מס' נבחן:________________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א' סמסטר אביב	ד״ר סיגל אורן, ד״ר עופר נימן, ד״ר סטוארט סמית, ד״ר נתן רובין, גב׳ יעל שטיין
8.7.2017 13:30	יאיר אשלגי , גלי בר-און, גיל מלניק, רחל סבן, מני סדיגורסקי, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **<u>עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק</u>**. משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה</u>.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

אי-שוויון מרקוב: $\Pr(X \geq \lambda E[X]) \leq \frac{1}{\lambda}$, ל-X אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב: $\Pr(|X - E[X]| \geq C) \leq \frac{V[X]}{C^2}$

בהצלחה !

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8
ציון								

<u>סה"כ</u>	

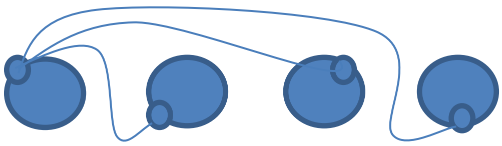
מס' נבחן:_______________

חלק א – ענו על 3 מבין השאלות 1-4

שאלה 1

יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי לא מכוון עם 30 קדקודים. נתון כי כל המעגלים ב-G הם באורך לפחות 5.
הוכיחו כי מספר הצלעות הינו לכל היותר 46.

נשים לב כי ניתן להפוך כל גרף מישורי לקשיר על ידי הוספת צלעות תוך שמירה על המישוריות וללא הוספת מעגלים ופאות לגרף – נסדר את רכיבי הקשירות של הגרף המקורי בשורה, נבחר קדקוד על הפאה החיצונית בכל אחד מרכיבי הקשירות ונחבר את הקדקוד על הפאה החיצונית מרכיב הקשירות הראשון לכל הקדקודים הנ"ל בשאר רכיבי הקשירות. היות וחיברנו בין רכיבי קשירות שונים בעזרת צלע בודדת בהכרח לא נסגרו מעגלים חדשים(ומכאן שגם פאות חדשות) בגרף. הגרף נותר מישורי (דוגמה באיור):



מכיוון שבגרף G' הקשיר שהתקבל מתקיים ש $|E'| \geq |E|$ (כי רק הוספנו צלעות), וכל תנאי השאלה חלים גם על הגרף החדש, ניתן להוכיח את הטענה עבור גרפים קשירים בלבד.

נגדיר את $t(f_i)$ בתור מספר הצלעות החלות בפאה ה-i. נניח כי $|E| \geq 5$ (אחרת סיימנו את ההוכחה). נשים לב כי עבור כל פאה בגרף, מספר הצלעות שחלות בפאה הוא לפחות 5. כל פאה פנימית מוכלת במעגל של הגרף, ומהנתון שהמעגל המינימלי הוא באורך 5 נקבל שבכל פאה פנימית חלות לפחות 5 צלעות. נתבונן בפאה החיצונית - אם אין בגרף פאות פנימיות אזי כל הצלעות חלות בפאה החיצונית (לפחות 5 צלעות). אם קיימות פאות פנימיות, אזי לפחות 5 מצלעותיהן חיצוניות. כלומר $5 * F \leq \sum_{i\ is\ a\ face\ of\ G} t(f_i)$. כפי שראינו בתרגולים, כל צלע חלה לכל היותר בשתי פאות שונות ולכן אם נסכם את כל הצלעות החלות בכל פאה נקבל ש $\sum_{i\ is\ a\ face\ of\ G} t(f_i) \leq 2 * M$. מאיחוד שני האי-שוויונות נקבל ש $F \leq \frac{2}{5} M$. היות והגרף מישורי וקשיר, נוסחת אוילר חלה עליו:

$$M = F + V - 2 = F + 28 \leq (2/5) * M + 28 \;\; => (3/5)M \leq 28 \;\; => M \leq 46.66$$

היות ומספר הצלעות בגרף הינו בהכרח מספר שלם, נקבל ש $M \leq 46$.

