

אוניברסיטת בן-גוריון המחלקה למדעי המחשב

פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, ד"ר נתן רובין, גב' יעל שטיין	בוהן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061
טל באומל, גלי בר-און, רחל סבן, מני סדיגורסקי, זיו עמרם, נתי פטר, ארנולד פילצר	5.5.2017
אסור	חומר עזר
שעתיים וחצי	משך הבחינה

הנחיות חשובות:

- ענו על 8 מתוך 10 השאלות הבאות.
- משקל כל שאלה הוא 13 נקודות, כך שניתן לצבור לכל היותר 104 נקודות.
- בכל שאלה בדיוק אחת מבין ארבעת האפשרויות היא נכונה.
- רשמו את תשובותיכם בטבלה למטה בכתב ברור ובעט.
- במידה ותענו על יותר מ- 8 שאלות, רק 8 השאלות הראשונות עליהן עניתם תיבדקנה.
- בדיקת הבוהן לא תתחשב בחישובים ו/או הסברים על גבי טופס המבחן ובמחברת הטיוטה.

בהצלחה !

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה										

<u>ציון</u>	
-------------	--

1. מספר האפשרויות לבחור 6 מספרים מתוך הקבוצה $\{1, 2, \dots, 20\}$, כך שאין ביניהם שניים עוקבים הוא:

א. $\binom{20}{6}$

ב. $\binom{15}{6}$

ג. $20 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5$

ד. $\frac{20!}{14!}$

הסבר: בחירה של 6 מספרים $n_1 < n_2 < \dots < n_6$ שקולה לבחירה של סדרה x_0, x_1, \dots, x_6 , כאשר x_i שווה למספר המספרים בין n_i ו- n_{i+1} , עבור $i = 1, \dots, 5$, ו- x_0 שווה למספר המספרים משמאל ל- n_1 , ו- x_6 שווה למספר המספרים מימין ל- n_6 . עפ"י תנאי השאלה, עלינו לדרוש $x_0, x_6 \geq 0$ ו- $x_1, \dots, x_5 \geq 1$. כלומר עלינו למצוא את מספר הפתרונות למשוואה: $x_0 + x_1 + \dots + x_6 = 14$, כאשר $y_0, \dots, y_6 \geq 0$, שהוא כידוע $\binom{15}{6}$.

2. כמה פונקציות חז"ע $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ישנן, שיש להן בדיוק נקודת שבת אחת.

א. $n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

ב. $\left\lfloor \frac{n^n}{e} \right\rfloor$ אם n זוגי, ו- $\left\lceil \frac{n^n}{e} \right\rceil$ אם n אי-זוגי

ג. $n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}$

ד. $(n-1)!$

הסבר: יש n אפשרויות לבחור את נקודת השבת היחידה, ואז נכפול במספר האי-סדרים על $n-1$ האיברים הנותרים.

3. שולחן עגול ערוך ל-15 אורחים. בכל צלחת ישנו פתק עם שמו של אחד האורחים. לאחר שהאורחים מתיישבים, מתברר שאף אחד מהם לא יושב ליד שמו. מחליטים לכן לסובב את השולחן על מנת שלפחות חלק מהאורחים ישבו ליד שמותיהם. מהו מספר ההתאמות המקסימלי שמובטח שיתקבל ע"י סיבוב השולחן?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. 14

הסבר: נניח שמסובבים את השולחן עם כיוון השעון. ישנם 15 מצבים שונים של השולחן (כולל המצב ההתחלתי), ובמצב ההתחלתי כל אורח נמצא במרחק של 1 ל-14 משמו.

לכן, עפ"י עקרון שובך היונים, ישנם שני אורחים g_i, g_j כך ששניהם נמצאים במרחק d משמם. מכאן שלאחר d שינויי מצב, שני האורחים הללו ישבו ליד שמותיהם. לסיום, קל לתת דוגמא בה בכל מצב של השולחן מספר ההתאמות לא גדול משתיים.

