיימים שני התנאים הבאים:  $2 \leq x_1 \leq 7, x_2 \leq 12$ :

- א.  $\binom{35}{6} - \binom{21}{5} - \binom{28}{5} + \binom{15}{5}$
- ב.  $\binom{37}{6} - \binom{24}{6} - \binom{31}{6} + \binom{18}{6}$
- ג.  $\binom{35}{6} - \binom{22}{6} - \binom{29}{6} + \binom{16}{6}$
- ד.  $\binom{34}{5} - \binom{21}{5} - \binom{28}{5} + \binom{15}{5}$

3. התפלגות ציונים היא פונקציה המתאימה לכל אחד מ-101 הציונים האפשריים (ציון הוא מספר שלם בין 0 ל-100) את מספר הסטודנטים שקיבלו ציון זה. כמה התפלגויות שונות ישנן אם יש בכיתה 150 סטודנטים?

- א.  $150^{101}$
- ב.  $\binom{150}{101}$
- ג.  $\binom{250}{100}$
- ד.  $101^{150}$

4. תהי  $S = \{1, 2, \dots, 11\}$ . מהו ה- $n$  המינימלי כך שמובטח שכל תת-קבוצה של  $S$  מגודל  $n$  תכיל 3 זוגות שונים (אבל לא בהכרח זרים) שיש להם אותו ההפרש? (למשל הקבוצה  $A = \{2, 5, 6, 8, 9\}$  מגודל 5 מכילה שלושה זוגות  $\{2, 5\}, \{5, 8\}, \{6, 9\}$  עם הפרש 3).

- א. 4
- ב. 7
- ג. 8
- ד. 9

5. 3-מהבעיות הבאות ישנם פתרונות השווים בערכם. מהי הבעיה יוצאת הדופן?

- א. מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים לאי השוויון  $x_1 + x_2 + \dots + x_{40} \leq 20$
- ב. בכמה אופנים ניתן לבחור 20 נציגים לתחרות, מתוך כיתה של 30 בנות ו-30 בנים?
- ג. בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים זהים ל-20 תאים מובחנים?
- ד. בכמה דרכים ניתן לחלק 800 כדורים זהים ל-41 תאים מובחנים כך שבכל תא יש לכל היותר 20 כדורים?

6. 23 חניכים של תנועת הצופים נדרשו להתחלק ל-4 שבטים: שבט צוקים מגודל 5, שבט גבעה מגודל 5, שבט רכסים מגודל 6 ושבט פסגות מגודל 7. מהו מספר החלוקות האפשרויות של החניכים?

- א.  $\binom{23}{7,6,5,5}$
- ב.  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \binom{23}{7,6,5,5}$
- ג.  $\frac{1}{2} \cdot \binom{23}{7,6,5,5}$
- ד.  $2 \cdot \binom{23}{7,6,10} \cdot \binom{10}{5}$

7. שיכור הולך במישור, כאשר הוא מתחיל את הליכתו מנקודה (0,0) ומסיים את הליכתו בנקודה (2n,0). בכל שלב השיכור יכול לבצע אחד משני סוגי הצעדים הבאים:

$$(1) (x,y) \rightarrow (x+1,y+1)$$

$$(2) (x,y) \rightarrow (x+1,y-1)$$

בנוסף, ידוע כי בשום שלב הוא לא יורד מתחת לציר ה-x.

מהו מספר המסלולים השונים האפשריים לשיכור תחת תנאים אלו?

- א.  $\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2}$
- ב.  $\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$
- ג.  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} - \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$
- ד.  $2 \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$

8. בכמה דרכים ניתן להכניס  $2n$  ( $n \geq 1$ ) כדורים זהים ל-5 תאים מובחנים, כך שבשלושה תאים **בדיוק** תהיה כמות זוגית של כדורים?

- א.  $10 \cdot (n-1)!$
- ב.  $\binom{5}{2} \cdot \binom{2n+2}{4}$
- ג.  $\binom{5}{2} \cdot \binom{n+3}{4}$
- ד.  $\binom{2n+4}{4} - \binom{n+4}{4} - \binom{n}{4}$

9. מה הקשר בין שלושת הביטויים הבאים:

$$(a) \quad 2^{n-m} \cdot \binom{n}{m}$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{i}$$

$$(c) \quad \sum_{i=m}^n \binom{n}{i} \binom{i}{m}$$

א.  $(a) = (b) \neq (c)$

ב.  $(a) \neq (b) = (c)$

ג. כולם שונים זה מזה.

ד. כולם שווים.

10. תמורה על  $\{1, \dots, n\}$  תיקרא יורדת-עולה אם קיים  $1 \leq k \leq n$  כך ש:

$$\sigma(1) > \sigma(2) > \dots > \sigma(k) < \sigma(k+1) < \dots < \sigma(n)$$

נסמן ב- $F(n)$  את מספר התמורות היורדות-עולות על  $\{1, \dots, n\}$ . מהי נוסחת הנסיגה המגדירה את

$F(n)$ ?

א.  $F(n) = n \cdot F(n-1); F(1) = 1$

ב.  $F(n) = 2 \cdot F(n-1) \cdot F(n-2); F(1) = 1, F(2) = 2$

ג.  $F(n) = F(n-1) + F(n-2) + 1; F(1) = 1, F(2) = 2$

ד.  $F(n) = 2 \cdot F(n-1); F(1) = 1$