טעויות נפוצות:

1. שימוש בנוסחת אוילר עבור גרפים שלא בהכרח קשירים.
2. 'אם הגרף איננו קשיר ניתן להוכיח לכל רכיב קשירות בנפרד ומכאן נסיק שזה נכון עבור כל הגרף'. במשפט זה ישנן שתי טעויות שונות – ראשית, אם הגרף אינו קשיר אזי בכל רכיב קשירות ישנם פחות מ-30 קדקודים ולכן הוכחת התרגיל אינה מוכיחה שום דבר עבור קשירות אלה. שנית, גם אם נראה שעבור כל רכיב i בגרף מתקיים ש $|E_i| \leq 46$ לא ניתן להסיק מכך ש $|E| = \sum_i |E_i| \leq 46$.
3. התייחסות לגרף כגרף שבוודאות קיימים בו מעגלים – העובדה שכל המעגלים בגרף באורך לפחות 5 אינה מבטיחה כי קיים מעגל כלשהו בגרף.
4. טענה שאם $|E| \leq |V| - 1$ אז הגרף בהכרח קשיר.

מס' נבחן:________________

שאלה 2

עבור גרף $G = (V, E)$ נאמר כי פונקציה $C: E \to \{1,2, \dots k\}$ הינה k-צביעה חוקית של צלעות G אם לכל זוג צלעות $e_1, e_2 \in E$ שונות עבורן $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ (כלומר קיים להן קדקוד משותף) מתקיים כי $C(e_1) \neq C(e_2)$.

יהי G גרף 3-רגולרי המכיל מעגל המילטון, הראו כי קיימת 3-צביעה חוקית של צלעות G.

הוכחה:

ממשפט הדרגות נובע שבכל גרף, מס' הקודקודים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי. בפרט, הגרף שלנו הוא 3-רגולרי וכל הקודקודים בו הם מדרגה אי זוגית, לכן מס' הקודקודים בגרף בהכרח זוגי.

יהי C מעגל המילטון בגרף. C עובר על כל הקודקודים בגרף ולכן הוא מאורך זוגי. בפרט ניתן לצבוע את כל צלעות C ב2 צבעים לסירוגין. כעת נבחן את $G \setminus C$, הצלעות הנותרות בגרף. דרגת כל קודקוד בC היא 2, ובG היא 3. לכן דרגת כל קודקוד ב $G \setminus C$ היא 1. כלומר $G \setminus C$ הוא איחוד של $|V|/2$ רכיבי קשירות מגודל 2 (או במילים אחרות זיווג מושלם). נוכל לצבוע את כל הצלעות הללו בצבע בודד.

סה"כ קיבלנו צביעה של הגרף ב3 צבעים, כך שכל שלוש צלעות החלות בקודקוד מסוים צבועות בצבעים שונים.

טעויות נפוצות:

1. חסרה הוכחה שמס' הקודקודים זוגי. ואז לא ניתן להסיק שקיימת צביעה חוקית ב2 צבעים של המעגל המילטון.
2. שימוש במשפט Ore. שימו לב שמשפט Ore הוא חד צדדי, כלומר זהו תנאי מספיק לקיום מעגל המילטון, אבל לא כל גרף עם מעגל המילטון מקיים תנאי משפט Ore.
3. אינדוקציות שונות. היו ניסיונות שונים להוכיח צביעה באינדוקציה על מס' הקודקודים או הצלעות. בד"כ מוחקים צלע\קודקוד ואז הורסים את ההנחה של הרגולריות (ואז לא ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה).
4. צביעה של מעגל אוילר: עושים מניפולציה לגרף ומסיקים שיש מעגל אוילר. ואז צובעים את המעגל הזה ב3 צבעים. שימו לב שלא ניתן לצבוע צלעות מעגל אוילר ב3 צבעים. זה נכון רק למעגל פשוט.

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 3</u>

יהי n המספר המינימלי המקיים: לכל גרף G על n קדקודים, או שהגרף G מכיל משולש (כלומר את K_3), או שהגרף המשלים $\overline{G}$ מכיל מסלול מאורך 2 (כלומר את P_3). הוכיחו כי $n = 5$.

