מס' נבחן:_______________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' סמסטר אביב	ד״ר סיגל אורן, ד״ר עופר נימן, ד״ר סטוארט סמית, ד״ר נתן רובין, גב׳ יעל שטיין
27.7.2017 9:00	יאיר אשלגי , גלי בר-און, גיל מלניק, רחל סבן, מני סדיגורסקי, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **<u>עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק</u>**. משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה</u>.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

אי-שוויון מרקוב: $\Pr(X \geq \lambda E[X]) \leq \frac{1}{\lambda}$, ל-X אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב: $\Pr(|X - E[X]| \geq C) \leq \frac{V[X]}{C^2}$

בהצלחה !

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8
ציון								

<u>סה"כ</u>	

מס' נבחן:________________

חלק א – ענו על 3 מבין השאלות 1-4

שאלה 1

נגדיר גרף באופן הבא: קדקודיו יהיו $V=\{A \subseteq \{1,2,\ldots,8\} \ : \ |A|=3\}$, וקבוצת הצלעות מוגדרת ע"י $E=\{\{A,B\} : A \cap B = \emptyset\}$. הראו כי הגרף G=(V,E) בעל קוטר 2 ומכיל מעגל אוילר.

ראשית נוכיח כי קוטר הגרף הינו 2. יהיו $u,v \in V$ קודקודים שונים.
נחלק למקרים:
אם $u \cap v = \emptyset$ אזי ישנה צלע בין u ל v ולכן המרחק ביניהם הינו 1.
אחרת , ישנו לפחות איבר משותף ומתקיים: $|u \cup v| \le 5$.
לכן קיימים לפחות 3 איברים מהקבוצה $\{1,2,\ldots,8\}$ אשר זרים גם ל u וגם ל v. יהי w הקודקוד המכיל שלושה איברים כאלו, מתקיים: $u \cap w = \emptyset$, $v \cap w = \emptyset$, ולכן קיים מסלול מקודקוד u ל v העובר דרך קודקוד w ואורכו הינו 2.
כעת נוכיח כי יש מעגל אויילר בגרף:
מכיוון שקוטר הגרף הינו 2, בהכרח הגרף הינו קשיר. כעת נוכיח כי דרגת כל קודקוד היא זוגית ומכך ינבע שהוא מכיל מעגל אויילר:
יהי קודקוד $v \in V$, מההגדרה קבוצת השכנים של v היא כל השלישיות הזרות לו. ישנן $\binom{5}{3}=10$ קבוצות כאלו ולכן דרגת כל קודקוד הינה זוגית כנדרש.

<u>שאלה 2</u>

יהי G=(V,E) גרף לא-מכוון ויהי k מספר שלם חיובי. נאמר כי G גרף <u>k-מנוון</u> (k-degenerate) אם לכל תת-גרף H של G (ובפרט ל-G עצמו) קיים קדקוד בעל דרגה קטנה או שווה ל-k ב-H. מספר הניוון degen(G) הוא המספר המינימלי k כך ש-G הוא k-מנוון.

א. (7 נק') הראו כי $\delta \leq \operatorname{degen}(G) \leq \Delta$, כאשר $\delta = \min_{v \in V} \deg(v)$,
$\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$.

נניח בשלילה ש $\operatorname{degen}(G) < \delta$. מההגדרה לכל תת גרף $H \subseteq G$, קיים קודקוד בעל דרגה קטנה או שווה ל $\operatorname{degen}(G)$. בפרט הטענה נכונה גם ל G עצמו אשר הינו תת גרף של עצמו. אך בגרף G הדרגה המינימלית הינה δ ולכן קיבלנו סתירה.

נניח בשלילה ש $\operatorname{degen}(G) > \Delta$. זהו המספר המינימלי כך שהגרף G הינו k מנוון. נשים לב שבכל לכל תת גרף $H \subseteq G$, דרגת הקודקודים הינה קטנה או שווה לדרגתם בגרף המקורי G (כיוון שאנו מורידים צלעות) ולכן הדרגה המקסימלית לכל תת גרף הינה Δ- קיבלנו סתירה למינימליות $\operatorname{degen}(G)$.

ב. (10 נק') הוכיחו כי $\operatorname{degen}(G) = \Delta$ אם ורק אם יש ל- G רכיב קשירות Δ-רגולרי.