4. יש 10 כדורים לבנים זהים ו-12 כדורים צבעוניים (כל כדור בצבע אחר). בכמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים ב-7 תאים מובחנים, כך שאין תא שמכיל רק כדורים לבנים (כלומר, תא עם לפחות כדור לבן אחד ואף כדור צבעוני).

א. $\binom{16}{6} \cdot 7^{12} - \binom{16}{6} \cdot 6^{12}$

ב. $\binom{16}{6} \cdot \frac{12!}{5!} \cdot 7^5$

ג. $\sum_{k=0}^7 (-1)^k \cdot \binom{16}{6} \cdot (7-k)^{12}$

ד. $\sum_{k=0}^7 (-1)^k \cdot \binom{7}{k} \cdot \binom{16-k}{6} \cdot (7-k)^{12}$

הסבר: מספר הדרכים לסידור הכדורים ללא התנאי הנוסף הוא $\binom{16}{6} 7^{12}$. נגדיר: $A_i -$

מספר הדרכים לסדר את הכדורים כך שבתא ה- i יש רק כדורים לבנים (אחד או יותר),

עבור $i = 1, \dots, 7$. אזי הפתרון לשאלה הוא $\binom{16}{6} 7^{12} - |A_1 \cup \dots \cup A_7|$,

כדי לחשב את $|A_i|$, יש לשים כדור לבן אחד בתא ה- i ולחלק את שאר 9 הכדורים הלבנים

לתאים באופן כלשהו, ואת הצבעוניים ל-6 התאים האחרים. יש לכך $\binom{15}{6} \cdot 6^{12}$ אפשרויות.

באופן דומה חיתוך של k קבוצות הוא מגודל $\binom{16-k}{6} \cdot (7-k)^{12}$, ובעזרת עקרון

ההכלה וההדחה, מקבלים את הביטוי ב-ד'.

5. מחלקים $3n$ אנשים ל- n שלשות t_1, \dots, t_n . בכמה דרכים ניתן לסדר את האנשים ב- n שורות מובחנות,

$1, \dots, n$, כך שבכל שורה יש בדיוק 3 אנשים, ולכל $1 \leq i \leq n$ בדיוק 2 אנשים מהשלשה t_i נמצאים

בשורה ה- i ? $\left[\frac{n!}{e} \right]$ מעוגל כלפי מעלה או מטה בהתאם לזוגיות של n .

א. $3^n \left[\frac{n!}{e} \right]$

ב. $3^{2n} 2^n \left[\frac{n!}{e} \right]$

ג. $(3!)^{2n} \left[\frac{n!}{e} \right]$

ד. $(3!)^{2n} 2^{n!}$

הסבר: מספר הדרכים לקבוע את האנשים בשורות מבלי לסדרם הוא $\binom{n!}{e}^n$, כיוון שצריך לבחור לכל i מיהם 2 האנשים שיישארו בשורה ה- i , ואז אי-סדר על האנשים שלא נבחרו. את זה יש לכפול ב- $(3!)^n$, עבור הסידורים הפנימיים בשורות.

6. יהי x מספר הדרכים לפזר 20 כדורים צבעוניים (כל כדור בצבע אחר) ו-10 כדורים לבנים זהים ב-5 תאים מובחנים כך שבכל תא כדור לבן אחד לפחות. אזי x שווה ל-

- א. מספר הדרכים לבחור לוועדה 4 בנים ו-4 בנות מכיתה של 33 ילדים ש 9 מתוכם בנים.
 ב. מספר הדרכים לבחור 5 סטודנטים מתוך קבוצה של 9 סטודנטים, ולחלק ביניהם 20 שאלות שצריך לפתור.
 ג. מספר הדרכים לסדר בשורה 24 בקבוקי מיץ מסוגים שונים ו-9 בקבוקי מים.
 ד. מספר הסדרות שניתן ליצור מ-20 אותיות שונות ו-10 פעמים הספרה 2.