הוכחה:

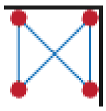
ראשית נראה כי כל גרף עם $n \geq 5$ קדקודים מכיל משולש, או שהמשלים שלו מכיל מסלול באורך 2.
נניח כי $\overline{G}$ אינו מכיל מסלול מאורך 2. נטען כי ב-$\overline{G}$ גודל כל מחלקת קשירות הוא 2 לכל היותר.

נניח בשלילה שיש מחלקת קשירות ב-$\overline{G}$ עם 3 קדקודים או יותר, ונבחר ממנה 3 קדקודים – v,w,u. אם יש צלע בין v ל-u וצלע בין v ל-w אז (u,v,w) מסלול מאורך 2 וזו סתירה. אחרת, אין צלע בין v ל-u או בין v ל-w. בה"כ אין צלע בין v ל-u. מכיוון v,u באותה מחלקת קשירות, יש מסלול עם אורך ≥ 2 בין v ל-u, ובפרט מסלול באורך 2 ב-$\overline{G}$. זו סתירה להנחה.

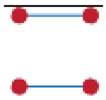
מכיוון שכל מחלקת קשירות ב-$\overline{G}$ היא לכל היותר בגודל 2, ומכיוון שמספר הקדקודים $n \geq 5$, אז משובך היונים יש לפחות 3 מחלקות קשירות ב-$\overline{G}$. לכן קיימות ב-$\overline{G}$ אנטי-קליקה בגודל 3 (בחרו כל קדקוד ממחלקת קשירות אחרת). בגרף G המקורי, קבוצה זו היא משולש. מש"ל.

שנית, נבנה דוגמה לגרף עם 4 קדקודים בו אין משולש, ובגרף המשלים אין מסלול מאורך 2. דוגמה זו היא למעשה C_4:

G



.$\overline{G}$



מכאן שה-n המינימלי שמקיים את התנאי הוא 5.

טעויות נפוצות:

- הוכחה שהטענה מתקיימת עבור $n \geq 6$, ומתן דוגמאת נגד עבור $n \leq 4$. חסרה הוכחה שהתנאי מתקיים כאשר n=5.
- שגיאה בהבנת ההגדרה של מספרי רמזי:
  - מספר רמזי פירושו שאו שבגרף יש קליקה, או אנטי-קליקה – לא שיש גם קליקה וגם אנטי-קליקה.
  - טעויות שנבעו מהתייחסות למספר רמזי כצביעת הקדקודים במקום צלעות.
- הוכחות שהלכו כך: לוקחים גרף על 6 קדקודים, משתמשים בעובדה מהכיתה כי R(3,3)=6 ולכן בפרט התנאי מתקיים לגרף עם 6 קדקודים. בוחרים קודקוד ספציפי (למשל זה שמשתתף בקליקה/אנטי-קליקה), ומוחקים אותו ומראים שהגרף שהתקבל מקיים את התנאי. הבעיה: לא ניתן לבחור את הקדקוד שמורידים מהגרף בעל 6 הקדקודים, ללא הוכחה שניתן לקבל כך כל גרף אפשרי עם 5 קדקודים.
- שימוש לא נכון במשפט מנטל: המשפט נכון גם אם הגרף לא קשיר או לא מישורי, לכן אין צורך לחלק למקרים בהם הגרף מישורי/קשיר ובהם הוא איננו מישורי/קשיר.
- דוגמת נגד שגויה עבור n=4 (או אי ציון דוגמת נגד בכלל). הטעות הנפוצה ביותר: ציור של 2 גרפים שאינם משלימים אחד את השני.

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 4</u>

יהי G גרף דו צדדי עם $2n$ קדקודים, כך שהקבוצה הבלתי-תלויה הגדולה ביותר שלו היא מגודל n. הראו כי ב-G יש זיווג מושלם .