→ נניח של G יש רכיב קשירות Δ-רגולרי, נסמנו ב H, ונוכיח כי $\operatorname{degen}(G) = \Delta$.
מסעיף א' מתקיים $\delta \leq \operatorname{degen}(G) \leq \Delta$.
נניח בשלילה ש $\operatorname{degen}(G) < \Delta$. רכיב הקשירות הינו תת גרף של G ($H \subseteq G$) ולכן מהגדרת $\operatorname{degen}(G)$ קיים בו קודקוד שדרגתו קטנה או שווה אליו. אך דרגת כל הקודקודים ב H היא Δ - לא קיים קודקוד כזה, סתירה.

← נניח ש $\operatorname{degen}(G) = \Delta$ ונוכיח של G יש רכיב קשירות Δ-רגולרי. נניח בשלילה שלא קיים רכיב קשירות כזה. מההגדרה בכל תת גרף של G קיים קודקוד בדרגה קטנה או שווה ל Δ. מכיוון שלא קיים רכיב קשירות כזה, בהכרח כל רכיב קשירות מכיל לפחות קודקוד אחד עם דרגה < Δ. מכיוון שבכל תת גרף דרגת הקודקודים שווה או קטנה לדרגה שלהם בגרף G בהכרח גם בכל תת גרף של G קיים קודקוד עם דרגה < Δ, אך זוהי סתירה למינימליות של $\operatorname{degen}(G)$.

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 3</u>
חשבו את מספר הסדרות מאורך n מעל {0,1,2} המכילות מספר זוגי של 1.

נגדיר:
a_n - מספר הסדרות באורך n מעל {0,1,2} המכילות מספר זוגי של אחדות.
b_n - מספר הסדרות באורך n מעל {0,1,2} המכילות מספר אי-זוגי של אחדות.

עבור a_n - כל סדרה המתחילה ב-0 או 2 ניתן להשלים לסדרה באורך n באמצעות כל סדרה שמכילה מספר זוגי של אחדות ובכך לשמור על מספר אחדות זוגי. כל סדרה המתחילה ב-1, ניתן להשלים בכל סדרה באורך n-1 המכילה מספר אי זוגי של אחדות ובכך להשלים את מספר האחדות למספר זוגי.
מכאן: $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$. באופן דומה ניתן להראות כי $b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1}$.

מתוך הנוסחא הראשונה נקבל $b_{n-1} = a_n - 2a_{n-1}$. כעת נציב בנוסחא השניה ונקבל:

$$a_{n+1} - 2a_n = 2a_n - 4a_{n-1} + a_{n-1} \Longrightarrow a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$$

כעת, נפתור את הנוסחא $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$. נשים לב כי הפולינום האופייני הוא $x^2 - 4x + 3$. שורשי הפולינום הם 1 ו3 ולכן

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 1\text{\^{}}n$$

נפתור באמצעות תנאי ההתחלה: $a_0 = 1, a_1 = 2$. נקבל:

$$A + B = 1, \qquad 3A + B = 2$$

נפתור, למשל באמצעות חיסור המשוואות ונקבל : $a_n = \frac{1+3^n}{2}$.

טעות נפוצות:
1) פתרון שהוא נוסחא המכילה סכום. נתבקשתם לחשב את מספר הסדרות, כלומר לתת נוסחא סגורה.

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 4</u>

יהי G גרף דו-צדדי מישורי עם קוטר 2 ודרגה מקסימלית Δ, הראו כי מספר הקדקודים המקסימלי האפשרי בגרף הוא Δ+2.

ראשית, נשים לב כי גרף דו-צדדי עם קוטר 2 הוא בהכרח גרף דו צדדי מלא. על מנת להוכיח זאת נניח בשלילה שקיים גרף דו צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ שקוטרו 2 וקיימים בו שני קודקודים $v\in V_1, u\in V_2$ שלא מחוברים בקשת. כפי שלמדנו אורך המסלול שמחבר צמתים בצדדים שונים של גרף דו צדדי הוא אי זוגי ולכן אורך המסלול המחבר ביניהם הוא לפחות 3, בסתירה לנתון כי קוטר הגרף הוא 2.