הסבר:

$$x = \binom{5+4}{4} 5^{20} = \binom{9}{5} 5^{20}$$

7. בבחירות מתמודדות 10 מפלגות, מתוכם 3 מפלגות ימין, 3 מפלגות שמאל, ו-4 מפלגות מרכז. לכל מפלגה רשימה של 50 מועמדים (לפי סדר כניסתם לכנסת). בכמה דרכים תוכל להיבחר כנסת של 120 ח"כים כך שיהיו בכנסת 60 ח"כים ממפלגות מרכז, 30 ח"כים ממפלגות ימין ו-30 ח"כים ממפלגות שמאל?

א. $\binom{150}{30}^2 \cdot \binom{200}{60}$

ב. $\binom{32}{2}^2 \cdot \binom{63}{3}$

ג. $\binom{32}{2}^2 \cdot \left[\binom{63}{3} - 4 \cdot \binom{12}{3} \right]$

ד. $4^{60} 3^{30} 3^{30} - 4^{10} 3^{30} 3^{30}$

הסבר: מספר הדרכים לבחור 60 נציגים מ-4 מפלגות המרכז הוא כמספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60$, כאשר $0 \leq x_i \leq 50$ עבור $i = 1, 2, 3, 4$. בעזרת עקרון ההכלה וההדחה (A_i – קבוצת הפתרונות בהם x_i גדול שווה 51), מקבלים שמספר זה שווה ל-
 $\binom{63}{3} - 4 \cdot \binom{12}{3}$. באופן דומה (ללא צורך בהכלה והדחה) מקבלים שמספר הדרכים לבחור 30 נציגים מ-3 מפלגות הימין (לחילופין השמאל) הוא $\binom{32}{2}$.

8. יונתן רוצה לצלם 10 עמודים מספר היסטוריה בשחור לבן, ו-10 עמודים מאלבום תמונות בצבעוני. כל צילום (צבעוני/שחור לבן) עולה 10 אגורות. ליונתן יש 20 מטבעות של 10 אגורות. האפשרויות שעומדות בפני יונתן בכל שלב הן:

1. הכנסת מטבע למכונת הצילום שחור לבן.
 2. הכנסת מטבע למכונת הצילום הצבעונית.
 3. צילום עמוד מספר ההיסטוריה אם יש כסף במכונת הצילום שחור לבן.
 4. צילום עמוד מאלבום התמונות אם יש כסף במכונת הצילום הצבעונית.
- בכמה דרכים יכול יונתן לבצע את המשימה?

א. $\frac{1}{21} \binom{40}{20}$

ב. $\frac{1}{21} \binom{40}{20} \binom{20}{10}$

ג. $\frac{1}{21} \binom{40}{20} \cdot \frac{1}{10!}$

ד. $\frac{1}{121} \binom{40}{20} \binom{20}{10}^2$

הסבר: מספר הדרכים לצילום מתוך ספר ההיסטוריה (לחילופין מתוך אלבום התמונות) הוא $C(10) = \frac{1}{11} \binom{20}{10}$. כדי ליצור סדרה אחת (באורך 40) מתוך שתי הסדרות, עלינו לבחור 20 מקומות עבור אחת הסדרות.

9. יהי x מספר הסדרות מאורך 20 שבנויות מאיברי הקבוצה $\{0,1,2\}$ שבהן יש בדיוק 7 אחדות ואין שני אחדות צמודים. אזי x שווה ל-

א. $2^{13} \binom{26}{7}$

ב. $2^{13} \binom{12}{7}$

ג. $2^{13} \binom{14}{7}$

ד. $2^{13} \binom{26}{6}$

הסבר: מספר הדרכים למקם את האחדות הוא $\binom{14}{7}$, ראה הסבר לשאלה 1. לאחר שמיקמנו את האחדות, מספר הדרכים לקבוע את שאר איברי הסדרה הוא 2^{13} .

10. לכמה מספרים n מתקיים $\vartheta(n) = 10$?

$$\vartheta(n) = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i-1} \prod_{i=1}^k (p_i - 1) \quad \text{אז} \quad n = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$$

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 4

הסבר: $n=11$ או $n=22$.