יהי G הגרף הדו-צדדי כנתון בשאלה. ניתן לייצגו $G = (V_1, V_2, E)$ כך ש $|V_1| + |V_2| = 2n$, וגודל הקבוצה הבת"ל הגדולה ביותר שלו הינו n . על פי הגדרת גרף דו צדדי, כל אחת מהקבוצות V_1, V_2 הינה קבוצה בלתי תלויה בתוך הגרף, ולכן גודלה חסום על ידי n, כלומר $|V_1| = |V_2| = n$.

על פי משפט Hall , על מנת להוכיח כי קיים בגרף הנ״ל זיווג מושלם מספיק להראות כי לכל תת קבוצה $S \subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$ (כאשר $\Gamma(S) \subseteq V_2$ הינה קבוצת השכנים של S). על מנת להראות את קיום התנאי האחרון, נניח בשלילה כי קיימת $S \subseteq V_1$ שעבורה מתקיים $|\Gamma(S)| < |S|$. נבחין כי הקבוצה $(V_2 \setminus \Gamma(S)) \uplus S$ הינה בת"ל: על פי הגדרת $\Gamma(S)$שום צלע אינה מחברת בין קודקוד S לקודקוד $V_2 \setminus \Gamma(S)$, וגם כל אחת מתתי הקבוצות $S, V_2 \setminus \Gamma(S)$ בת"ל. על פי ההנחה בשלילה, נובע גם כי

$$|S \uplus (V_2 \setminus \Gamma(S))| = |S| + |V_2 \setminus \Gamma(S)| > |\Gamma(S)| + |V_2 \setminus \Gamma(S)| = |V_2| = n$$

על כן קיבלנו קבוצה בלתי תלויה ב G שגודלה עולה על n. סתירה זו מראה את קיום תנאי Hall, וקיום של זיווג מושלם בגרף.

שגיאות נפוצות:

1. לבחור באופן שרירותי קבוצה בלתי תלויה A בגודל n, ומיד להסיק מכך (ללא הוכחה ראויה) כי תת הקבוצה המשלימה B של הקודקודים היא גם בלתי תלויה. לחלופין, למחוק את כל הצלעות שמחברות בין קודקודי B, ולהתעלם מהן תוך כדי נסיון לקבל קבוצה בלתי תלויה שגודלה חורג מ n.
2. לנסות להוכיח את הנדרש באינדוקציה על n, וזאת מבלי להוכיח כראוי כי ההנחה בשאלה תופסת בתת הגרף הדו-צדדי $n' = n - 1$ על n' (שמתקבל מהשמטת זוג קודקודים שמחוברים בצלע, והצלעות החלות בהם).
3. לטעון את קיום זיווג מושלם על ידי הפעלת תנאי Hall בגרף דו-צדדי מבלי להראות כי החלקים V_1, V_2 בעלי גדלים שווים.
4. לטעון את קיום תנאי Hall מטעמי קשירות פשוטה (במיוחד, על סמך היעדרם של קודקודים מבודדים).
5. לנסח את הצעדים בהוכחה באופן שאינו חד משמעי (בפרט, תוך שימוש במונחים שאינם מקובלים בקורס). להשמיט פרטים קריטיים בהוכחה.

מס' נבחן:________________

חלק ב – ענו על 3 מבין השאלות 5-8

שאלה 5

הוכיחו באופן **קומבינטורי** כי לכל n טבעי חיובי, $\binom{n+2}{3} = \sum_{i=1}^{n} i(n-i+1)$.

נחשב את מספר הדרכים לבחור 3 תלמידים מתוך כיתה בגודל n+2 (בלי חשיבות לסדר וללא חזרות)
אגף ימין: ע"פ הנוסחה שלמדנו $\binom{n+2}{3}$
אגף שמאל:
נמספר את התלמידים מ 1 עד n+2 . נשים לב שכל בחירה של 3 תלמידים ניתן לסדר בסדר עולה (לפי המספור). נסמן ב j את מספר התלמיד האמצעי מבין השלושה
נשים לב כי $2 \le j \le n+1$.
אם תלמיד j הינו האמצעי מבין השלושה אזי יש $j-1$ אפשרויות לתלמיד ה"נמוך יותר"
ו $n+2-j$ אפשרויות לתלמיד ה"גבוה יותר". מאחר וזה נכון לכל בחירה של האמצעי הרי שבסך הכל נקבל

$$\sum_{j=2}^{n+1}(j-1)(n+2-j) = \sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)$$