כעת, מתוך הנתון שהדרגה המקסימלית בגרף היא Δ ביחד עם האבחנה שהגרף מלא נקבל כי הגרפים היחידים שעלינו לשקול הם $K_{s,\Delta}$ עבור $0\le s\le\Delta$. נשים לב כי המשפט מתקיים עבור $\Delta\le 2$ כי $s\le\Delta\le 2$. כעת נטפל במקרה של $\Delta\ge 3$. ניתן להשתמש בנתון כי הגרף הוא מישורי באחת משתי הדרכים הבאות:

1) לפי משפט וגנר מכיוון שהגרף מישורי $K_{3,3}$ אינו יכול להיות מינור של הגרף, נקבל כי $s\le 2$. לכן מספר הקודקודים המקסימלי האפשרי בגרף הוא Δ+2.
2) בגרף $K_{s,\Delta}$ יש בדיוק $s\cdot\Delta$ קשתות ו $s+\Delta$ צמתים. מכיוון שבגרף צדדי אין מעגלים כל פאה בגרף מוקפת בלפחות 4 צלעות נקבל $4f\le 2m$. באמצעות הצבה בנוסחת אוילר, נקבל $m\le 2n-4$. כעת עבור $m=s\cdot\Delta$ ו$n=s+\Delta$ נקבל

$$s\cdot\Delta\le 2(s+\Delta)-4 \implies s(\Delta-2)\le 2\Delta-4.$$

מתוך ההנחה כי $\Delta\ge 3$ נקבל $s\le\frac{2\Delta-4}{\Delta-2}=2$. לכן מספר הקודקודים המקסימלי האפשרי בגרף הוא Δ+2.

טעויות נפוצות:

1) אי שימוש בכל נתוני השאלה.
2) גרף דו-צדדי בקוטר 2 הוא חסר מעגלים – לא נכון. יכולים להיות בגרף מעגלים רבים באורך זוגי.
3) הוכחה בשלילה עבור גרף עם $n=\Delta+3$ קודקודים. מכיוון ומדובר במספר המקסימלי של צמתים בגרף המקיים את תנאי השאלה יש להראות כי התנאים אינם מתקיימים עבור כל גרף עם לכל הפחות $n=\Delta+3$

חלק ב – ענו על 3 מבין השאלות 5-8

שאלה 5

יהי G גרף 3-רגולרי מישורי בעל 20 פאות, שבו כל צלע שייכת למעגל, וכל הפאות הן משולשים או משובעים (כלומר כל פאה היא מעגל עם 3 או 7 צלעות). כמה משולשים יש בגרף G?

תחילה, נסמן ב- V את קבוצת הקודקודים, ב- E את קבוצת הצלעות וב- F את קבוצת הפאות בגרף G.
מאחר שכל פאה, בפרט הפאה האינסופית, היא מעגל, אזי בהכרח הגרף G קשיר, ולכן מנוסחת אוילר $|V| + |F| - |E| = 2$.
בנוסף, ממשפט הדרגות מתקיים כי $3|V| = \sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$. כיוון שכל צלע שייכת למעגל, היא חלה בבדיוק שתי פאות, וכאשר נסמן ב- x את מספר המשולשים ב- G וב- $t(f)$ את מספר הצלעות שמקיפות את הפאה f, נקבל שמתקיים כי

$$2|E| = \sum_{f\in F} t(f) = 3x + 7(20 - x) = 140 - 4x$$

מהשוויון הראשון נקבל כי $|V| + 20 - |E| = 2$, כלומר $|V| = |E| - 18$, ומהשוויון השני נקבל כי $3|V| = 2|E|$, כלומר $|V| = \frac{2}{3}|E|$, לכן מתקיים כי $|E| - 18 = \frac{2}{3}|E|$, כלומר $|E| = 54$.
נציב זאת בשוויון השלישי ונקבל כי $108 = 140 - 4x$, כלומר $x = 8$.

<u>שאלה 6</u>

יהי G גרף מקרי עם $2n$ קדקודים, כאשר כל צלע נכנסת ל- G בהסתברות ½ באופן בלתי-תלוי.
חשבו את תוחלת מספר הזיווגים המושלמים השונים ש- G יכיל.

תחילה, נסמן ב- f את המשתנה המקרי אשר בהנתן גרף מקרי G עם $2n$ קודקודים, מחזיר את מספר הזיווגים המושלמים ש- G מכיל.

בנוסף, מספר הזיווגים המושלמים שגרף עם $2n$ קודקודים יכול להכיל הוא $\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$, שכן עבור כל סידור בשורה של קודקודי הגרף, נחלק אותם לזוגות שיגדירו את הזיווג המושלם, כאשר שני הקודקודים הראשונים הם הצלע הראשונה, השניים הבאים הם הצלע השנייה וכן הלאה, ונחלק ב- $n!\cdot 2^n$, שכן אין משמעות לסדר n הצלעות בזיווג ואין משמעות לסדר שני הקודקודים בכל צלע בזיווג.