טעויות נפוצות:
-לקחת כל פעם קבוצה בגודל i ולבחור ממנה נציג, קבוצה בגודל 1 ולבחור ממנה נציג ועוד קבוצה של כל השאר ולבחור ממנה נציג: בלי שום הסבר מי הקבוצות, למה באמת עוברים על כל האפשרויות לשלושה נציגים ולמה אין שלשות שספרנו יותר מפעם אחת
-להתייחס אל שלושת הנציגים כאל לא שווים בחשיבותם (למשל, אחד הוא המנהיג ושניים סגנים וכד') ואז לא להתייחס לכך שצריך על כל שלשה שנבחרה לספור את כל האפשרויות לחלוקת תפקידים.
-להציג אלגוריתם לבחירת שלושה נציגים, להראות למה האיבר הראשון בסכום מתאים לאיטרציה הראשונה של האלגוריתם ולמה האיבר האחרון מתאים, בלי להוכיח עבור המקרה הכללי: לפעמים האלגוריתם בכלל לא היה נכון, ורק האיטרציות בהתחלה ובסוף התאימו לסכום.

שאלה 6

יהי $G=(V,E)$ גרף עם קב' קדקודים $V=\{1,\dots,n\}$.

א. (7 נק') תהי π תמורה של V, תהי $S=\{v\in V:\ \forall u\in V, \{u,v\}\in E \Rightarrow \pi(v)<\pi(u)\}$.
(הקבוצה S היא אוסף כל הקדקודים המופיעים בתמורה π לפני כל שכניהם.) הוכיחו כי S קבוצה בת"ל.

נניח בשלילה ש-S איננה בת"ל, כלומר קיימים $u,v\in S$, כך ש $\{u,v\}\in E$. אזי מהגדרת S, u מופיע בתמורה לפני כל שכניו, כיוון ש-v שכן של u מתקיים $\pi(u)<\pi(v)$. אותו נימוק עבור v ייתן $\pi(v)<\pi(u)$, וזו סתירה.

ב. (10 נק') הוכיחו כי קיימת ב-G קבוצה בת"ל בגודל לפחות $\sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)+1}$. (רמז: הגרילו תמורה של קבוצת הקדקודים V בהתפלגות אחידה והיעזרו בסעיף א' ולינאריות התוחלת.)

נביט במרחב ההסתברות (Ω,Pr) כאשר Ω אוסף כל התמורות על V ו-Pr התפלגות אחידה. נגדיר משתנה מקרי X המונה את מספר האיברים ב-S (מוגדרת לפי סעיף א'), ועבור כל $1\le v\le n$ נגדיר מ"מ מציין X_v האם v נמצא בקבוצה S.
כיוון ש $X=\sum_{v=1}^{n}X_v$, נקבל מלינאריות התוחלת ש $\mathbb{E}[X]=\sum_{v=1}^{n}\mathbb{E}[X_v]$. נראה שמתקיים $\mathbb{E}[X_v]=\Pr[X_v=1]=\frac{1}{d(v)+1}$, ונקבל כי $\mathbb{E}[X]=\sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)+1}$. ראינו בכיתה כי תמיד $\Pr\left[X\ge\mathbb{E}[X]\right]>0$, לכן קיימת תמורה עבורה גודל הקבוצה S הוא לפחות $\sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)+1}$.

נותר להראות כי $\Pr[X_v=1]=\frac{1}{d(v)+1}$, אינטואיטיבית זה נובע משיקול סימטריה: בתמורה מקרית ההסתברות של איבר להיות הראשון מבין k=d(v)+1 איברים נתונים היא 1/k. יותר פורמלית: יהי A_v המאורע שקדקוד v מופיע בתמורה לפני כל שכניו, $\Pr[X_v=1]=\frac{|A_v|}{|\Omega|}$. נחשב בכמה תמורות v מופיע לפני כל שכניו: כדי לבחור תמורה כזו, נבחר תחילה את הסידור של n-k האיברים שאינם v ושכניו, יש לכך $\frac{n!}{k!}$ אפשרויות, כעת v חייב להיות במקום הראשון מבין k המקומות שנותרו, ויש עוד (k-1)! אפשרויות לסדר את שכני v במקומות שנותרו, סה"כ קיבלנו $|A_v|=\frac{n!\cdot(k-1)!}{k!}=\frac{n!}{k}$, לכן $\Pr[X_v=1]=\frac{|A_v|}{|\Omega|}=\frac{n!/k}{n!}=\frac{1}{k}$ כנדרש.

טעויות נפוצות:
1) התייחסות לבחירה המקרית כאילו בוחרים קדקודים ל-S (לעיתים מבין v ושכניו)
2) טענה שהמאורעות A_v בלתי תלויים
3) חישוב התוחלת בלבד ללא נימוק על קיום S.

שאלה 7

נגריל עץ מתויג על n קדקודים בהתפלגות אחידה. מהי תוחלת מספר העלים בעץ?

יהי (Ω, Pr) מרחב ההסתברות של כל העצים המתויגים על $n \geq 1$ הקדקודים $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$, עם התפלגות אחידה Pr. משפט קיילי קובע ש- $|\Omega| = n^{n-2}$. (נשים לב שזה נכון גם כאשר $n = 1$ וכאשר $n = 2$.) נגדיר משתנה מקרי $f: \Omega \to \mathbb{N}$ בדרך הבאה: לכל עץ $T \in \Omega$ הערך של $f(T)$ הוא מספר העלים בעץ T. עלינו לחשב את ערך התוחלת $\mathrm{E}[f]$.

נשים לב קודם כל שאם $n = 1$, יש רק עץ מתויג אחד T_1 על קודקוד אחד, ו- $f(T_1) = 0$. לכן $\mathrm{E}[f] = 0$ במקרה זה. כמו כן, כאשר $n = 2$ שוב יש רק עץ מתויג אחד T_2 על שני קדקודים, ו- $f(T_2) = 2$. אז במקרה הזה $\mathrm{E}[f] = 2$.

כעת נניח כי $n \geq 3$. אז לכל עץ מתויג על n קדקודים קיים קוד פריפר שמתאים לו. נגדיר אינדיקטורים $f_i: \Omega \to \mathbb{N}$ לכל i כך ש- $1 \leq i \leq n$ בדרך הבאה: לכל $T \in \Omega$ נגדיר

$$f_i(T) = \begin{cases} 1, & \text{אם הקודקוד } i \text{ עלה בעץ } T \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ולכן $\mathrm{E}[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[f_i]$. לכל i כך ש- $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\mathrm{E}[f_i] = \Pr(f_i = 1)$, כלומר ההסתברות שהקודקוד i עלה. הקודקוד i עלה בעץ T אם ורק אם i אינו מופיע בקוד הפריפר של T. מספר הקודים בהם i אינו מופיע הוא מספר הסדרות מאורך $n-2$ שבנויות מאיברים של הקבוצה $\{1, 2, 3, \cdots i-2, i-1, i+1, i+2, \cdots, n\}$. יש $(n-1)^{n-2}$ סדרות כאלה, לכן

$$\mathrm{E}[f_i] = \Pr(f_i = 1) = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}$$

אז

$$\boxed{\mathrm{E}[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[f_i] = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}}$$

מעניין לציין כי לכל i כך ש- $1 \leq i \leq n$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[f_i] = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2}\right) = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

ולכן $\mathrm{E}[f] \approx \frac{n}{e}$ כאשר n גדול.