כעת, לכל $1 \leq i \leq N = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$, נסמן ב- f_i את האינדיקטור למאורע A_i, שהוא שהזיווג המושלם ה- i מוכל בגרף המקרי G. נבחין שמתקיים כי $f = f_1 + \cdots + f_N$, ובנוסף $E(f_i) = \Pr(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

לבסוף, מלינאריות התוחלת נקבל כי $E(f) = E(f_1) + \cdots + E(f_N) = N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^{2n}}$.

<u>שאלה 7</u>

מבחן סלחן הינו מבחן בו לכל שאלה 4 תשובות אפשריות ומתוכן בדיוק אחת נכונה. בחירת התשובה הנכונה מזכה ב-5 נקודות ואילו בחירת תשובה שגויה **מזכה** בנקודה אחת.

תלמיד ניגש למבחן סלחן בן 20 שאלות. ידוע כי ישנן 4 שאלות עבורן התלמיד יודע את התשובה בוודאות. עבור כל שאר השאלות הוא מגריל תשובה באופן אחיד בלתי-תלוי.

הוכיחו כי ההסתברות שהתלמיד יקבל במבחן ציון של 68 ומעלה היא לכל היותר $\frac{3}{16}$ (הוכחה של הסתברות לכל היותר $\frac{1}{2}$ תזכה ב-8 נקודות).

<u>פתרון:</u>

תחילה נשים לב כי מאחר ויש לתלמיד 4 שאלות בהם בוודאות יצדק, ויקבל על כך 20 נקודות, הרי שהשאלה שקולה לדרישה להוכיח כי ההסתברות שהתלמיד יקבל בשאלות בהם הוא מנחש ציון של 48 ומעלה היא לכל היותר $\frac{3}{16}$

נגדיר אוסף של מ"מ לכל $i \in \{1, \dots, 16\}$ (מרחב המדגם שלנו הוא אוסף כל הניחושים האפשריים)

$f_i = $ i הציון בשאלה ה

בנוסף נגדיר מ"מ נוסף

$$f = \sum_{i=1}^{16} f_i$$

נשים לב שלמעשה f הוא סכום הנקודות בשאלות אותם התלמיד מנחש. נוכיח אם כך שמתקיים

$$\Pr(f \geq 48) \leq \frac{3}{16}$$

נחשב תחילה את התוחלת של f_i

$$E[f_i\} = \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 1 = 2$$

ולכן על פי לינאריות התוחלת נקבל

$$\mathrm{E[f]} = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{16} \mathrm{f_i}\right] = \sum_{i=1}^{16} E[f_i] = 16\mathrm{E[f_i]} = 16 \cdot 2 = 32$$

נחשב בנוסף את השונות של f_i

$$V[f_i] = E[f_i^2] - E[f_i]^2 = \left(\frac{1}{4} \cdot 5^2 + \frac{3}{4} \cdot 1^2\right) - 2^2 = 7 - 4 = 3$$

ומאחר ונתון שההגרלות נעשות באופן בלתי תלוי (ומכאן שהמ"מ בת"ל) נקבל

$$V[f] = V\left[\sum_{i=1}^{16} f_i\right] = \sum_{i=1}^{16} V[f_i] = 16 \cdot 3 = 48$$

כעת נוכל להשתמש בחסם צ'ביצ'ב עבור $c = 16$ ולקבל כי

$$Pr(f \geq 48) = Pr(f - 32 \geq 16) \leq Pr(|f - 32| \geq 16)$$
$$= Pr(|f - E[f]| \geq 16) \leq \frac{V[f\}}{16^2} = \frac{48}{16^2} = \frac{3}{16}$$

כאשר אי-השוויון השני נובע מכך שהמאורע השמאלי מוכל בזה הימני.

הערה – אפשרות נוספת היית להגדיר מ"מ אינדיקטורים g_i לכל שאלה ומ"מ

$$g = \sum_{i=1}^{16} g_i$$

שיהיה מספר התשובות הנכונות מתוך אלו שניחש ונבצע חישוב דומה כדי להראות כי

$$Pr(g \geq 8) \leq \frac{3}{16}$$

מס' נבחן:_______________

שאלה 8

הוכיחו את משפט ארדש-סקרש: לכל זוג טבעיים s,t>0 מתקיים $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$

הוכח בכיתה

בהצלחה !