הערה: אפשר לחשב את $\Pr(f_i = 1)$ גם בלי שימוש בקוד פריפר. נתון i, אפשר לחשב את מספר העצים T בהם i עלה בדרך הבאה: יש $n-1$ אפשרויות עבור השכן של i ב- T. לפי משפט קיילי, יש $(n-1)^{n-3}$ אפשרויות עבור העץ המתויג $T \setminus \{i\}$. אז מספר העצים T בהם i עלה הוא

$$(n-1)(n-1)^{n-3} = (n-1)^{n-2}.$$

יש המשך בעמוד הבא.

פתרון פחות טוב: הנחנו כי $n \geq 3$, לכן יש לכל T לפחות 2 עלים ויש גם לפחות קודקוד אחד שאינו עלה. לכן $\mathrm{E}[f] = \sum_{i=2}^{n-1} \Pr(f = i) \cdot i$. לכל i כך ש- $2 \leq i \leq n-1$ נסמן ב- A_i את המאורע שיש לעץ T בדיוק i עלים. אז $\Pr(f = i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|}$ לכל i כך ש- $2 \leq i \leq n-1$, לכן עלינו לחשב את העוצמה של A_i.

נתון i, העוצמה של A_i היא מספר העצים T המתויגים על n קדקודים כך שיש ל- T בדיוק i עלים. זה שווה למספר קודי הפריפר מאורך $n-2$ שמכילים בדיוק $n-i$ מהמספרים $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$. יש $\binom{n}{i}$ דרכים לבחור ב- i הקדקודים שלא יופיעו בסדרה. תהי V' קבוצת $n-i$ הקדקודים שכן יופיעו בסדרה. עלינו לחשב את מספר הסדרות מאורך $n-2$ של איברים של V' כך שכל איבר יופיע לפחות פעם אחת. כדי לעשות זאת נשתמש בעקרון ההכלה והדחה.

תהי S קבוצת כל הסדרות מאורך $n-2$ של איברים של V'. בנוסף, לכל $k \in V'$ תהי B_k קבוצת כל הסדרות מאורך $n-2$ של איברים של V' בהן j אינו מופיע. אז

$$|S| = (n-i)^{n-2},$$

$$|B_k| = (n-i-1)^{n-2} \text{ לכל } k \in V',$$

$$|B_k \cap B_l| = (n-i-2)^{n-2} \text{ לכל } k, l \in V' \text{ כך ש- } k < l,$$

וכולי. מכאן נסיק ש-

$$|A_i| = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} (n-i-j)^{n-2}$$

ולכן

$$\boxed{\mathrm{E}[f] = \frac{1}{n^{n-2}} \sum_{i=2}^{n-1} i \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} (n-i-j)^{n-2}}$$

הכוונה בתרגיל הזה הייתה להגיע לצורה סגורה, והביטוי הנ"ל רחוק מלהיות סגור.

טעויות נפוצות:

(1) סטודנטים רבים השתמשו בקוד פרופר בלי לציין שהוא קיים רק כאשר $n \geq 3$. בעצם הנוסחה המתקבלת נכונה גם כאשר $n = 2$, אך כאשר $n = 1$ הביטוי $n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}$ הופך ל- 0^{-1}, ביטוי שאינו מוגדר. כאשר משתמשים בכלי שמוגד רק כאשר $n \geq 3$ יש לבדוק את שאר המקרים, במיוחד כאשר בביטוי המתקבל באחד המקרים אינו מוגדר. ההוכחה באמצעות משפט קיילי תקפה כאשר $n \geq 2$ אבל גם כאן יש להגיד משהו על המקרה $n = 1$.

(2) מספר סטודנטים ניסו להגדיר "משתנה מקרי" f_i ששווה למספר עצים בהם יש בדיוק i עלים. אין משתנה מקרי כזה. יתכן שהבעיה פה הייתה שרשמו f_i במקום $f_i(T)$. (ברור ש- $f_i(T)$ אינו יכול להיות שווה למספר העצים עם תכונה מסויימת.)

מס' נבחן:________________

שאלה 8

הוכיחו את נוסחת אוילר: בגרף מישורי קשיר עם n קדקודים, m צלעות ו-f פאות מתקיים $n+f-m=2$.

הוכח בכיתה.

בהצלחה !